MANUAL DO PROFESSOR

# Matemática

## ciência e aplicações

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
DAVID DEGENSZAJN
ROBERTO PÉRIGO
NILZE DE ALMEIDA

ENSINO MÉDIO

COMPONENTE CURRICULAR
**MATEMÁTICA**
3º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora Saraiva

# MATEMÁTICA

## CIÊNCIA E APLICAÇÕES


**Gelson Iezzi**
Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

**Osvaldo Dolce**
Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Professor da rede pública estadual de São Paulo

**David Degenszajn**
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

**Roberto Périgo**
Licenciado e bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor da rede particular de ensino e de cursos pré-vestibulares em São Paulo

**Nilze de Almeida**
Mestra em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professora da rede pública estadual de São Paulo


COMPONENTE CURRICULAR
**MATEMÁTICA**
3º ANO
ENSINO MÉDIO

**MANUAL DO PROFESSOR**

**Volume 3**
**Ensino Médio**


9ª edição

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática : ciência e aplicações, volume 3 :
ensino médio / Gelson Iezzi. . . (et. al.] . –
9. ed. – São Paulo : Saraiva, 2016.

Outros autores: Osvaldo Dolce, David
Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida
Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978-85-472-0539-3 (aluno)
ISBN 978-85-472-0540-9 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson.
II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David.
IV. Périgo, Roberto. V. Almeida, Nilze de.

16-02893 CDD – 510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

**Diretora editorial** Lidiane Vivaldini Olo
**Gerente editorial** Luiz Tonolli
**Editor responsável** Viviane Carpegiani
**Editores** Juliana Grassmann dos Santos, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Érica Lamas
**Gerente de produção editorial** Ricardo de Gan Braga
**Gerente de revisão** Hélia de Jesus Gonsaga
**Coordenador de revisão** Camila Christi Gazzani
**Revisores** Carlos Eduardo Sigrist, Ricardo Koichi Miyake, Lilian Miyoko Kumai, Raquel Alves Taveira
**Produtor editorial** Roseli Said
**Supervisor de iconografia** Sílvio Kligin
**Coordenador de iconografia** Cristina Akisino
**Pesquisa iconográfica** Fernando Cambetas
**Coordenador de artes** José Maria Oliveira
**Design e Capa** Sergio Cândido, com imagens de Thinkstock/Getty Images, Chad Baker, Rob A. Johnston/Walkabout Eolf Photography
**Edição de artes** Marcos Zolezi
**Diagramação** Setup
**Assistente** Bárbara de Souza
**Ilustrações** Ari Nicolosi, Casa Paulistana de Comunicação, CJT/Zapt, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Milton Rodrigues, Setup, [SIC] Comunicação, Wilson Jorge Filho/Zapt
**Tratamento de imagens** Emerson de Lima
**Protótipos** Magali Prado
**Impressão e acabamento**

732.760.009.001



SAC 0800-0117875
2ª a 6ª, das 8h às 18h
www.editorasaraiva.com.br/contato

Avenida das Nações Unidas, 7221 – 1º Andar – Setor C – Pinheiros – CEP 05425-902

# Apresentação

**Caros alunos**

É sempre um grande desafio para um autor definir o conteúdo a ser ministrado no Ensino Médio, distribuindo-o pelos três anos. Por isso, depois de consultar as sugestões da Secretaria de Educação Básica (entidade pertencente ao Ministério da Educação) e de ouvir a opinião de inúmeros professores, optamos pelo seguinte programa:

**Volume 1:** noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, progressões, semelhança e triângulos retângulos, áreas das principais figuras planas, trigonometria no triângulo retângulo e estatística descritiva.

**Volume 2:** trigonometria na circunferência, funções circulares, trigonometria em um triângulo qualquer, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos, matrizes, sistemas lineares, determinantes, análise combinatória e probabilidades.

**Volume 3:** geometria analítica plana, números complexos, polinômios, estatística descritiva, matemática financeira e equações algébricas.

Ao tratar de alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico sobre o desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo. Já em capítulos como os que tratam de funções, matemática financeira e estatística descritiva, entre outros, recorremos a infográficos e matérias de jornais e revistas, como forma de mostrar a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento e no cotidiano. São textos de fácil leitura, que despertam a curiosidade do leitor e que podem dialogar sobre temas transversais, como cidadania e meio ambiente.

No desenvolvimento teórico, procuramos, sempre que possível, apresentar os assuntos de forma contextualizada, empregando uma linguagem mais simples. Entretanto, ao formalizarmos os conceitos em estudo (os quais são abundantemente exemplificados), optamos por termos com maior rigor matemático.

Tivemos também a preocupação de mostrar as justificativas lógicas das propriedades apresentadas, omitindo apenas demonstrações exageradamente longas, incompatíveis com as abordagens feitas atualmente no Ensino Médio. Cada nova propriedade é seguida de exemplos e exercícios resolvidos, por meio dos quais é explicitada sua utilidade.

Quanto às atividades, tanto os exercícios como os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade.

Cada capítulo do livro é encerrado com um desafio. Geralmente é um problema mais complexo, que exige maior raciocínio, articulação e criatividade do leitor na busca da solução. É mais uma oportunidade para vivenciar a resolução de problemas.

**Os autores**

# Conheça este livro

## Início do capítulo

O início do capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, é introduzido com situações do cotidiano.

## Um pouco de história

O trabalho com a História da Matemática coloca os alunos em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os acontecimentos na linha do tempo.

## Troque ideias

A seção propõe atividades que devem ser realizadas em grupo. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o leitor a construir novos conceitos ou aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

## Exercícios

Grande variedade de exercícios é proposta nesta seção que tem por objetivo consolidar os conteúdos e conceitos abordados.

## Desafio

Ao final de cada capítulo é apresentado um desafio com o objetivo de, mais uma vez, permitir que o leitor vivencie a resolução de problemas, estimulando sua criatividade e seu raciocínio.

## Aplicações

Incluem textos que ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia. Os textos aprofundam alguns conceitos e auxiliam a construção de outros.

## Exemplos e Exercícios resolvidos

Todos os capítulos deste livro apresentam séries de exercícios intercaladas em meio ao texto. Muitas destas séries são precedidas de exemplos ou exercícios resolvidos, que auxiliam o leitor a ampliar o repertório de exemplos apresentados no texto.

## Pense nisto

Chamadas curtas são intercaladas em meio ao texto, convidando o leitor para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou alguma solução para um problema.

## Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

# O ponto

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### Introdução à Geometria Analítica

O segundo terço do século XVII foi um importante período da história da Matemática, com destaque para a grande intercomunicação de ideias entre os matemáticos franceses, dos quais destacamos René Descartes e Pierre de Fermat. A eles usualmente atribui-se a invenção da Geometria Analítica. Outros nomes dessa época também devem ser lembrados, como Roberval, Desargues, Mersenne e Pascal.

René Descartes (1596-1650) recebeu, desde cedo, uma educação diferenciada e dedicou grande parte de sua vida à filosofia e à ciência. Sua obra mais importante, datada de 1637, é o *Discurso sobre o método*, em que apresenta as bases filosóficas do seu método para o estudo das ciências. Descartes acreditava que o conhecimento matemático é mais cumulativo e progressivo que o de outras áreas do conhecimento, crescendo por acréscimos e não por substituições, como ocorria em outras ciências, à medida que eram feitas novas descobertas. As demonstrações usadas para validar determinadas propriedades na Matemática possibilitavam a aquisição segura do conhecimento, e esse poderia ser o caminho para a verdade e para novas descobertas das ciências. Segundo Descartes, não se poderia aceitar nada como verdade se não fossem apresentadas provas com clareza e distinção. Esse método de organizar o pensamento científico, conhecido como racionalismo, rompia com o empirismo do passado.

Em um dos três apêndices do *Discurso sobre o método* encontra-se "Le Geométric". A maior contribuição desse texto é a ideia de dar significado às operações algébricas por meio de interpretações geométricas e, reciprocamente, "libertar" a Geometria dos diagramas por meio de processos algébricos.

Esses princípios originaram a Geometria Analítica que conhecemos hoje e que passaremos a estudar nos primeiros quatro capítulos desse volume. Os pontos são representados por pares ordenados de números reais; as retas, circunferências e outras curvas podem ser descritas por meio de expressões algébricas, com as quais podemos estudar propriedades das figuras geométricas. As figuras são representadas em um referencial formado por dois eixos perpendiculares, conhecido

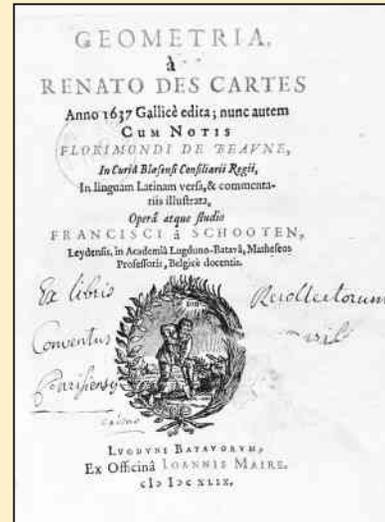
COLEÇÃO PARTICULAR/SHEILA TERRY/SPL/LATINSTOCK

René Descartes ensinando astronomia à rainha Cristina I da Suécia, por volta de 1649. Ilustração de D. Jaime Seix, 1876.

como **sistema de coordenadas cartesianas**, nome dado em homenagem a Descartes. Vale lembrar, no entanto, que na obra de Descartes não havia nada muito sistemático sobre sistema de coordenadas, distâncias, inclinação de retas, ângulos etc.

Pierre de Fermat (1601-1665), ao contrário de Descartes, dedicava-se à Ciência e à Matemática por prazer. Sua grande contribuição para a Geometria Analítica foi a descoberta (um ano antes do aparecimento de "Le Geométric" de Descartes) do seguinte princípio: "Uma equação que apresenta duas quantidades incógnitas descreve uma linha, reta ou curva". Fermat estudou desde casos de equações lineares simples até equações quadráticas mais gerais. Sua obra, mais sistemática e didática que a de Descartes, não foi publicada em vida e, por esse motivo, a Geometria Analítica era considerada, na época, invenção única de Descartes.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem
Cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curiâ Blesensi Consiliarii Regii,
In linguam Latinam versa, & commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos Professoris, Belgicè docentis.
LUGDUNI BATAVORUM,
Ex Officinâ IOANNIS MAIRE.
CIƆ IƆC XLIX.



"Geometria" foi publicado em 1637 como um apêndice do *Discurso sobre o método*.

## Plano cartesiano

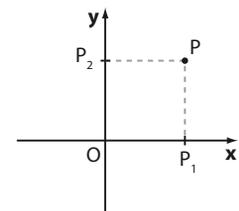
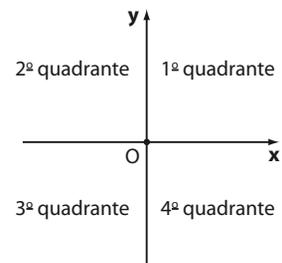
Consideremos dois eixos orientados, **x** e **y**, perpendiculares em **O**. O plano determinado por esses eixos é chamado **plano cartesiano**.

Cada uma das partes em que o plano fica dividido pelos eixos **x** e **y** recebe o nome de **quadrante**. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura ao lado:

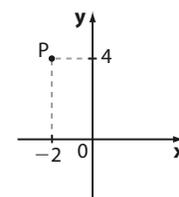
- O eixo **x** (ou eixo Ox) recebe o nome de **eixo das abscissas**.
- O eixo **y** (ou eixo Oy) recebe o nome de **eixo das ordenadas**.
- O ponto **O** é a **origem** do sistema de eixos cartesianos ortogonal ou retangular. Esse sistema é frequentemente indicado por xOy.

Dado um ponto **P** qualquer do plano cartesiano, traçamos por **P** as retas paralelas aos eixos **x** e **y**. Sejam $P_1$ e $P_2$ os pontos de interseção dessas retas com os eixos **x** e **y**, respectivamente.

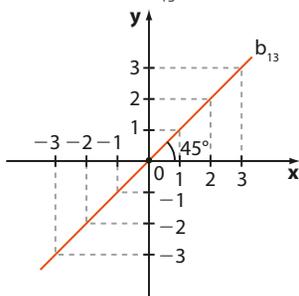
Dizemos que:

- a abscissa de **P** (indica-se por $x_P$) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP_1}$;
- a ordenada de **P** (indica-se por $y_P$) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP_2}$;
- as **coordenadas** de **P** são os números reais $x_P$ e $y_P$, indicados, em geral, na forma do par ordenado $(x_P, y_P)$.

**EXEMPLO 1**

Um ponto **P** possui coordenadas dadas por P(−2, 4). Isso significa que a abscissa de **P** vale −2 e sua ordenada vale 4.

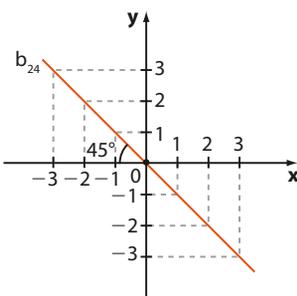
**P** encontra-se no 2º quadrante, como mostra a figura ao lado.

**OBSERVAÇÕES**

- A cada ponto **P** do plano cartesiano corresponde um par ordenado $(x_P, y_P)$ de números reais e, inversamente, para cada par ordenado $(x_P, y_P)$ de números reais corresponde um ponto **P** do plano.
- Um ponto pertence ao eixo das abscissas se sua ordenada é nula. Desse modo, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto (a, 0) pertence ao eixo **x**.
- Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se sua abscissa é nula. Assim, para todo $b \in \mathbb{R}$, o ponto (0, b) pertence ao eixo **y**.
- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ($\mathbf{b}_{13}$) se suas coordenadas são iguais.

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto (a, a) pertence à bissetriz $\mathbf{b}_{13}$.

**PENSE NISTO:**

Por que o ângulo indicado no sistema cartesiano ao lado mede 45°?

Porque $\mathbf{b}_{13}$ é bissetriz do ângulo xOy, que mede 90°.

- Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares ($\mathbf{b}_{24}$) se suas coordenadas são opostas.

Sim; sim.
Se $a < 0$, o ponto (a, −a) pertence ao 2º quadrante.
Se $a > 0$, ele pertence ao 4º quadrante.

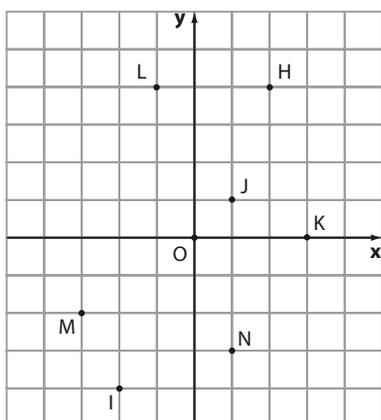
Para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto (a, −a) pertence à bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.

**PENSE NISTO:**

O ponto (a, −a) pode pertencer ao 2º quadrante? E ao 4º quadrante?

## EXERCÍCIOS

**1** Situe no mesmo sistema de eixos cartesianos os pontos A(1, 3), B(−2, 1), C(0, −4), D(−3, 0), E(−2, −3), F(2, −1), G(3, −4) e $H\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

**2** Forneça as coordenadas dos pontos dados no plano cartesiano abaixo.

**3** Dados os seguintes pontos:

| | | |
|---|---|---|
| A(−3, 3) | $E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ | $I\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ |
| $B\left(\frac{11}{5}, 0\right)$ | F(0, −5) | J(0, π) |
| C(−4, −5) | $G\left(3, \frac{11}{2}\right)$ | $K\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ |
| $D(0, \sqrt{2})$ | H(1; −3,2) | L(−4, 2) |

Indique quais pertencem:

**a)** ao 1º quadrante.
**b)** ao 2º quadrante.
**c)** ao 3º quadrante.
**d)** ao 4º quadrante.
**e)** ao eixo **x**.
**f)** ao eixo **y**.
**g)** à bissetriz $\mathbf{b}_{13}$.
**h)** à bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.

**4** Determine o sinal do produto das coordenadas de um ponto:

**a)** do 1º quadrante.
**b)** da bissetriz $\mathbf{b}_{24}$.
**c)** do 3º quadrante.
**d)** do eixo das ordenadas.

**5** Determine os valores reais de **k** para os quais o ponto $P(k^2 - 9, 5)$ pertence ao eixo das ordenadas.

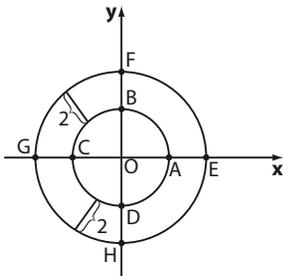
**6** Sendo **a** um número real positivo e **b** um número real negativo, determine em que quadrante se encontra cada um destes pontos:

**a)** P(a, b)

**b)** Q(−a, b)

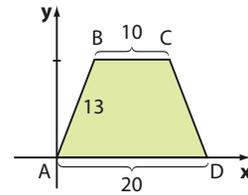
**c)** $R\left(2a, \frac{b}{3}\right)$

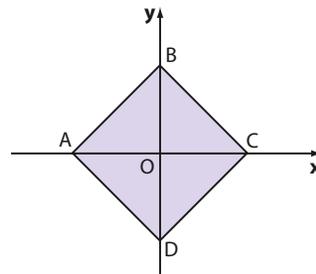
**d)** S(−a, −b)

**7** Na figura a seguir as duas circunferências têm centro na origem. Sabendo que a abscissa de **A** é igual a 3, determine as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**.

**8** Para quais valores reais de **m** o ponto P(m, 2m − 1) pertence ao 3º quadrante?

**9** Os pontos A(3, 5), B(2, m) e C(−4, n) pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas. Determine **m** e **n**.

**10** Os pontos (3, −2), (a, 5) e (b, 100) pertencem a uma reta paralela ao eixo **y**. Determine **a** e **b**.

**11** Determine as coordenadas dos vértices **A**, **B**, **C** e **D** do trapézio isósceles abaixo.

**12** Os vértices de um triângulo são os pontos A(−4, 5), B(−4, 0) e C(1, 5). Mostre que esse triângulo é retângulo. Que segmento representa a hipotenusa desse triângulo?

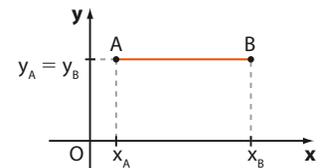
**13** Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede 6. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices do quadrado.

# Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos **A** e **B** do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida do segmento de reta que tem esses dois pontos por extremidades.

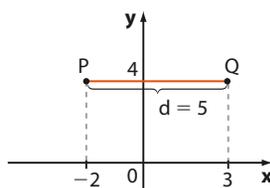
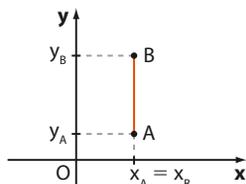
Indicaremos a distância entre **A** e **B** por $\mathbf{d_{AB}}$.

- **1º caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo **x**.

A distância entre **A** e **B** é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de **A** e **B**, isto é:

$$d_{AB} = |x_A - x_B|$$

**EXEMPLO 2**

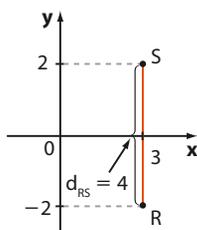
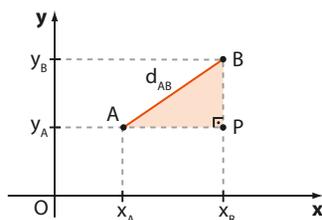
A distância entre os pontos P(−2, 4) e Q(3, 4) é $d_{PQ} = |-2 - 3| = |3 - (-2)| = 5$.

Assim, $d_{PQ} = 5$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

- **2º caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo **y**.

A distância entre **A** e **B** é dada pelo módulo da diferença entre as ordenadas de **A** e **B**, isto é:

$$d_{AB} = |y_A - y_B|$$

**EXEMPLO 3**

A distância entre os pontos R(3, −2) e S(3, 2) é $d_{RS} = |-2 - 2| = |2 - (-2)| = 4$.

Assim, $d_{RS} = 4$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

- **3º caso**: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a qualquer um dos eixos coordenados.

Observe que:

- $d_{AP} = |x_A - x_B|$
- $d_{BP} = |y_A - y_B|$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, temos:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2$$

$$(d_{AB})^2 = (|x_A - x_B|)^2 + (|y_A - y_B|)^2$$

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$, podemos escrever:

$$(d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Podemos observar ainda que, como $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa. Assim, pode-se escrever, também:

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

com $\Delta x$ representando a diferença entre as abscissas, e $\Delta y$, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

No 1º caso, temos $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$

No 2º caso, temos $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta y)^2} = |\Delta y|$

**PENSE NISTO:**

A expressão $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, usada para calcular a distância entre dois pontos, pode ser aplicada tanto no primeiro caso apresentado quanto no segundo?

**EXEMPLO 4**

Vamos calcular a distância entre os pontos A(2, 3) e B(5, 1).

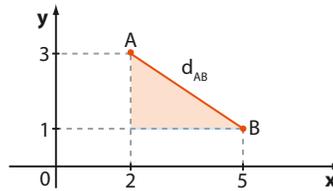
Temos:

$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{9 + 4}$

$d_{AB} = \sqrt{13}$

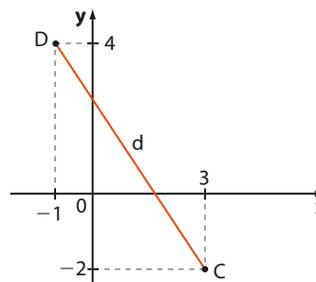
Assim, $d_{AB} = \sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento)

Embora tenhamos deduzido a fórmula da distância entre dois pontos usando pontos do 1º quadrante, podemos notar que ela não perde a validade quando são utilizados pontos de outros quadrantes. Observe o exemplo a seguir.

**EXEMPLO 5**

A distância **d** entre os pontos C(3, −2) e D(−1, 4), representados no gráfico ao lado, é dada por:

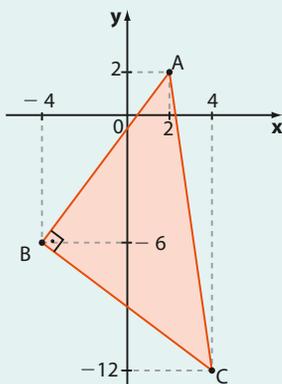
$d = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + [4 - (-2)]^2} =$

$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

Assim, **d** $= 2\sqrt{13}$ u.c. (unidades de medida de comprimento).

A partir de agora será omitida a expressão u.c., unidades de medida de comprimento, quando se tratar de distância.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1** Mostre que o triângulo de vértices A(2, 2), B(−4, −6) e C(4, −12) é retângulo e isósceles. Em seguida, determine seu perímetro.

**Solução:**

É preciso mostrar que as medidas de seus lados satisfazem o teorema de Pitágoras.

Temos:

- AB: $d_{AB} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + [2 - (-6)]^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
- AC: $d_{AC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + [2 - (-12)]^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
- BC: $d_{BC} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + [-6 - (-12)]^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Como $(d_{AC})^2 = (d_{AB})^2 + (d_{BC})^2$, pois $\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 10^2 + 10^2$, concluímos que o triângulo ABC é retângulo em **B** e seus catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ possuem a mesma medida. Assim, o triângulo ABC é isósceles, e seu perímetro é igual a $10 + 10 + 10\sqrt{2} = 10\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

## EXERCÍCIOS

**14** Determine a distância entre os pontos dados.

**a)** A(5, 2) e B(1, 3)

**b)** C(−1, 4) e D(−2, −3)

**c)** E(−4, −3) e O(0, 0)

**d)** F(−5, 4) e G(2, −5)

**e)** H(−1, 5) e I(−1, 12)

**f)** J(−2, −1) e K(3, −4)

**g)** L(−4, 3) e M(−4, −7)

**h)** $N(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

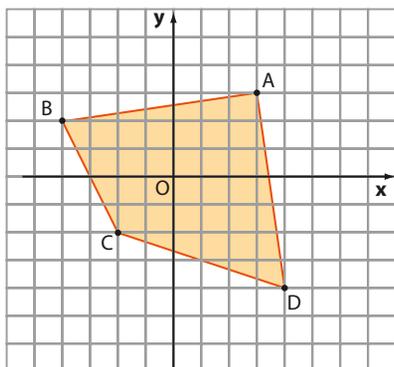
**i)** Q(1, 3) e R(−3, 3)

**15** Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo A(1, 0), B(3, 7) e C(−2, 4).

**16** O ponto **B** tem ordenada nula e dista 5 de **A**, que possui ambas as coordenadas iguais a 4. Determine a abscissa de **B**.

**17** Entre os pontos $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(1, \frac{3}{2}\right)$, C(2, 1) e D(0, 2), qual é o mais distante de E(1, 1)?

**18** Os pontos A(3m + 1, 15) e B(m, 3) pertencem ao 2º quadrante, e a distância entre eles é igual a 13. Qual é o valor de **m**?

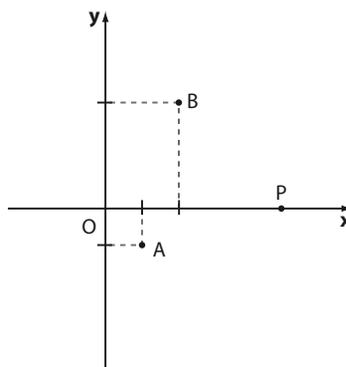
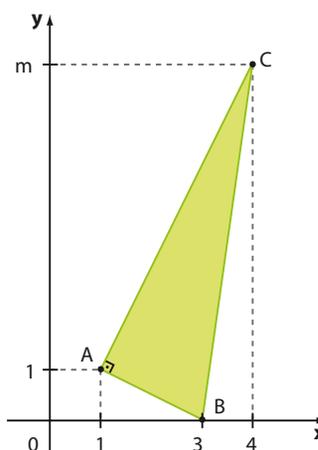
**19** Determine o perímetro do quadrilátero ABCD.

**20** O centro de uma circunferência é o ponto (−1, 3). Sabendo que o ponto (2, 5) pertence à circunferência, determine a medida de seu diâmetro.

**21** Mostre que o triângulo de vértices (2, 4), (5, 1) e (6, 5) é isósceles e calcule seu perímetro.

**22** Os pontos **A** e **B** são equidistantes de **Q**, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Sendo A(4, 2) e B(6, 8), quais são as coordenadas de **Q**?

**23** O ponto **P** pertence ao eixo dos **y** e equidista de A(−1, 1) e B(4, 2). Determine as coordenadas de **P**.

**24** Classifique, quanto aos lados, o triângulo cujos vértices são (0, 0), (3, 2) e (−1, 4).

**25** Na figura, **P** é equidistante de A(1, −1) e B(2, 3). Obtenha as coordenadas de **P**.

**26** Com base na figura seguinte, determine **m**.

**27** Dados os pontos M(2, 0) e N(0, 2), determine **P** de modo que o triângulo MNP seja equilátero.

**28** Encontre três pontos equidistantes de A(−2, 4) e B(3, 1).

## Ponto médio de um segmento

Há situações em Geometria Analítica que envolvem mediatrizes de segmentos, medianas e mediatrizes de triângulos e outros assuntos relacionados com o ponto médio de um segmento.

Seja **M** o ponto médio do segmento com extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Notemos, na figura ao lado, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes. Assim:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Mas $AB = 2 \cdot (AM)$, pois **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Logo, $\frac{AM}{2 \cdot (AM)} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow AP = 2 \cdot (AN)$.

Assim, temos:

$$|x_P - x_A| = 2 \cdot |x_N - x_A|$$

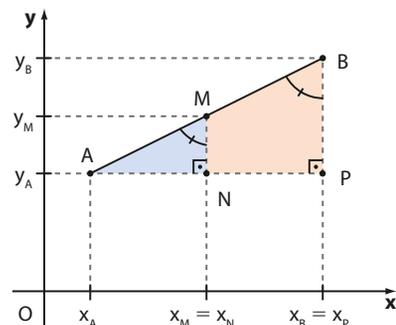
Como $x_P > x_A$ e $x_N > x_A$, podemos escrever:

$$x_P - x_A = 2(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow$$

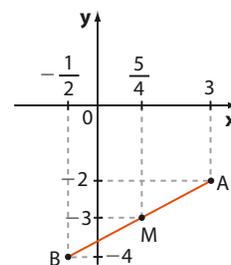
$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Mediante procedimento análogo, prova-se que $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Portanto, sendo **M** o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos:

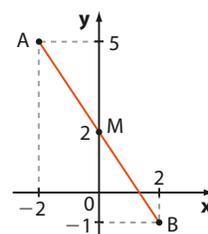
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

**EXEMPLO 6**

Dados os pontos $A(3, -2)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$, vamos calcular as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

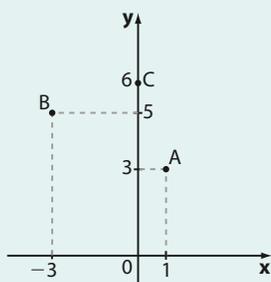
$$x_M = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} \quad e \quad y_M = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

**EXEMPLO 7**

Seja $M(0, 2)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se $A(-2, 5)$, para determinar as coordenadas de **B**, podemos fazer:

$$0 = \frac{-2 + x_B}{2} \quad e \quad 2 = \frac{5 + y_B}{2} \Rightarrow x_B = 2 \text{ e } y_B = -1$$

Assim, $B(2, -1)$. Veja, ao lado, a representação gráfica.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

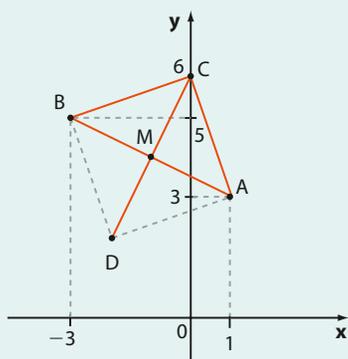
**2** De um losango são conhecidos três vértices, não necessariamente consecutivos: A(1, 3), B(−3, 5) e C(0, 6). Determine as coordenadas do quarto vértice desse losango.

**Solução:**

Vamos, inicialmente, calcular as distâncias entre os pontos dados, a fim de descobrir quais são os vértices consecutivos desse losango:

$$d_{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{10}$$

Como $d_{AC}$ e $d_{BC}$ são iguais, concluímos que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são lados do losango e $\overline{AB}$ é uma diagonal. Lembrando que em qualquer losango as diagonais intersectam-se ao meio, podemos determinar o vértice **D** do losango:

- **M** é ponto médio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{aligned}\right\} M(-1,\ 4)$$

- **M** também é ponto médio de $\overline{CD}$:

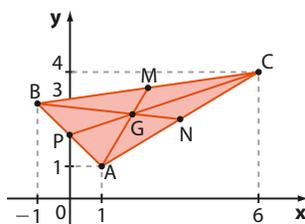
$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow -1 = \frac{0 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -2$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow 4 = \frac{6 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2$$

Assim, o outro vértice é D(−2, 2).

## Mediana e baricentro

Chamamos **mediana de um triângulo** o segmento cujas extremidades são um dos vértices desse triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Um triângulo possui três medianas. Através da Geometria Analítica podemos determinar as medidas das medianas de um triângulo. Vejamos:

Seja ABC o triângulo a seguir, de vértices A(1, 1), B(−1, 3) e C(6, 4).

Vamos determinar a medida da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$:

- O ponto médio **M** de $\overline{BC}$ é dado por:

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-1 + 6}{2}, \frac{3 + 4}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

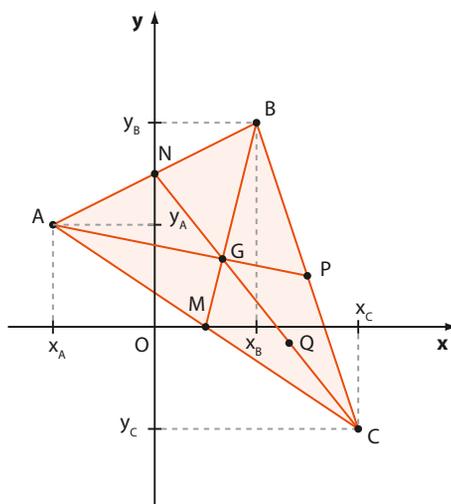
- O comprimento da mediana $\overline{AM}$ é obtido calculando-se a distância entre **A** e **M**:

$$d_{AM} = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Por meio de um procedimento análogo, podemos determinar o comprimento das medianas $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$.

As três medianas intersectam-se no ponto **G**, indicado na figura anterior. O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado **baricentro** do triângulo. Veremos a seguir como podemos determinar as coordenadas do baricentro.

## Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo

Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos não alinhados no plano cartesiano. Consideremos o triângulo ABC.

As três medianas relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, $\overline{CN}$, $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$. Elas se encontram no ponto **G**, baricentro do triângulo.

Vamos obter as coordenadas de **G**. Para isso, é preciso lembrar uma propriedade da Geometria Plana: o baricentro do triângulo divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão 2 : 1, isto é, o segmento que tem um vértice do triângulo como uma de suas extremidades mede o dobro do outro. Veja, por exemplo, a mediana $\overline{CN}$, que fica dividida em dois segmentos: $\overline{CG}$ e $\overline{GN}$, com CG = 2 · (GN).

Temos:

- **N** é ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2} & (1) \\ y_N = \dfrac{y_A + y_B}{2} & (2) \end{cases}$

**PENSE NISTO:**

Por que **G** é ponto médio de $\overline{QN}$?

**G** divide $\overline{CN}$ na razão 2 : 1, então CG = 2 · GN. Como **Q** é o ponto médio de $\overline{CG}$ (CQ = GQ), então os segmentos $\overline{CQ}$, $\overline{QG}$ e $\overline{GN}$ são congruentes.

- **Q** é ponto médio de $\overline{CG} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \dfrac{x_G + x_C}{2} & (3) \\ y_Q = \dfrac{y_G + y_C}{2} & (4) \end{cases}$

- **G** é ponto médio de $\overline{QN} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_Q + x_N}{2} & (5) \\ y_G = \dfrac{y_Q + y_N}{2} & (6) \end{cases}$

Substituindo (1) e (3) em (5), temos:

$$x_G = \frac{x_Q}{2} + \frac{x_N}{2} \Rightarrow x_G = \frac{x_G + x_C}{4} + \frac{x_A + x_B}{4} \Rightarrow \frac{3x_G}{4} = \frac{x_A + x_B + x_C}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente, substituindo (2) e (4) em (6), podemos concluir que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Assim, as coordenadas de **G** são $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Observe que a **abscissa** do baricentro é igual à média aritmética das abscissas dos vértices do triângulo. Da mesma forma, a **ordenada** do baricentro é igual à média aritmética das ordenadas dos vértices do triângulo.

**EXEMPLO 8**

Considerando o triângulo ABC da página 15, as coordenadas de seu baricentro (**G**) são:

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + (-1) + 6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 + 3 + 4}{3} = \frac{8}{3} \end{array}\right\} G\left(2, \frac{8}{3}\right)$$

## EXERCÍCIOS

**29** Determine as coordenadas do ponto médio do segmento cujas extremidades são os pontos:

**a)** A(1, 2) e B(2, 4)
**b)** C(3, 5) e D(2, −3)
**c)** $E\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(-3, \frac{3}{2}\right)$
**d)** G(−3, 5) e H(3, −5)
**e)** I(4, 10) e J(10, −4)
**f)** L(3, −4) e M(3, 2)

**30** Se (2, 3) é ponto médio de $\overline{AB}$, com A(n, 5) e B(4, m), quanto vale m + n?

**31** Os pontos A(2, −4), B(−2, 1) e C(−4, 5) são vértices de um triângulo. Determine o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC.

**32** O ponto P(7, −3) pertence a uma circunferência de centro (4, 2). Determine o ponto diametralmente oposto a **P**.

**33** Mostre que o quadrilátero de vértices (−8, −6), (−2, 0), (−2, −4) e (4, 2) é um paralelogramo.

**34** Um segmento possui uma extremidade sobre o eixo das abscissas e a outra sobre o eixo das ordenadas. Sendo (−1, 2) seu ponto médio, determine as coordenadas de suas extremidades.

**35** Um triângulo possui vértices nos pontos (2, −1), (4, −3) e (−2, −5). Determine:

**a)** as coordenadas de seu baricentro;
**b)** os comprimentos das medianas desse triângulo.

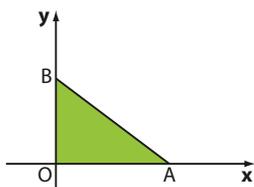
**36** M(1, 2), N(5, −2) e P(3, −4) são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

**37** Os pontos (2, 3), (5, −1) e (1, −4) são vértices de um quadrado.

**a)** Quais são as coordenadas do quarto vértice?
**b)** Qual é a medida do lado desse quadrado?

**38** Qual é o ponto simétrico de P(2, −3) em relação:

**a)** ao eixo das ordenadas?
**b)** à origem do sistema cartesiano?
**c)** ao eixo das abscissas?
**d)** ao ponto (3, −4)?

**39** Na figura a seguir, o triângulo de vértices A(6, 0), O(0, 0) e **B** é retângulo, e sua hipotenusa mede 8.

Determine:

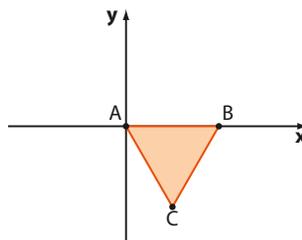
**a)** as coordenadas de **B**;

**b)** a medida da mediana relativa à hipotenusa;

**c)** o baricentro do triângulo e sua distância à origem.

**40** Dados A(−13, −1) e B(3, 5), determine as coordenadas dos pontos que dividem $\overline{AB}$ em quatro partes iguais.

**41** Um losango possui como vértices os pontos (2, −4), (4, 4) e (−6, −2). Sendo (−1, 1) o ponto de encontro das diagonais, determine o quarto vértice e a área do losango.

**42** Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e seu lado mede 4 cm.

Determine:

**a)** as coordenadas de **C**;

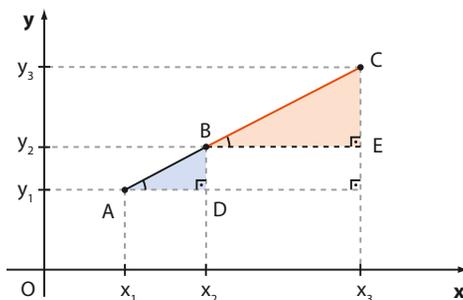
**b)** a área do triângulo ABC.

**43** A respeito de um triângulo ABC, sabe-se que:

- $M\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ é ponto médio de $\overline{BC}$.
- $d_{AB} = 9$
- $d_{AC} = 12$
- C(1, 6)

Determine as coordenadas de **A**, sabendo que elas são números reais negativos.

## Condição de alinhamento de três pontos

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da figura abaixo, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.

Os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$. Desenvolvendo, obtemos $(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = 0$. Daí:

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0$$

ou, ainda:

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

Essa última igualdade pode ser escrita sob a forma de determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

**OBSERVAÇÃO**

Se os pontos **A**, **B** e **C** pertencessem a uma reta paralela a um dos eixos (ao **x**, por exemplo), o determinante também se anularia.
De fato, teríamos:

$$y_1 = y_2 = y_3 \text{ e } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_3y_1} + \cancel{x_2y_1} - \cancel{x_3y_1} - \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_2y_1} = 0$$

Concluímos, então, que:

Se três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos verificar agora que a recíproca dessa propriedade também é verdadeira, isto é, se $D = 0$, então os pontos são colineares.
Se $D = 0$, como vimos, podemos escrever:

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1)$$

Temos as seguintes possibilidades:

- Se $x_3 - x_2 = 0$, isto é, $x_3 = x_2$, podemos ter:
  $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$ e, portanto, **A**, **B** e **C** seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo **y**;
  ou
  $y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow y_3 = y_2$ e, daí, $B = C$; não pode ocorrer, pois estamos admitindo que os três pontos são distintos.

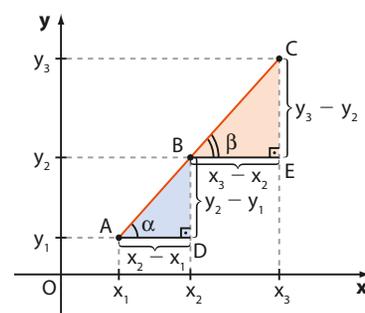
- Se $y_2 - y_1 = 0$, isto é, $y_1 = y_2$, podemos ter:
  $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ e, daí, $A = B$; não pode ocorrer, pois estamos admitindo que os três pontos são distintos;
  ou
  $y_3 - y_2 = 0 \Rightarrow y_3 = y_2 = y_1$ e, portanto, **A**, **B** e **C** seriam colineares por pertencerem a uma mesma reta paralela ao eixo **x**.

- Se $x_3 - x_2 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$, teríamos:

$$(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Daí, os triângulos retângulos ABD e BCE têm lados cujas medidas são proporcionais, isto é, são semelhantes (pelo caso LAL), como mostra a figura.

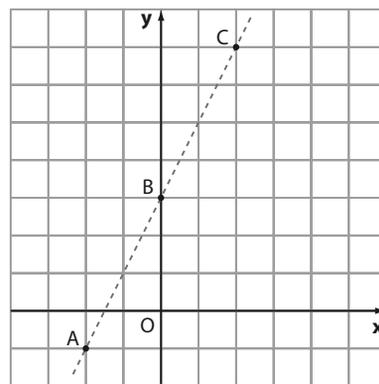
Consequentemente, temos $\alpha = \beta$, e os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.
Assim, acabamos de verificar que:

Se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, em que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$,
então **A**, **B** e **C** são colineares.

**EXEMPLO 9**

Observe que os pontos A(−2, −1), B(0, 3) e C(2, 7) estão alinhados.

De fato, o determinante $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é nulo.

Veja:

$$-6 + 0 - 2 - 6 + 14 + 0 = 0$$

**EXEMPLO 10**

Para verificar se os pontos A(−4, −6), B(3, 15) e C(−2, 0) estão alinhados, calculamos o determinante $\begin{vmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 3 & 15 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Temos:

$$-60 + 12 + 0 + 30 + 18 + 0 = -60 + 60 = 0$$

Assim, os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**3** Determine o valor de **m** de modo que (−2, 7), (m, −11) e (1, −2) estejam alinhados.

**Solução:**

Devemos impor a condição de alinhamento D = 0, ou seja: $D = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ m & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Temos: $22 + 7 - 2m + 11 - 4 - 7m = 0 \Rightarrow 9m = 36 \Rightarrow m = 4$

Assim, os pontos (−2, 7), (4, −11) e (1, −2) pertencem a uma única reta.

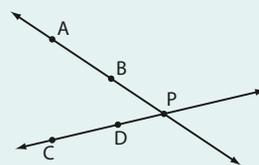
**4** Obtenha o ponto comum às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, sendo A(−3, 4), B(2, 9), C(2, 7) e D(4, 5).

**Solução:**

Seja $P(x_P, y_P)$ o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Temos:

- **A**, **B** e **P** são colineares $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x_P - 5y_P + 35 = 0 \Rightarrow x_P - y_P = -7$ (1)
- **C**, **D** e **P** são colineares $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_P + 2y_P - 18 = 0 \Rightarrow x_P + y_P = 9$ (2)

De (1) e (2), segue o sistema $\begin{cases} x_P - y_P = -7 \\ x_P + y_P = 9 \end{cases}$, cuja solução é $x_P = 1$ e $y_P = 8$. Assim, o ponto comum às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é P(1, 8).

## EXERCÍCIOS

**44** Verifique se estes pontos estão alinhados.

**a)** $(2, 1)$, $\left(7, -\frac{7}{3}\right)$ e $\left(3, \frac{1}{3}\right)$

**b)** $(0, 4)$, $(4, 0)$ e $(2, -2)$

**c)** $(1, 5)$, $(-3, 2)$ e $(-7, 1)$

**d)** $(6, 12)$, $\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ e $(0, 4)$

**e)** $(-2, 3)$, $(0, 0)$ e $(6, -9)$

**f)** $(-2, 3)$, $(0, 0)$ e $(-3, 2)$

**45** Para que valor de **m** os pontos $(3, 1)$, $(m, 2)$ e $(0, -2)$ são colineares?

**46** Ache um ponto que esteja alinhado com $P(3, 5)$ e $Q(-1, -3)$.

**47** Os pontos $(-3, -17)$, $(1, 3)$, $(6, 28)$ e $(0, -2)$ pertencem à mesma reta? Verifique analiticamente.

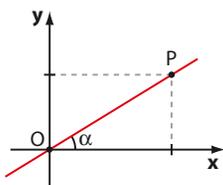
**48** Dados os pontos $A(0, -3)$, $B(3, 3)$ e $C(-2, -7)$, calcule as distâncias entre eles e, com base apenas nesses dados, verifique se **A**, **B** e **C** estão alinhados.

**49** Para que valores de **k** os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ são vértices de um triângulo?

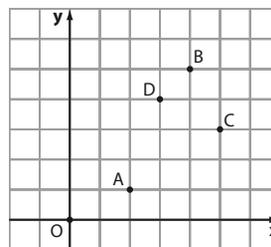
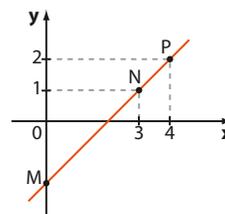
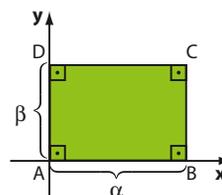
**50** Dados os pontos $A(4, -15)$ e $B(-4, 5)$, determine:

**a)** a relação entre $x_P$ e $y_P$ a fim de que $P(x_P, y_P)$ esteja alinhado com **A** e **B**;

**b)** o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta o eixo **x**.

**51** Na figura, $\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{3}$ e a abscissa de **P** é igual a 6. Verifique, em cada caso, se **O**, **P** e **Q** estão alinhados:

**a)** $Q(-18, -10)$

**b)** $Q(900, 600)$

**52** Observe a figura abaixo e determine o ponto comum aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

**53** Na figura, **M**, **N** e **P** estão alinhados. Qual é a ordenada de **M**?

**54** Na figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem $\alpha$ e $\beta$, e **A** é a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

**a)** Escreva as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

**b)** Obtenha o ponto de encontro das diagonais do retângulo.

**c)** Prove que um ponto $P(x, y)$ qualquer está alinhado com **A** e **C** se $-\beta x + \alpha y = 0$.

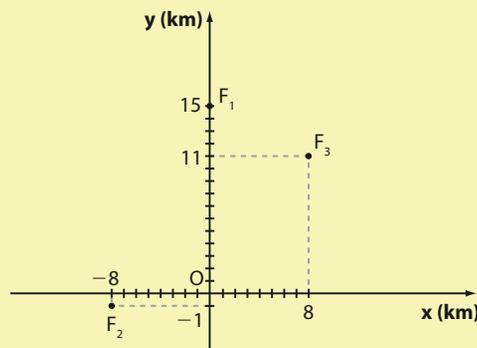
**55** Em um jogo de computador, idealizado na tela por um plano cartesiano, o herói encontra-se no ponto $(-3, 2)$ e precisa salvar a princesa no castelo, representado pelo ponto $(2, 5)$, do outro lado de um estreito rio, de trajetória retilínea, representado pelo eixo das ordenadas. O objetivo do jogo é fazer esse caminho o mais rápido possível. Nessas condições, em que ponto do plano ele deverá cruzar o rio a fim de minimizar o tempo de viagem?

Admita que a velocidade do herói seja igual para qualquer movimento.

## TROQUE IDEIAS

### Resolvendo um problema com o circuncentro do triângulo

Professor, nesta atividade, os estudantes deverão fazer construções geométricas com régua e compasso. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

Com o auxílio de fotografias tiradas por um satélite, foram localizados três focos de incêndio em uma área descampada, originados pelo calor excessivo e pela falta de chuvas. Para melhor orientação, um especialista construiu um sistema de coordenadas cartesianas em que a origem **O** é um pequeno povoado da região e representou os três focos pelos pontos de coordenadas $F_1(0, 15)$, $F_2(-8, -1)$ e $F_3(8, 11)$. A unidade de medida de comprimento representada no plano cartesiano é de 1 km.

*1ª parte* Na primeira parte da atividade, é provável que os estudantes resolvam o problema impondo a igualdade entre três distâncias.

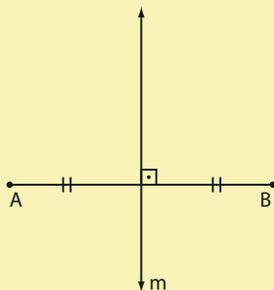
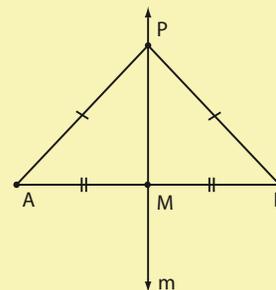
Para combater o incêndio, o corpo de bombeiros pretende instalar a base de operações em um ponto equidistante dos três focos.

**a)** Em que ponto **P** será instalada a base do corpo de bombeiros?

**b)** Qual é a distância real entre **P** e cada foco de incêndio?

*2ª parte* Na segunda parte da atividade é proposta outra forma de resolver o problema; por meio do circuncentro de um triângulo.

Para as próximas questões, vamos lembrar um conceito da Geometria Plana: "mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento traçada pelo seu ponto médio".

Na figura abaixo, **m** é a mediatriz de $\overline{AB}$. Considerando um ponto **P** qualquer de **m**, é possível verificar que **P** é equidistante das extremidades do segmento, isto é, PA = PB.

**Pense nisto**:
$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$ (pois **M** é ponto médio)
$A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P$ (ângulo reto)
$\overline{PM} \equiv \overline{PM}$ (lado comum)
Pelo caso LAL de congruência, $\triangle PAM \equiv \triangle PBM \Rightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$

**c)** Represente, em um quadriculado, o ponto **P** determinado no item *a* e os três pontos: $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$. Em seguida, com um compasso, trace a circunferência de centro em **P** e raio de medida $PF_1$. O que podemos observar?

Observe que o ponto **P** equidista de $F_1$ e $F_2$, então **P** pertence à mediatriz de $\overline{F_1F_2}$. Da mesma forma, **P** pertence à mediatriz de $\overline{F_1F_3}$ e de $\overline{F_2F_3}$. Assim, **P** é o ponto de encontro das três mediatrizes do triângulo $F_1F_2F_3$. Esse ponto recebe o nome de **circuncentro** do triângulo.

Vamos agora obter o ponto **P** de outro modo: usando construções com régua e compasso. Para isso, vamos lembrar como construir a mediatriz de um segmento qualquer $\overline{AB}$:

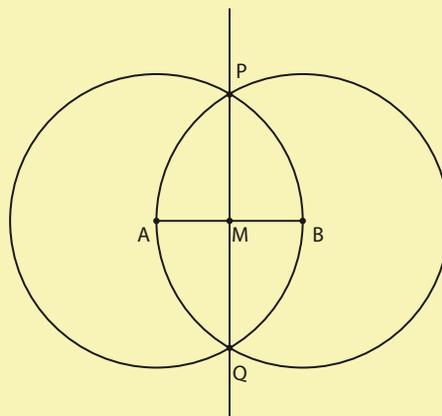
1º) Com centro em **A** e raio de medida $\overline{AB}$ (abertura do compasso), trace uma circunferência.

2º) Com centro em **B** e raio de medida $\overline{AB}$, trace uma circunferência.

3º) Considerando **P** e **Q** os pontos em que essas circunferências se intersectam, a mediatriz é a reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Justificativa: Como PA = PB = QA = QB, o quadrilátero PABQ é um losango e as diagonais do losango se intersectam perpendicularmente em seus pontos médios.

Daí $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e **M** é ponto médio de $\overline{AB}$; logo $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

**d)** Represente, em um quadriculado, os focos $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$. Com régua e compasso, obtenha o ponto **P**, circuncentro do triângulo $F_1F_2F_3$. Verifique se as coordenadas de **P**, obtidas nessa construção, coincidem com as coordenadas obtidas analiticamente no item *a*.

## DESAFIO

Em um condomínio, as casas estão distribuídas ao longo de três grandes "avenidas" retilíneas: $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{A_3}$. O esquema ao lado representa uma planta simplificada do local.

Inserindo-se convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem **O** representa a rotatória que dá acesso às três avenidas, podemos representar:

- duas avenidas pelos eixos cartesianos e uma pela bissetriz dos quadrantes ímpares;
- a casa de Fábio pelo ponto F(4, 0);
- a casa de seu irmão, Gabriel, pelo ponto **G**;
- a piscina do condomínio pelo ponto P(−3, 1).

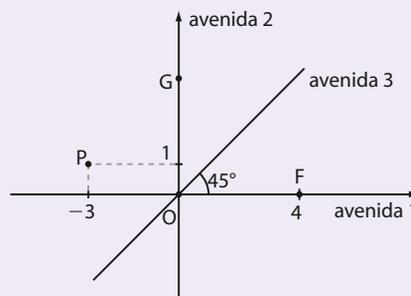
Nesse sistema de coordenadas, a unidade de medida de comprimento é o centímetro e a escala utilizada é de 1 : 2 000.

**a)** Obtenha as coordenadas de **G** nesse sistema cartesiano, sabendo que a distância real entre as casas de Fábio e Gabriel é de 100 metros.

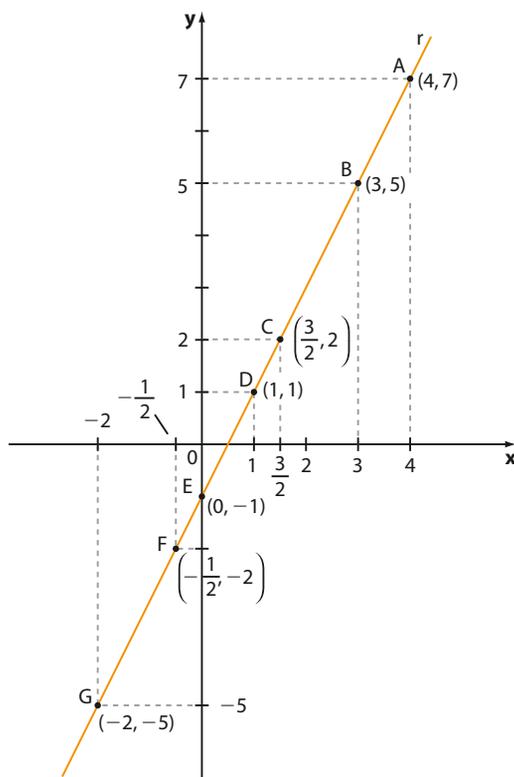
**b)** Determine as distâncias reais entre a casa de cada um dos irmãos e a piscina.

Considere $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ e $\sqrt{13} \simeq 3{,}6$.

**c)** Um grande amigo dos irmãos planeja comprar um terreno no condomínio e construir uma casa, na avenida 3, que diste igualmente da casa dos dois irmãos. Em que ponto desse plano seria representada a casa?

CAPÍTULO 2

# A reta

## Introdução

Observe abaixo a reta **r**, que passa por vários pontos cujas coordenadas são conhecidas.

Um ponto P(x, y) qualquer pertencerá a **r** se estiver alinhado a dois pontos quaisquer de **r**, por exemplo, **A** e **B**:

$$\textbf{A}, \textbf{B} \text{ e } \textbf{P} \text{ colineares} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 + 7x + 3y - 5x - 4y - 21 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad (1)$$

Se tivéssemos escolhido os pontos **E** e **F**, teríamos:

$$\textbf{E}, \textbf{F} \text{ e } \textbf{P} \text{ colineares} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{2}y + 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

As equações obtidas em (1) e (2) são equivalentes (observe que, se dividirmos os coeficientes de (1) por 2, obtemos (2)) e nos mostram a relação que **x** e **y** devem satisfazer a fim de que um ponto P(x, y) pertença a **r**.

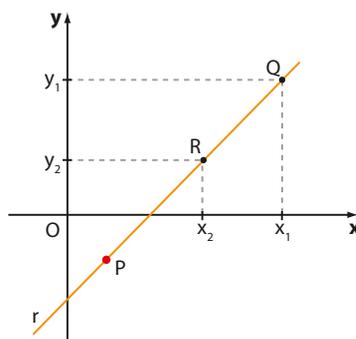
A reta **r** pode ser analiticamente descrita por uma dessas equações ou por qualquer outra equivalente, dependendo dos pontos escolhidos. Cada uma delas é chamada **equação geral de r**.

## Equação geral da reta

A toda reta **r** do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais, com **a** e **b** não nulos simultaneamente, e **x** e **y** são as coordenadas de um ponto P(x, y) genérico de **r**. Costuma-se escrever r: $ax + by + c = 0$.

Vamos demonstrar essa propriedade:

Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano, e $r = \overleftrightarrow{QR}$ é a reta determinada por **Q** e **R**.

Um ponto genérico de **r** é P(x, y), isto é, **P** é um ponto que "percorre" **r**.

Como **P**, **Q** e **R** estão alinhados, devemos ter D = 0, isto é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \quad (*)$$

Como $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{y_2}$ são números reais conhecidos, podemos fazer: $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$, e obtemos em (*): $ax + by + c = 0$, que é chamada equação geral de **r**.

**OBSERVAÇÃO**

Na demonstração acima podemos entender o porquê de **a** e **b** serem coeficientes não nulos simultaneamente:

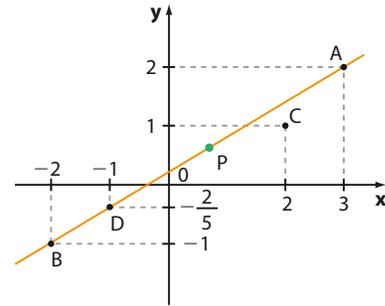
$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } a = 0,\ y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ \text{Se } b = 0,\ x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R$$

, o que é absurdo, pois consideramos que **Q** e **R** são pontos distintos.

Logo, não podemos ter **a** e **b** simultaneamente nulos.

**EXEMPLO 1**

Para obter uma equação geral da reta **r** que passa pelos pontos A(3, 2) e B(−2, −1), basta impor a condição de alinhamento para **A**, **B** e P(x, y), ponto genérico de **r**:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos:

$$-3 + 2x - 2y + x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 1 = 0$$

Assim, **r** é dada pela equação: $3x - 5y + 1 = 0$; e indica-se r: $3x - 5y + 1 = 0$.

O ponto C(2, 1) **não** pertence a **r**. De fato, suas coordenadas não satisfazem a equação de **r**:

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ (falso)}$$

Já o ponto $D\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$ pertence a **r**:

$$3 \cdot (-1) - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$$

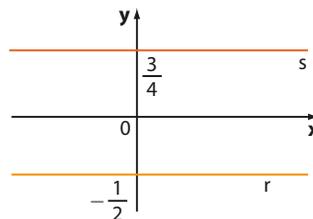
## Casos particulares

Se um dos coeficientes da equação geral de uma reta ($ax + by + c = 0$) é igual a zero, a reta apresenta uma propriedade especial. Temos três casos:

- $a = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma ordenada. Desse modo, se a equação não tem termo em **x**, a reta é paralela ao eixo **x**.

**EXEMPLO 2**

Observe as retas **r** e **s** representadas na figura abaixo.

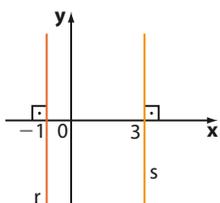
Escreva uma equação da reta que represente o eixo **x**.

$y = 0$; $3y = 0$; $-5y = 0$ etc.

$4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$ é uma equação da reta **s**.

$2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ é uma equação da reta **r**.

- $b = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, isto é, dois pontos distintos dessa reta possuem a mesma abscissa. Assim, se a equação não tem termo em **y**, a reta é paralela ao eixo **y**.

EXEMPLO 3

Observe as retas **r** e **s** representadas na figura abaixo.

$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ é uma equação da reta **r**.
$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é uma equação da reta **s**.

**PENSE NISTO:**

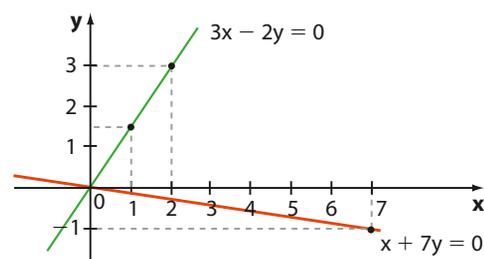
Escreva uma equação da reta que represente o eixo **y**.

- $c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0$

  Nesse caso, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, o par ordenado (0, 0) satisfaz a equação, ou seja, $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

  Desse modo, se a equação não tem termo independente, a reta passa pela origem.

EXEMPLO 4

As retas de equações $3x - 2y = 0$ e $x + 7y = 0$ passam pelo ponto (0, 0).

## Recíproca da propriedade

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta **r** do plano cartesiano, cujos pontos possuem coordenadas (x, y) que satisfazem essa equação.

**Demonstração:**

Sejam $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$ três pontos distintos cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + c = 0$. Vamos mostrar que **M**, **N** e **P** pertencem a uma mesma reta (admitimos $a \neq 0$).

Temos:

$$\begin{cases} ax_M + by_M + c = 0 \Rightarrow x_M = \dfrac{-by_M - c}{a} \\ ax_N + by_N + c = 0 \Rightarrow x_N = \dfrac{-by_N - c}{a} \\ ax_P + by_P + c = 0 \Rightarrow x_P = \dfrac{-by_P - c}{a} \end{cases}$$

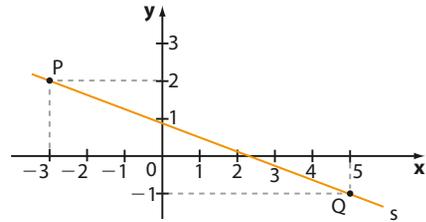
Calculamos o determinante: $\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-by_M - c}{a} & y_M & 1 \\ \dfrac{-by_N - c}{a} & y_N & 1 \\ \dfrac{-by_P - c}{a} & y_P & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus, chegamos à conclusão de que o determinante é nulo. Isso implica, como vimos, que os pontos **M**, **N** e **P** são colineares.

**EXEMPLO 5**

Vamos construir o gráfico da relação $3x + 8y - 7 = 0$.

Como vimos, trata-se da equação geral de uma reta. Para construí-la é suficiente conhecer dois de seus pontos:

- Se $x = -3$, temos $3 \cdot (-3) + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$; obtemos o ponto $P(-3, 2)$.
- Se $x = 5$, temos $3 \cdot 5 + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8y = -8 \Rightarrow y = -1$; obtemos o ponto $Q(5, -1)$.
  Construímos, assim, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ ao lado.

Vamos analisar a relação $3x + 8y - 7 = 0$ de outro modo: se isolarmos **y** em função de **x**, obtemos:

$$8y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$$

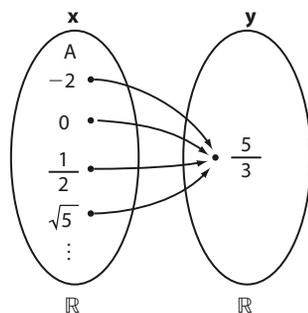
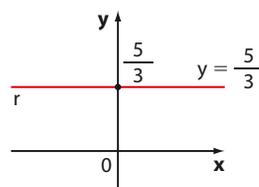
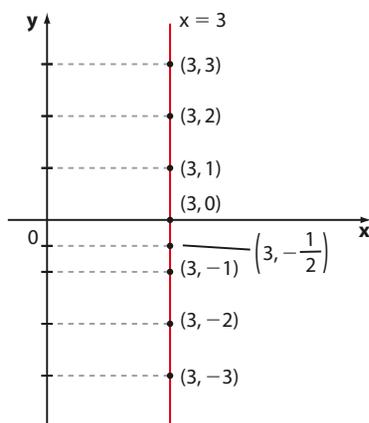
Como vimos no estudo de funções, a lei $y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$ representa uma **função afim** (isto é, uma função polinomial do 1º grau, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = ax + b$ (com **a** e **b** reais e $a \neq 0$), cujo gráfico é uma reta oblíqua ao eixo das abscissas.

Quando estudamos a função afim, vimos que o coeficiente **a** está ligado à inclinação da reta e o coeficiente **b** é igual à ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo **y**. Mais adiante, vamos estudar com mais detalhes essas relações.

Generalizando, podemos dizer que, se a equação geral de uma reta é $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então ela representa a lei da função afim: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

É importante analisarmos dois casos particulares:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, obtemos $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ e, nesse caso, temos a lei de uma **função constante**.

  Por exemplo, se a equação geral de uma reta **r** é $3y - 5 = 0$, então $y = \frac{5}{3}$ representa a lei da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que, a todo $x \in \mathbb{R}$ associa a imagem $\frac{5}{3}$. O gráfico dessa função é a reta **r** paralela ao eixo das abscissas:

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, obtemos $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ e, nesse caso, a equação geral $ax + c = 0$ **não** define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Por exemplo, a equação $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é representada, graficamente, por todos os pontos do plano cuja abscissa é igual a 3:

Podemos notar que $x = 3$ está associado a infinitos valores de **y** (isto é, possui infinitas imagens). Isso contraria a definição de função. Observe também que para cada $x \neq 3$ não há imagem correspondente.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Seja **r** a reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(-2, 5)$.
Determine:
**a)** uma equação geral de **r**.
**b)** os pontos de interseção de **r** com os eixos coordenados.
**c)** a lei da função afim cujo gráfico é **r**.

**Solução:**

**a)** Seja $P(x, y)$ um ponto genérico de **r**. Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 5 + 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow -3x - 3y + 9 = 0$$

ou, dividindo por 3 seus coeficientes, temos **r**: $-x - y + 3 = 0$. (*)

**b)** Sejam **M** e **N** os pontos de interseção de **r** com os eixos **x** e **y**, respectivamente.

- Ponto **M**: devemos determinar o ponto de **r** cuja ordenada é nula. A partir da equação da reta **r**, obtemos: $-x - 0 + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow M(3, 0)$; lembre que $x = 3$ é raiz da função.
- Ponto **N**: devemos determinar o ponto de **r** cuja abscissa é nula. Na equação da reta **r**, temos: $-0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow N(0, 3)$.

**c)** Basta isolar **y** em (*):

$$-x - y + 3 = 0 \Rightarrow -x + 3 = y$$

**2** Determine os pontos da reta $r: 5x - 12y = 0$ que distam três unidades da origem. Represente graficamente.

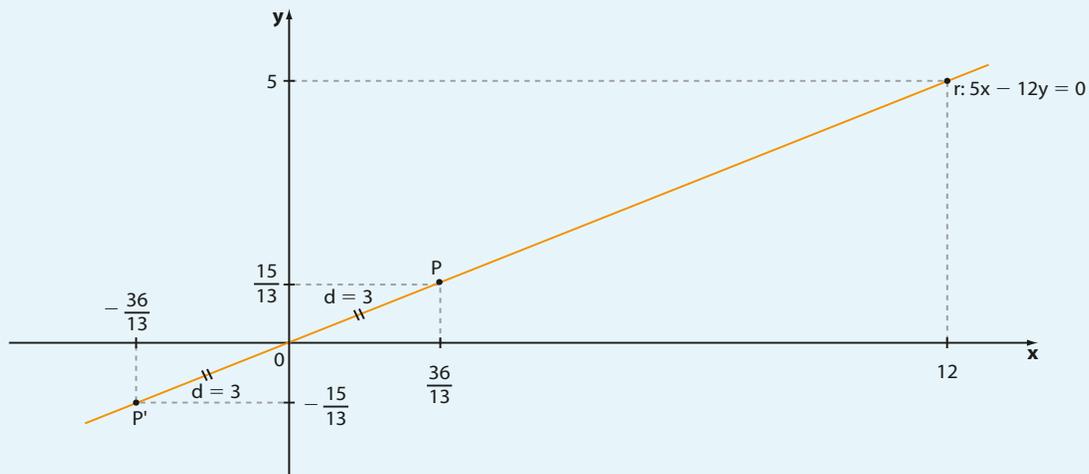
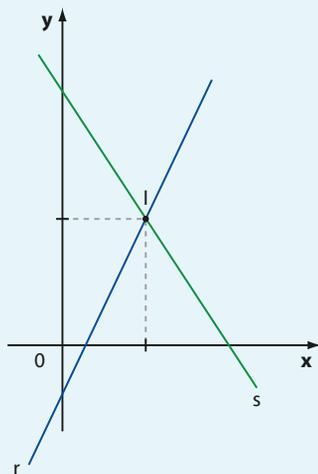
**Solução:**

Seja $P(x_P, y_P)$ o ponto de **r** procurado. Temos:

$$5x_P - 12y_P = 0 \Rightarrow x_P = \frac{12y_P}{5}$$

A distância de **P** à origem é 3:

$$\sqrt{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{12y_P}{5}\right)^2 + y_P^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{169y_P^2}{25}} = 3 \Rightarrow \frac{169y_P^2}{25} = 9 \Rightarrow y_P = \pm\frac{15}{13}$$

- Se $y_P = \frac{15}{13}$, então $x_P = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{13} = \frac{36}{13}$ e $P\left(\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
- Se $y_P = -\frac{15}{13}$, então $x_P = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{15}{13}\right) = -\frac{36}{13}$ e $P'\left(-\frac{36}{13}, -\frac{15}{13}\right)$.

**3** Determine o ponto **I** de interseção das retas r: $2x - y - 1 = 0$ e s: $4x + 3y - 17 = 0$ representadas abaixo:

**Solução:**

No estudo das funções, já aprendemos a determinar o ponto de interseção de duas retas: basta resolver o sistema formado pelas leis das funções que representam as retas. A solução do sistema corresponde às coordenadas de **I**:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3 \Rightarrow I(2, 3)$$

**OBSERVAÇÃO**

Em geral, dadas as retas r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, ao resolvermos o sistema formado por essas equações podem ocorrer três casos:

- O sistema possui uma única solução, isto é, é possível e determinado. As duas retas intersectam-se em um único ponto.
- O sistema possui infinitas soluções, isto é, é possível e indeterminado. As duas retas possuem infinitos pontos comuns, isto é, são coincidentes.
- O sistema não possui solução, isto é, é impossível. As duas retas são paralelas distintas.

**4** As retas suportes dos lados de um triângulo ABC são r: $x - 1 = 0$; s: $x + y - 6 = 0$ e t: $x - 3y - 9 = 0$. Obtenha os vértices desse triângulo.

**Solução:**

Cada vértice do triângulo é a interseção de duas retas suportes; é preciso, portanto, resolver três sistemas:

- $A = r \cap s$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1 \text{ e } y = 5.$$

Temos: A(1, 5)

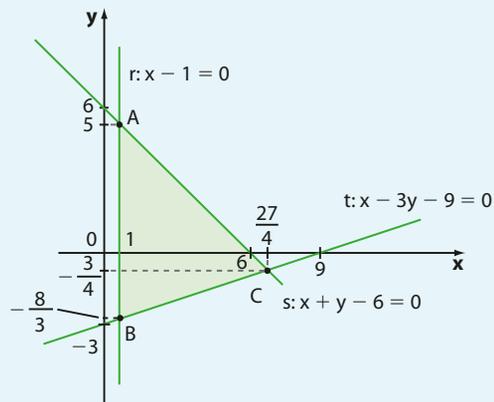
- $B = r \cap t$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -\frac{8}{3}$$

Temos: $B\left(1, -\frac{8}{3}\right)$

- $C = s \cap t$

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{27}{4} \text{ e } y = -\frac{3}{4}$$

Temos: $C\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

## EXERCÍCIOS

**1** Em cada caso, encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos:

**a)** (0, 2) e (2, 3)

**b)** (−1, 2) e (−2, 5)

**c)** (−1, −2) e $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

**d)** (0, −3) e (3, −2)

**2** Verifique por quais dos pontos A(−2, −5), B(−1, 4), $C\left(2, -\frac{1}{5}\right)$, D(3, 1) e $E\left(-1, \frac{19}{5}\right)$ passa a reta de equação $6x - 5y - 13 = 0$.

**3** Represente graficamente as retas de equação:

**a)** $x - y + 1 = 0$

**b)** $-3x - y + 2 = 0$

**c)** $3x - y = 0$

**d)** $x + 5 = 0$

**e)** $y + 4 = 0$

**f)** $200x - 500y + 300 = 0$

**4** Escreva em seu caderno a associação correta de cada reta à lei da função afim correspondente.

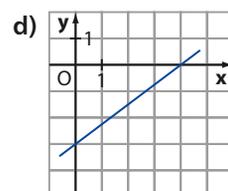
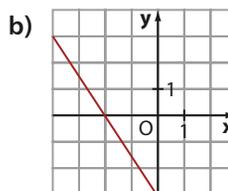
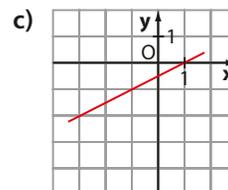
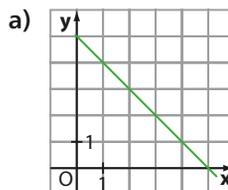
r: $y = \frac{x - 1}{2}$ s: $y = -\frac{3}{2}x - 3$

t: $y = -x + 5$ u: $y = \frac{3x}{4} - 3$

**a)**

**c)**

**b)**

**d)**

**5** A reta **s** passa por A(2, −1) e pelo ponto médio de $\overline{BC}$, sendo B(0, −1) e C(−3, 2).

**a)** Escreva uma equação geral de **s**.

**b)** A reta **s** passa pela origem? E pelo ponto (−7, 3)?

**6** Determine uma equação geral da reta vertical que passa por (2, 17).

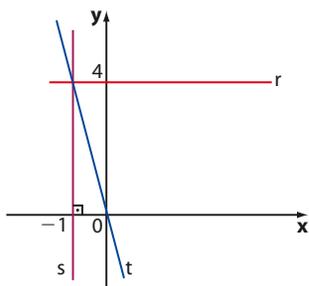
**7** Uma reta paralela ao eixo **x** passa pelo ponto (1, 5). Escreva uma equação geral dessa reta.

**8** **f** é uma função afim cujo gráfico é uma reta que passa pela origem e por (1, 5).

**a)** Qual é a lei que define **f**?

**b)** Calcule o valor de $f(-2) + f(0,2)$.

**c)** Escreva uma equação geral da reta que é o gráfico de **f**.

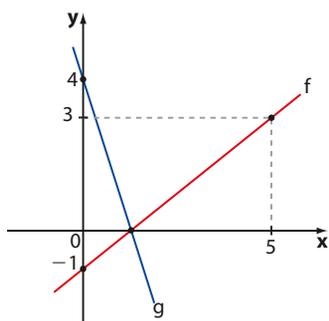
**9** Escreva uma equação geral para cada uma das retas **r**, **s** e **t** da figura.

**10** Uma vela de 8 cm foi acesa às 17 horas. Sabe-se que às 19 horas a altura da vela era 4,8 cm. Suponha linear a variação da altura (**h**) da vela (em cm) em função do tempo **x**, em horas, sendo $x = 0$ o instante em que ela foi acesa.

**a)** Obtenha a lei da função que relaciona **h** e **x**.

**b)** Determine em qual horário a vela foi inteiramente consumida.

**c)** Represente graficamente a função obtida no item *a*.

**d)** Obtenha uma equação geral da reta obtida no item *c*.

**11** Os gráficos de duas funções polinomiais do 1º grau, **f** e **g**, estão representados a seguir.

Qual é a lei que define a função **g**?

**12** Considere o triângulo de vértices A(0, 0), B(1, 3) e C(4, 0). Determine as equações gerais das retas suportes dos lados desse triângulo.

**13** Qual é o ponto da reta $x - y + 1 = 0$ que dista $\sqrt{13}$ do ponto (0, 2)?

**14** Obtenha o ponto de interseção entre as retas de equações:

**a)** $2x - y + 6 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$

**b)** $x + y - 2 = 0$ e $3x - y + 4 = 0$

**c)** $x - 2y = 0$ e $x + y - 1 = 0$

**15** As retas r: $x + 3 = 0$ e s: $y - 2 = 0$ intersectam-se em um ponto **P**.

**a)** Determine as coordenadas de **P**.

**b)** Qual é a distância de **P** à origem?

**16** Qual é, em cada caso, a posição relativa das retas **r** e **s**?

**a)** r: $x - 3y + 2 = 0$; s: $2x - y = 0$

**b)** r: $x + y - 3 = 0$; s: $-2x - 2y + 6 = 0$

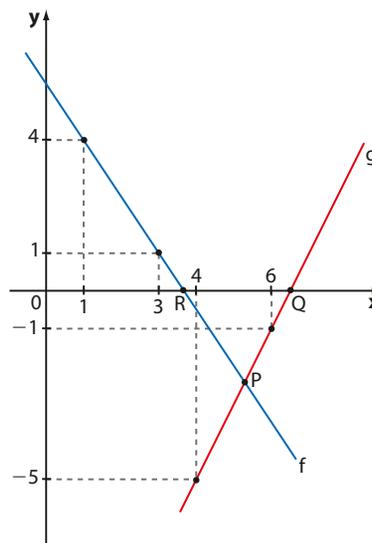
**c)** r: $-2x + y - 3 = 0$; s: $-x + \frac{y}{2} + 1 = 0$

**d)** r: $x - 1 = 0$; s: $x + 2 = 0$

**17** As retas cujas equações são $2x - y - k = 0$ e $2x + y - k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, intersectam-se no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Qual é o valor de **k**?

**18** Verifique se as retas de equações $2x - y - 3 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$ e $4x - y - 5 = 0$ intersectam-se no mesmo ponto. Em caso afirmativo, quais são as coordenadas desse ponto?

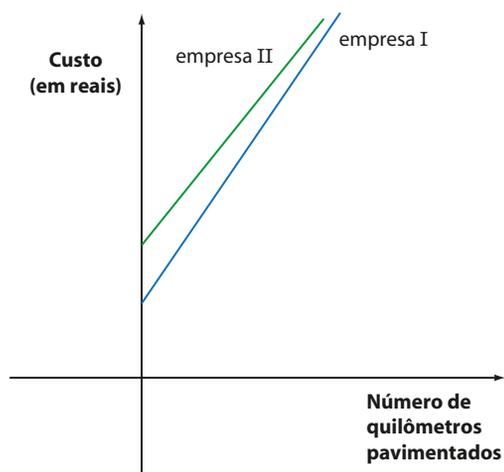
**19** Em que condições as retas de equações $px - y + 3p = 0$ e $2x - y + 6 = 0$ têm mais de um ponto comum?

**20** As representações gráficas de duas funções do 1º grau, **f** e **g**, são dadas a seguir:

**a)** Obtenha a lei que define cada uma dessas funções.

**b)** Qual é o valor de $f(2) + g(1)$?

**c)** Determine as coordenadas de **P**.

**d)** Obtenha a área do triângulo PQR.

**21** Em uma licitação para pavimentação de uma estrada, duas empresas ofereceram condições similares (embora com valores diferentes). Cada uma delas cobrava um valor fixo e um adicional por quilômetro de estrada pavimentada. A relação entre o custo da obra e o número de quilômetros a serem pavimentados pode ser esboçada como no gráfico a seguir:

As retas suporte das semirretas mostradas no gráfico têm por equações gerais:

$$5\,000x - y + 400\,000 = 0 \text{ e}$$

$$6\,000x - y + 240\,000 = 0$$

**a)** Associe cada reta à empresa correspondente.

**b)** Qual é o valor fixo cobrado por cada uma das empresas?

**c)** Qual é o valor cobrado por quilômetro pavimentado por cada empresa?

**d)** Qual é o custo total da pavimentação de 100 km em cada uma das empresas?

**e)** Para quantos quilômetros de pavimentação é indiferente contratar qualquer uma das empresas?

**22** As retas r: $2x - y - 3 = 0$, s: $x + 2y - 3 = 0$ e t: $2x + y - 5 = 0$ são suportes dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo.

**23** As retas de equações $x - 3y - 2 = 0$ e $x - y - 2p = 0$, com $p \in \mathbb{R}$, intersectam-se no ponto de coordenadas $(p + 1, p - 1)$. Determine o valor de **p** e as coordenadas do ponto de interseção dessas retas.

**24** Os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$, $C(4, -1)$ e $D(-2, -2)$ são vértices de um quadrilátero. Determine as coordenadas do ponto de encontro de suas diagonais.

**25** As equações das três retas suportes de um triângulo são:

$$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0 \text{ e } x + y - 1 = 0$$

**a)** Classifique esse triângulo quanto aos lados e ângulos.

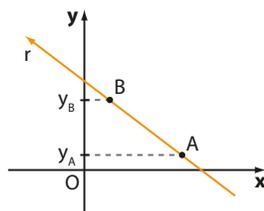
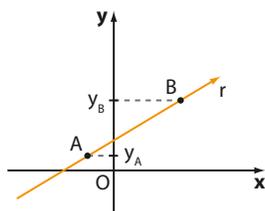
**b)** Determine o perímetro e a área do triângulo.

**26** Qual deve ser o vértice **C** de um triângulo ABC para que sejam verificadas as condições abaixo? Qual o perímetro desse triângulo?

- O vértice **A** pertence ao eixo **x**.
- O vértice **B** pertence ao eixo **y**.
- A reta $\overline{BC}$ tem equação $x - y = 0$.
- A reta $\overline{AC}$ tem equação $x + 2y - 3 = 0$.

## Inclinação de uma reta

Seja **r** uma reta do plano cartesiano, não paralela ao eixo **x**. Fixemos em **r** dois pontos distintos **A** e **B**.

Vamos convencionar que o **sentido positivo de r** é aquele em que "se parte do ponto de menor ordenada e se chega ao ponto de maior ordenada". Observe os dois casos seguintes: o sentido positivo de **r** está indicado pela seta.

**OBSERVAÇÃO**

Quando a reta **r** for paralela ao eixo **x**, dados **A** e **B** distintos, temos que $y_A = y_B$. Nesse caso, o sentido positivo de **r** é o sentido positivo do eixo **x**.

Seja I o ponto de interseção de **r** com o eixo **x**. O ângulo que a reta **r** forma com o eixo **x** é o menor ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{I_x}$ e $\overrightarrow{I_r}$. A semirreta $\overrightarrow{I_x}$ tem origem em I e sentido coincidente com o do eixo das abscissas. A semirreta $\overrightarrow{I_r}$ tem origem em I e sentido coincidente com o sentido positivo de **r**.

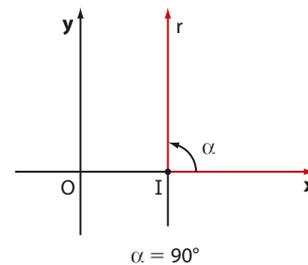
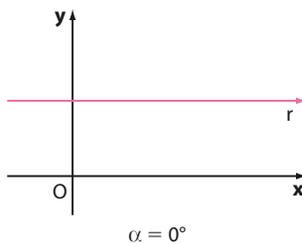
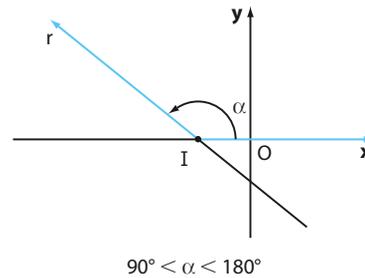
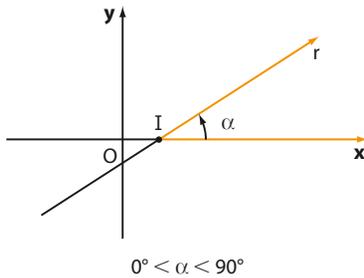
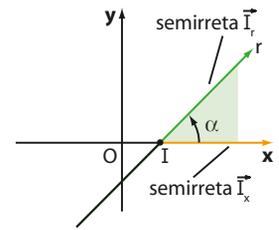
Esse ângulo denomina-se **inclinação da reta**. Vamos indicar a medida desse ângulo por **α**.

Observe os casos possíveis:

$0° < \alpha < 90°$

$90° < \alpha < 180°$

$\alpha = 0°$

$\alpha = 90°$

## Coeficiente angular

**Coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta **r** é o número real **m** definido por:

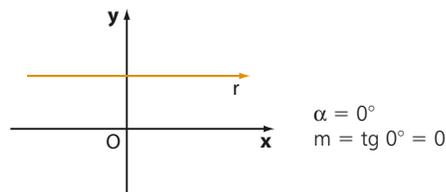
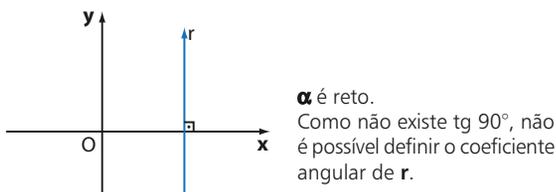
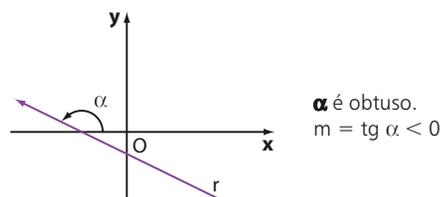
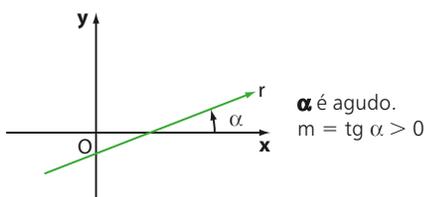
$$m = \text{tg } \alpha$$

sendo α a medida do ângulo de inclinação de **r**. Temos as seguintes possibilidades:

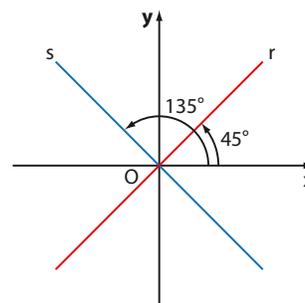
**α** é agudo.
$m = \text{tg } \alpha > 0$

**α** é obtuso.
$m = \text{tg } \alpha < 0$

**α** é reto.
Como não existe tg 90°, não é possível definir o coeficiente angular de **r**.

$\alpha = 0°$
$m = \text{tg } 0° = 0$

EXEMPLO 6

A reta r: $x - y = 0$, correspondente à bissetriz dos quadrantes ímpares, tem declividade $m = \text{tg } 45° = 1$; já a reta s: $x + y = 0$, correspondente à bissetriz dos quadrantes pares, tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$.

$$m_r = \text{tg } 45° = 1$$
$$m_s = \text{tg } 135° = -1$$

## Cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de dois de seus pontos

Seja **r** a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vamos considerar dois casos:

- $0 < \alpha < 90°$

No triângulo ACB, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de **r** é:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- $90° < \alpha < 180°$

No triângulo ACB, temos:

$$\text{tg } (180° - \alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

Da trigonometria, sabemos que $\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$. Daí, temos:

$$-\text{tg } \alpha = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de **r** é:

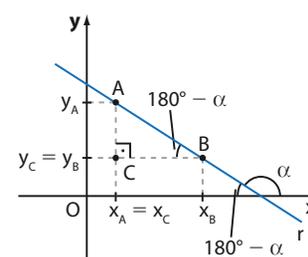
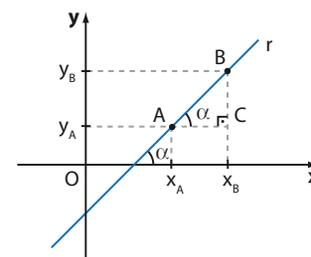
$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Em qualquer um dos casos, podemos calcular o coeficiente angular da reta que passa por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ por meio da relação:

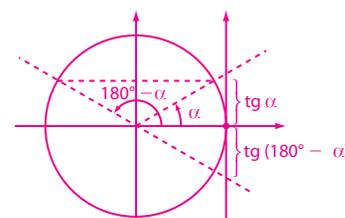
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Como $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, podemos simplesmente escrever:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que $\Delta y$ é a diferença entre as ordenadas de **A** e **B**, e $\Delta x$, a diferença entre as abscissas de **A** e **B**, ambas calculadas no mesmo "sentido", como mostra o exemplo seguinte.

**PENSE NISTO:**

$\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Lembrando o conceito de tangente na circunferência trigonométrica, temos $\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$.

**EXEMPLO 7**

Vamos calcular o coeficiente angular da reta que passa por A(−5, 4) e B(3, 2).

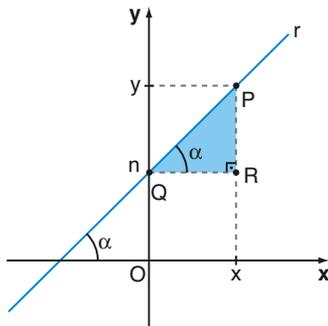
Temos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{-5-3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \text{ (Calculamos a diferença de "}\textbf{A}\text{ para }\textbf{B}\text{".)}$$

Observe que poderíamos também fazer:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-4}{3-(-5)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \text{ (Calculamos a diferença de "}\textbf{B}\text{ para }\textbf{A}\text{".)}$$

## Equação reduzida de uma reta

Sejam **r** a reta cuja medida do ângulo de inclinação é α e P(x, y) um ponto genérico de **r**. A reta **r** intersecta o eixo das ordenadas em um ponto **Q** cuja abscissa é nula, isto é, Q(0, n).

Como vimos, o coeficiente angular da reta **r** que passa por Q(0, n) e P(x, y) é dado por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-n}{x-0}$, isto é, $m = \frac{y-n}{x} \Rightarrow y = mx + n$

**PENSE NISTO:**

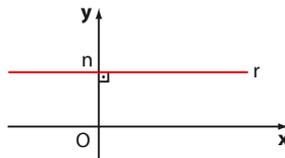
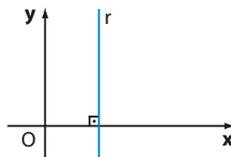
Qual seria a outra forma de calcular o coeficiente angular da reta **r**?

$\text{tg } \alpha = \frac{PR}{QR} = \frac{y-n}{x-0} = \frac{y-n}{x}$

Essa última expressão é chamada **forma reduzida da equação da reta r**, ou simplesmente **equação reduzida da reta r**, na qual $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$ e:

- **m** é o **coeficiente angular** de **r**;
- **n** é a ordenada do ponto em que **r** corta o eixo das ordenadas e é chamado **coeficiente linear** de **r**;
- **x** e **y** são as coordenadas de um ponto qualquer da reta **r**.

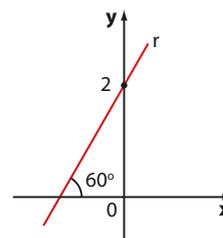
**OBSERVAÇÕES**

- Se a reta **r** é horizontal, ela forma ângulo nulo com o eixo das abscissas; assim, m = tg 0° = 0 e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente y = n.
- Se a reta **r** é vertical, ela forma ângulo reto com o eixo das abscissas; como não existe tg 90°, não se define o coeficiente angular de **r** e, assim, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.

**EXEMPLO 8**

Na figura, a medida do ângulo de inclinação de **r** é 60°, e **r** intersecta o eixo das ordenadas em (0, 2).

Podemos concluir que:

$$m = \text{tg } 60° = \sqrt{3} \text{ e } n = 2$$

Assim, r: $y = \sqrt{3}x + 2$ é a forma reduzida da equação da reta **r**.

**EXEMPLO 9**

A reta **s** passa pelos pontos A(1, 2) e B(−2, 5).

Vamos determinar a equação reduzida de **s**.

O coeficiente angular de **s** pode ser obtido fazendo-se:

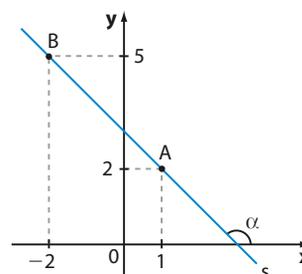
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{-2 - 1} = \frac{3}{-3} = -1$$

A equação reduzida de **s** é escrita provisoriamente como:

$$s: y = -1 \cdot x + n$$

Como não sabemos qual é o ponto em que **s** intersecta o eixo **y**, podemos substituir **x** e **y** pelas coordenadas de um ponto que pertença a **r** (por exemplo, o ponto **A**), a fim de determinar o valor de **n**:

$$2 = -1 \cdot 1 + n \Rightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3$$

Assim, a equação reduzida de **s** é s: $y = -x + 3$.

**PENSE NISTO:**

Por que $\alpha = 135°$?

Da trigonometria, sabemos que tg 135° = −tg 45° = −1.
Como $m_s = -1$, segue que $\alpha = 135°$.

**OBSERVAÇÃO**

Se uma reta não é vertical, é possível transformar sua equação geral em reduzida e vice-versa:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Nesse caso, o coeficiente angular dessa reta é $m = -\frac{a}{b}$ e seu coeficiente linear é $n = -\frac{c}{b}$.

Inversamente, se uma reta é dada em sua forma reduzida, basta agrupar todos os seus termos em um único membro:

$$y = mx + n \Rightarrow mx - y + n = 0 \text{ é a equação geral dessa reta.}$$

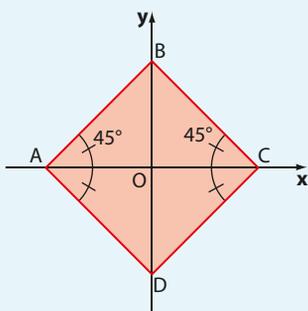
**EXEMPLO 10**

Se a reta **r** é dada por $3x + 6y + 7 = 0$, isolando **y**, obtemos:

$$6y = -3x - 7 \text{ e } y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{6}, \text{ que é sua forma reduzida.}$$

Inversamente, dada a equação de uma reta **s** em sua forma reduzida $y = 3x - 5$, colocando todos os termos em um único membro, obtemos $3x - y - 5 = 0$, que é sua forma geral.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**5** Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede 2. Escreva as equações reduzidas das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

**Solução:**

Se o lado do quadrado mede 2, sua diagonal $\overline{AC}$ (ou $\overline{BD}$) mede $2\sqrt{2}$, e as coordenadas de seus vértices são: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$ e $D(0, -\sqrt{2})$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ possui declividade dada por $m = \text{tg } 45° = 1$, e seu coeficiente linear é $\sqrt{2}$; então a equação reduzida de $\overleftrightarrow{AB}$ é $y = x + \sqrt{2}$.

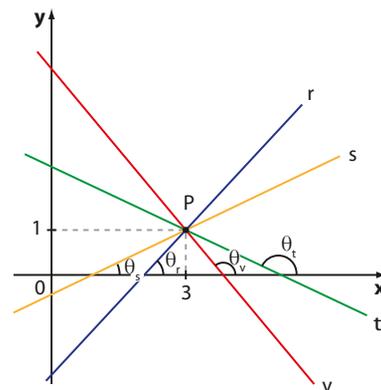
A reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem declividade $m = \text{tg } 135° = -1$, e seu coeficiente linear também é $\sqrt{2}$; então a equação reduzida de $\overleftrightarrow{BC}$ é: $y = -x + \sqrt{2}$.

### EXEMPLO 11

Como sabemos, existem infinitas retas que passam por um determinado ponto. Na figura ao lado, **r**, **s**, **t** e **v** são alguns exemplos de retas que passam por P(3, 1).

Cada uma delas define uma direção, dada pelo seu ângulo de inclinação.

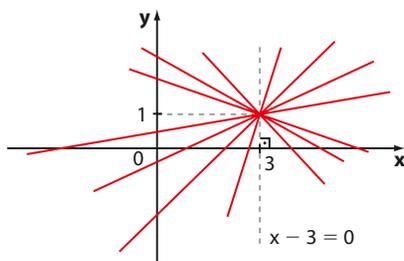
- Tomemos um ponto qualquer (x, y) de **r**. Como **r** passa também por (3, 1), temos $m_r = \dfrac{y-1}{x-3} \Rightarrow y - 1 = m_r \cdot (x - 3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m_r}$.
- Tomemos agora um ponto genérico de **s**, de coordenadas (x, y). Como **s** passa também por (3, 1), temos $m_s = \dfrac{y-1}{x-3} \Rightarrow$ $\Rightarrow y - 1 = m_s \cdot (x - 3)$; essa é a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade $\mathbf{m_s}$.

⋮

Enfim, se **m** varia em $\mathbb{R}$, a equação $y - 1 = m \cdot (x - 3)$ representa, para cada valor de **m**, a equação da reta que passa por (3, 1) e tem declividade igual a **m**, isto é, a medida do ângulo de inclinação $\alpha$ é tal que $\text{tg } \alpha = m$.

As infinitas retas que podem ser obtidas (à medida que **m** varia em $\mathbb{R}$) formam o feixe de retas concorrentes em **P**, além da reta vertical $x - 3 = 0$, para a qual não se define o coeficiente angular.

Para m = 0;
Se uma reta **v** é horizontal (paralela ao eixo das abscissas), a medida do ângulo de inclinação é $\theta_v = 0°$ e $m = \text{tg } 0° = 0$.
Na equação do feixe, se m = 0, temos:
$y - 1 = 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 1$; essa é a equação da reta horizontal que passa por (3, 1).

**PENSE NISTO:**

Para que valor de **m** obtemos a reta horizontal do feixe que passa por (3, 1)?

Assim, a equação do feixe de retas que passam por (3, 1) é:

$$y - 1 = m \cdot (x - 3) \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

**EXEMPLO 12**

Para obter uma equação geral da reta que possui coeficiente angular igual a $-2$ e passa por $(1, 3)$, podemos escrever a equação do feixe de retas por $(1, 3)$:

$$y - 3 = m \cdot (x - 1);\ m \in \mathbb{R}$$

Como $m = -2$, segue a equação:

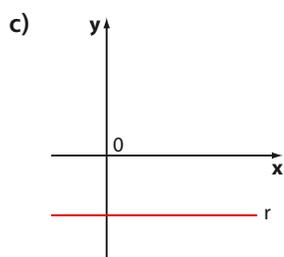
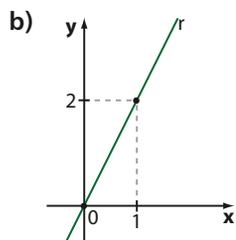
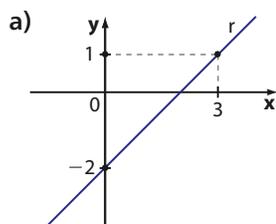
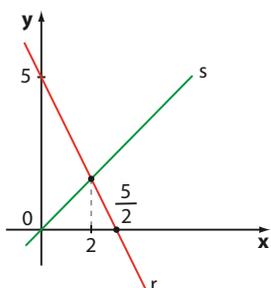
$$y - 3 = -2 \cdot (x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

## EXERCÍCIOS

**27** Determine, em cada caso, a medida do ângulo de inclinação de **r**.

**a)**

**b)**

**c)**

**28** As retas **r** e **s** intersectam-se em um ponto de abscissa 2.

**a)** Determine o coeficiente angular de **s**.

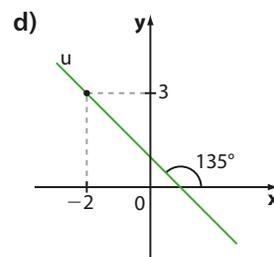
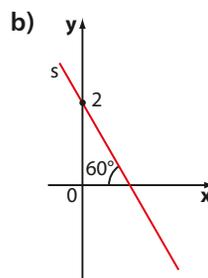
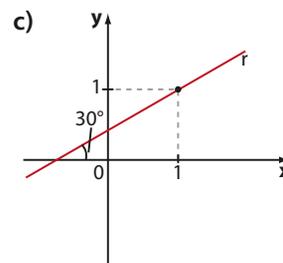
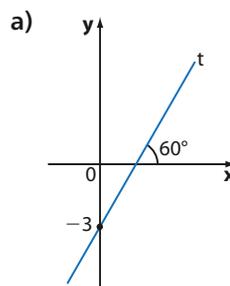
**b)** Escreva a equação de **s** em suas formas reduzida e geral.

**29** Escreva a equação reduzida de cada reta representada abaixo.

**a)**

**c)**

**b)**

**d)**

**30** Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

**a)** $(1,\ 2)$ e $(2,\ 5)$

**b)** $(-1,\ 2)$ e $(-2,\ 1)$

**c)** $(0,\ 3)$ e $(-1,\ 4)$

**d)** $(-3,\ -2)$ e $(2,\ -3)$

**31** Em cada caso, determine, se existir, o coeficiente angular de **r**:

**a)** $r\colon x - 2y + 6 = 0$

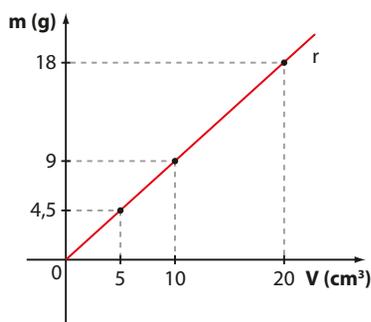
**b)** $r\colon y = -\dfrac{x}{3} + 5$

**c)** **r** passa por $A(-3,\ 0)$ e $B(-5,\ 4)$.

**d)** **r** passa por $C(1,\ 5)$ e $D(1,\ -4)$.

**e)** **r** passa por $E(-2,\ 5)$ e $F(3,\ 5)$.

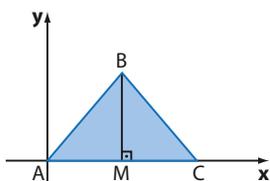
**f)** **r** passa pela origem e pelo ponto médio de $\overline{GH}$, sendo $G(-1,\ 1)$ e $H(3,\ 5)$.

**32** O gráfico abaixo mostra a relação entre a massa (**m**) e o volume (**V**) de certo óleo.

**a)** Qual é o coeficiente angular de **r**?

**b)** Qual é a lei da função que relaciona **m** e **V**?

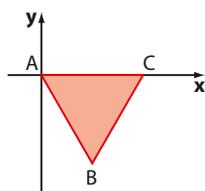
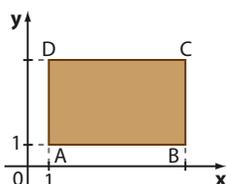
**c)** Qual é a densidade do óleo?

**33** O ponto **P** dista 2 do eixo das ordenadas e 5 do eixo das abscissas. Qual é a equação reduzida da reta que passa por **P** e pela origem dos eixos coordenados?

**34** Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. Sabendo que AB = 5 e AC = 6, obtenha:

**a)** a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$;

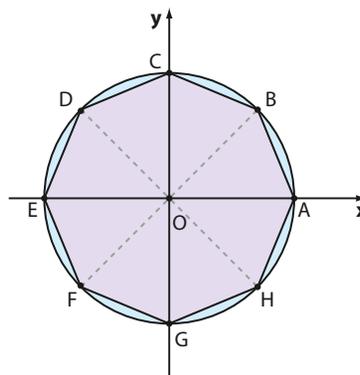
**b)** a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{BC}$;

**c)** a equação geral da reta $\overleftrightarrow{BM}$.

**35** Na figura, o triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 3. Determine as equações reduzidas das retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

**36** Na figura, ABCD é um retângulo. O lado $\overline{CD}$ mede 6 e a diagonal $\overline{BD}$ mede $4\sqrt{3}$.

Determine:

**a)** o coeficiente angular da reta que passa por **A** e **C**;

**b)** a equação reduzida da reta que passa por **B** e **D**.

**37** Na figura, o octógono regular ABCDEFGH está inscrito em um círculo cujo raio mede 2.

Determine:

**a)** as coordenadas dos vértices do octógono;

**b)** a equação geral da reta $\overleftrightarrow{BF}$;

**c)** o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{DH}$;

**d)** o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AH}$.

**38** Uma reta passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$. Escreva sua equação geral.

**39** Em cada caso, determine a equação reduzida da reta que passa por **P** e cujo ângulo de inclinação em relação ao eixo das abscissas mede $\alpha$.

**a)** $P(3, -1)$ e $\alpha = 45°$

**b)** $P(-3, -2)$ e $\alpha = 135°$

**c)** $P(0, 3)$ e $\alpha = 60°$

**d)** $P\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}\right)$ e $\alpha = 0°$

**40** Escreva a equação do feixe de retas concorrentes no ponto $(3, 2)$.

**41** Escreva a equação do feixe de retas que passam por $P(-1, 3)$ e, a seguir, obtenha uma equação geral da reta desse feixe que:

**a)** passa também por $(2, -1)$;

**b)** possui declividade igual a $-2$;

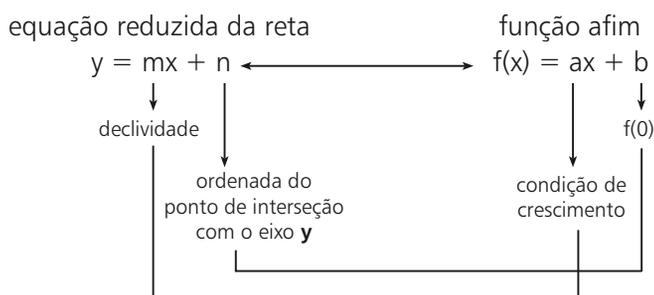
**c)** passa pela origem;

**d)** forma ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo das abscissas.

## Função afim e a equação reduzida da reta

Já vimos que a equação de uma reta **oblíqua** ao eixo das abscissas (isto é, não paralela a qualquer um dos eixos coordenados), expressa na forma geral ou reduzida, pode ser associada à lei de uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais e $a \neq 0$.

Se a reta está escrita em sua forma reduzida, é possível fazer uma associação imediata de seus coeficientes aos coeficientes da lei de uma função afim.

Vamos comparar a função afim à equação da reta:

representação gráfica da equação da reta **r**

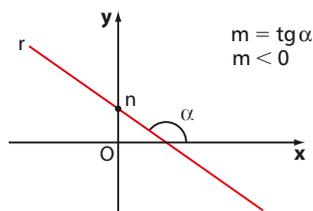
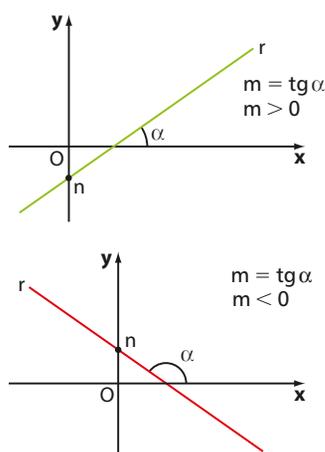
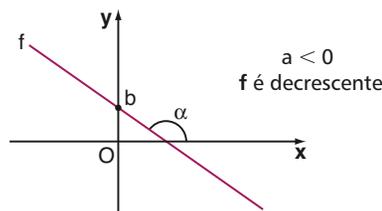
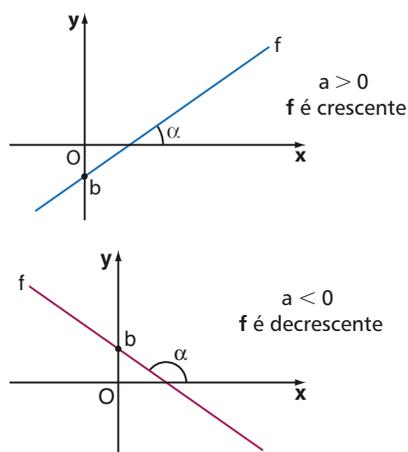
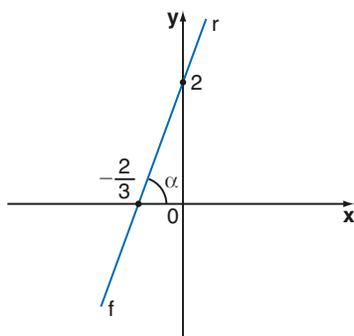



gráfico da função **f**

**OBSERVAÇÃO**

É importante lembrar mais uma vez que, se uma reta é vertical (paralela ao eixo das ordenadas), ela **não** pode ser a representação gráfica de uma função e, se a reta é horizontal (paralela ao eixo das abscissas), ela pode ser associada a uma **função constante**.

**EXEMPLO 13**

A reta de equação reduzida $r: y = 3x + 2$ e a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ possuem a mesma representação gráfica:

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 (coeficiente linear) |
| $-\frac{2}{3}$ (raiz) | 0 |

À medida que **x** varia em $\mathbb{R}$, obtêm-se, em correspondência, os demais valores de **y** (ou os demais valores de $f(x)$). Nesse caso, a declividade **m** da reta é positiva ($0 < \alpha < 90°$) e a função afim é crescente ($a > 0$).

## EXERCÍCIOS

**42** Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(-2) = 3$ e $f(1) = -3$.

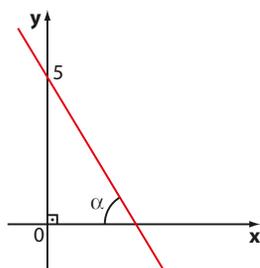
**a)** Represente graficamente essa função.

**b)** Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta obtida.

**c)** Determine a raiz de **f**.

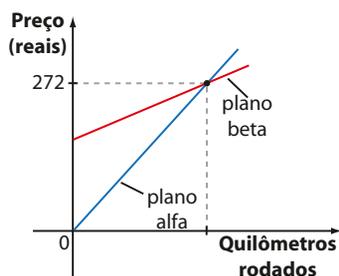
**43** Um vendedor possui salário fixo de R$ 900,00 mais comissão de 4% sobre o total de vendas (em reais) do mês. Represente graficamente o salário **y** do vendedor em função do total de vendas **x** realizadas no mês. Qual é a equação geral da reta obtida?

**44** A equação reduzida de uma reta é $y = -3x + 7$. Essa reta é a representação gráfica de uma função afim **f**. Qual é o valor de $f(2)$ e de $f(-1)$?

**45** A figura representa o gráfico de uma função afim **f**.

Sabendo que tg $\alpha = 3$, determine a lei que define **f**.

**46** Uma locadora de automóveis oferece a seus clientes dois planos: o plano alfa não cobra diária e o valor do quilômetro rodado é R$ 3,20; o plano beta cobra diária de **d** reais e um adicional de R$ 1,40 por quilômetro rodado.

No gráfico seguinte, é possível comparar o preço dos dois planos:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Determine:

**a)** o valor de **d**;

**b)** a abscissa do ponto de interseção das retas;

**c)** as equações gerais das duas retas suporte das semirretas representadas;

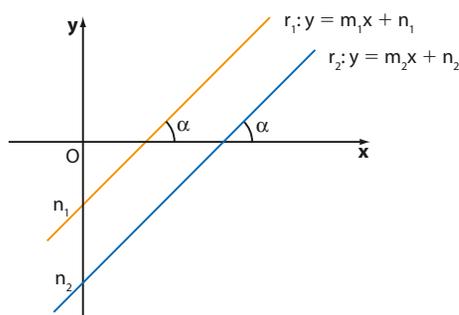
**d)** a declividade de cada uma das retas.

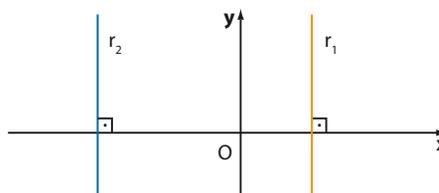
## Paralelismo

Duas retas paralelas distintas formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes; assim, se ambas não são verticais, seus coeficientes angulares são iguais.

Observe a figura ao lado, que mostra duas retas paralelas não verticais.

Temos:

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha = m_1 = m_2$$

No caso de $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ serem verticais, evidentemente $r_1 // r_2$, embora não existam $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$.

Veja a figura ao lado.

**EXEMPLO 14**

Para determinar a posição relativa entre as retas **r** e **s**, de equações r: y = 3x − 2 e s: 6x − 2y + 5 = 0, precisamos comparar suas declividades. Vamos usar a forma reduzida de cada uma delas.

$$r: y = 3x - 2 \Rightarrow m_r = 3$$
$$s: 6x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = 6x + 5 \Rightarrow y = 3x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_s = 3$$

Portanto, $m_r = m_s = 3 \Rightarrow$ **r** e **s** são paralelas.

Como $n_r = -2 \neq \frac{5}{2} = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.

**EXEMPLO 15**

Observe as equações gerais das retas **r** e **s**:

$$r: 3x - y + 7 = 0$$
$$s: 6x - 2y + 14 = 0$$

Podemos afirmar que **r** e **s** são (paralelas) coincidentes.

$m_r = -\frac{a}{b} = 3$; $m_s = -\frac{a}{b} = \frac{-6}{-2} = 3$. Logo, $m_r = m_s$.

$n_r = -\frac{c}{b} = \frac{-7}{-1} = 7$; $n_s = -\frac{c}{b} = \frac{-14}{-2} = 7$. Assim, $n_r = n_s$.

Veja que os coeficientes correspondentes das equações gerais de **r** e **s** são proporcionais:

$$\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{7}{14}$$

Os exemplos 14 e 15 mostram que, quando queremos saber se duas retas de um plano são ou não paralelas, comparando-se seus coeficientes angulares, é possível usar tanto a equação reduzida como a geral.

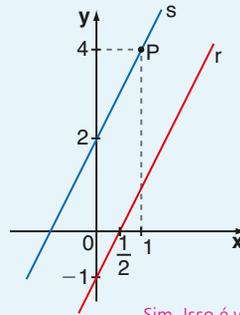
## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**6** Seja a reta r: $y = 2x - 1$. Obtenha a equação de uma reta **s** paralela à reta **r** que passa pelo ponto P(1, 4).

**Solução:**

Inicialmente, observe que $P \notin r$, pois: $4 = 2 \cdot 1 - 1$ (Falsa)

Para que s // r, é preciso que $m_s = m_r$. Como $m_r = 2$, devemos ter $m_s = 2$ e, provisoriamente, temos s: $y = 2x + n$.

Como $P \in s$, temos $4 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 2$ e, finalmente, s: $y = 2x + 2$ é a equação da reta paralela a **r** traçada por **P**.

**PENSE NISTO:**

A equação de uma reta qualquer paralela a **r** é $2x - y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$?

Sim. Isso é verdade porque a equação $2x - y + k = 0$ representa uma reta com declividade $m = 2$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Observe que $y = 2x + k$.

**7** Para que valores reais de **k** as retas r: $3x - 2y + 5 = 0$ e s: $kx - y + 1 = 0$ são concorrentes?

**Solução:**

A condição $m_r = m_s$ garante o paralelismo entre as retas **r** e **s**. Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.

$$r: 3x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

$$s: kx - y + 1 = 0 \Rightarrow y = kx + 1 \Rightarrow m_s = k$$

Assim, para que **r** e **s** sejam concorrentes, devemos ter $k \neq \frac{3}{2}$.

**8** Os pontos **M**, **N**, **P** e **Q** são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Sendo M(3, 5), N(1, 2) e P(5, 1), determine as equações das retas suportes dos lados desse paralelogramo.

**Solução:**

Observe inicialmente que:

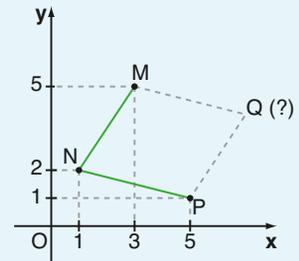
- o coeficiente angular da reta que passa por **M** e **N** é $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{3 - 1} = \frac{3}{2}$
- o coeficiente angular da reta que passa por **N** e **P** é $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{5 - 1} = -\frac{1}{4}$

Como $m_1 \neq m_2$, então $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são concorrentes (veja a figura).

- $\overleftrightarrow{NP}$: $\begin{cases} m_2 = -\frac{1}{4} \\ N(1, 2) \in \overleftrightarrow{NP} \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{NP}: y - 2 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) \Rightarrow \overleftrightarrow{NP}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$
- $\overleftrightarrow{MQ}$: Como $\overleftrightarrow{NP} // \overleftrightarrow{MQ}$, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{MQ}$ é $-\frac{1}{4}$.

Como $M(3, 5) \in \overleftrightarrow{MQ}$, obtemos $\overleftrightarrow{MQ}: y - 5 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \Rightarrow \overleftrightarrow{MQ}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

- $\overleftrightarrow{NM}$: $\begin{cases} m_1 = \frac{3}{2} \\ N(1, 2) \in \overleftrightarrow{NM} \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{NM}: y - 2 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
- $\overleftrightarrow{PQ}$: Como $\overleftrightarrow{NM} // \overleftrightarrow{PQ}$, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{PQ}$ é $\frac{3}{2}$.

Como $P(5, 1) \in \overleftrightarrow{PQ}$, temos $\overleftrightarrow{PQ}: y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 5) \Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}: y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

**PENSE NISTO:**

Há mais de uma maneira de encontrar as coordenadas de **Q**. Proponha uma!

Uma das maneiras seria procurar a interseção das retas $\overleftrightarrow{MQ}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$ e $\overleftrightarrow{PQ}: y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$.

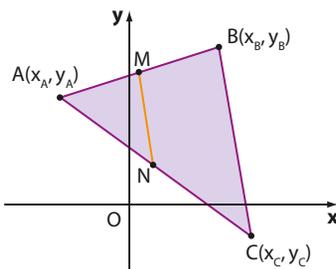
Outra é lembrar que as diagonais do paralelogramo intersectam-se ao meio: primeiro determina-se **R**, ponto médio de $\overline{MP}$, e, em seguida, as coordenadas de **Q**, pois **R** também é ponto médio de $\overline{NQ}$.
Por qualquer um dos processos, encontra-se Q(7, 4).

## Base média de um triângulo

Vamos mostrar, por meio da Geometria Analítica, uma importante propriedade da Geometria Plana.

### Teorema da base média de um triângulo

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Seja o triângulo ABC representado abaixo, com $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Sejam **M** e **N**, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Vamos mostrar que $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

1ª parte: $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$

- O coeficiente angular da reta suporte do lado $\overline{BC}$ pode ser calculado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \quad (1)$$

- Como **M** é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. Analogamente, como **N** é ponto médio de $\overline{AC}$, temos: $x_N = \frac{x_A + x_C}{2}$ e $y_N = \frac{y_A + y_C}{2}$.

O coeficiente angular da reta que passa por **M** e **N** é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)}{\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)} = \frac{\frac{y_B - y_C}{2}}{\frac{x_B - x_C}{2}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \quad (2)$$

Como (1) = (2), concluímos que as retas suporte dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelas.

2ª parte: $MN = \frac{BC}{2}$

- $BC = d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$
- $MN = d_{MN} = \sqrt{\left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) - \left(\frac{y_A + y_C}{2}\right)\right]^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_C}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}{2} = \frac{d_{BC}}{2}$$

Assim, $MN = \frac{BC}{2}$.

## EXERCÍCIOS

**47** Determine a posição relativa entre as retas de equações:

**a)** $y = 4x - 1$ e $8x - 2y + 1 = 0$

**b)** $5x - y + 6 = 0$ e $6x + y - 5 = 0$

**c)** $y = -\frac{3x}{2} + 2$ e $6x + 4y - 8 = 0$

**d)** $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ e $6x + 8y + 4 = 0$

**48** Qual é a equação reduzida da reta que passa pela origem e é paralela a r: $y = -3x - 2$?

**49** Para que valores reais de **k** as retas de equações $3x + 2y - 1 = 0$ e $kx - 3y + 2 = 0$ são:

**a)** paralelas distintas?

**b)** concorrentes?

**c)** coincidentes?

**50** Escreva uma equação geral da reta **s** que é paralela a **r** e passa por **P**, sendo:

**a)** r: $y = 3x - 4$ e $P(0, 1)$

**b)** r: $2x + 5y - 4 = 0$ e $P(-1, 2)$

**c)** r: $y = -x + 2$ e $P(-2, -2)$

**d)** r: $y - 3 = 0$ e $P(2, 5)$

**51** Forneça o valor real de **k** para que sejam paralelas as retas de equações:

**a)** $y = 2x - 1$ e $6x + ky + 4 = 0$

**b)** $y = 2x + k$ e $kx - y + 1 = 0$

**52** Determine uma equação geral da reta que passa por (2, 5) e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

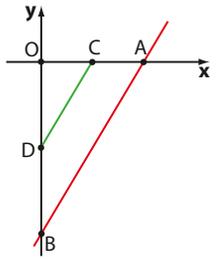
**53** Mostre que o quadrilátero de vértices $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $C(1, 2)$ e $D\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ é um trapézio.

**54** As retas suportes de três lados de um paralelogramo são r: $3x + 2y - 12 = 0$, s: $y = \frac{x}{2} - 1$ e t: $x - 2y + 6 = 0$. Sendo o ponto (2, 0) um dos vértices do paralelogramo, determine os outros três.

**55** Considere o triângulo ABC, com A(1, 1), B(5, 3) e C(3, 8); sejam **M** e **N**, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

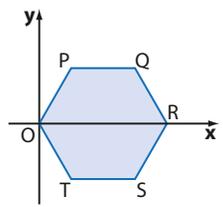
**a)** Escreva a equação da reta suporte que contém $\overline{MN}$.

**b)** Determine a medida do segmento $\overline{MN}$.

**56** Na figura, a equação da reta que passa por **A** e **B** é $5x - 3y - 15 = 0$. Sabendo que **C** é ponto médio de $\overline{OA}$ e **D** é ponto médio de $\overline{OB}$, determine o perímetro do triângulo COD.

**57** $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos do retângulo ABCD. Sendo A(1, 1) e B(4, 5), determine a equação geral da reta suporte de $\overline{CD}$.

**58** Represente graficamente o conjunto de pontos (x, y), com **x** e **y** reais que verificam a igualdade: $|x - y| = 2$.

**59** Na figura, o hexágono OPQRST é regular, e seu lado mede 4. Obtenha a equação da reta suporte dos lados:

**a)** $\overline{OP}$ **b)** $\overline{RS}$ **c)** $\overline{PQ}$

## Perpendicularidade

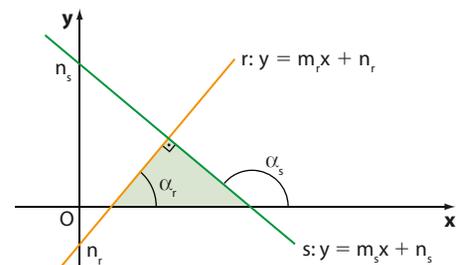
Na figura ao lado, as retas **r**, de inclinação $\alpha_r$ ($m_r = \text{tg } \alpha_r$) e **s**, de inclinação $\alpha_s$ ($m_s = \text{tg } \alpha_s$), são perpendiculares.

Vamos procurar uma relação entre seus coeficientes angulares.

Sejam as equações r: $y = m_r x + n_r$ e s: $y = m_s x + n_s$, e o ângulo $\alpha_s$ externo ao triângulo sombreado.

$$\alpha_s = \alpha_r + 90°$$

$$\text{tg } \alpha_s = \text{tg } (\alpha_r + 90°)$$

$$\text{tg } \alpha_s = \frac{\text{sen}(\alpha_r + 90°)}{\cos(\alpha_r + 90°)} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen } \alpha_r} = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r}$$

Assim:

$$\text{tg } \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r}, \text{ isto é, } m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Observe que essa relação só pode ser aplicada se **r** e **s** forem oblíquas ao eixo **x**, pois não é definida a declividade no caso de uma delas ser vertical. Nesse caso, uma perpendicular a ela é horizontal e vice-versa.

Assim, verificamos que:

Se **r** e **s** são perpendiculares entre si, então $m_r \cdot m_s = -1$.

Um procedimento análogo mostra a recíproca dessa propriedade, isto é, se **r** e **s** são duas retas tais que $m_r \cdot m_s = -1$, então **r** e **s** são perpendiculares entre si.

Professor, se achar pertinente, traga aos estudantes a justificativa da propriedade: "sendo $\alpha$ um ângulo agudo, $\text{sen}(\alpha + 90°) = \cos\alpha$ e $\cos(\alpha + 90°) = -\text{sen}\,\alpha$".
- **P** é imagem de $\alpha$ e **Q** é imagem de $(90° + \alpha)$
- Como $\text{med}(Q\hat{O}Q') = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$, segue que $\text{med}(O\hat{Q}Q') = \alpha$

Daí:
$\Delta POP' \equiv \Delta OQQ'$ (caso $LAA_o$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} \overline{PP'} \equiv \overline{OQ'}, \text{ isto é, } \text{sen}\,\alpha = -\cos(\alpha + 90°) \\ \overline{OP'} \equiv \overline{QQ'}, \text{ isto é, } \cos\alpha = \text{sen}(\alpha + 90°) \end{cases}$

## EXEMPLO 16

As retas r: $2x - 4y + 5 = 0$ e s: $y = -2x + 3$ são perpendiculares entre si, pois:

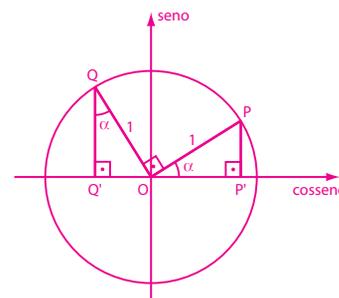
$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ m_s = -2 \end{array}\right\} m_r \cdot m_s = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

## EXEMPLO 17

As retas r: $y = 3x$ e s: $y = \frac{1}{3}x + 5$ não são perpendiculares entre si, pois $m_r = 3$, $m_s = \frac{1}{3}$ e $m_r \cdot m_s = 1 \neq -1$.

Nesse caso, **r** e **s** concorrem, mas não perpendicularmente.

## EXEMPLO 18

As retas r: $x - 3 = 0$ e s: $y + 2 = 0$ são perpendiculares entre si, pois **r** é vertical e **s** é horizontal. No entanto, a relação $m_r \cdot m_s = -1$ não pode ser aplicada, pois não se define $\mathbf{m_r}$.

**PENSE NISTO:**

Por que a bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são retas perpendiculares entre si?

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares ($\mathbf{b}_{13}$) é $y = x$ e a dos quadrantes pares ($\mathbf{b}_{24}$) é $y = -x$. Seus coeficientes angulares são 1 e −1, o produto entre eles é −1, então $b_{13} \perp b_{24}$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

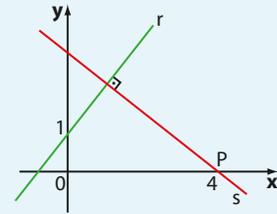
**9** Determine uma equação geral da reta **s**, perpendicular a r: $y = 3x + 1$, traçada pelo ponto P(4, 0).

**Solução:**

Como $r \perp s$, devemos ter $m_r \cdot m_s = -1$.

Como $m_r = 3$, então $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{3}$. Assim, temos: s: $y = -\frac{1}{3}x + n$

Como **s** passa por P(4, 0), temos: $0 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + n \Rightarrow n = \frac{4}{3}$

Assim, a equação de **s** é: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$

**10** Determine a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são A(0, 0) e B(2, 3).

**Solução:**

Lembremos que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, traçada pelo seu ponto médio.

O ponto médio **M** de $\overline{AB}$ é $M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

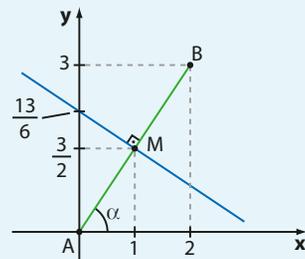
O coeficiente angular da reta que passa por **A** e **B** é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \left(\text{observe que tg } \alpha = \frac{3}{2}\right)$$

A mediatriz é, portanto, uma reta com declividade $-\frac{2}{3}\left(\text{pois } \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1\right)$, que passa pelo ponto $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Sua equação reduzida é $y = -\frac{2}{3}x + n$. Substituindo as coordenadas de **M**, temos:

$$\frac{3}{2} = -\frac{2}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$.

**11** Determine o ponto de interseção entre a reta r: $y = \frac{3}{2}x$ e a reta perpendicular a **r** conduzida pelo ponto P(−7, 15).

**Solução:**

O ponto de interseção solicitado é a projeção ortogonal do ponto sobre a reta, como mostra a figura seguinte.

$P' = proj_r P$: interseção de **r** com $\overline{PP'}$.

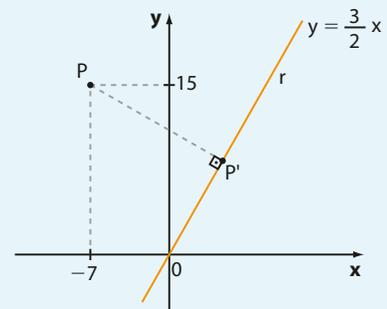
Usando os dados do problema, temos:

- O coeficiente angular **m** da reta $\overline{PP'}$ é tal que $m \cdot m_r = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

- A equação de $\overline{PP'}$ é $y - 15 = -\frac{2}{3} \cdot (x + 7) \Rightarrow 2x + 3y - 31 = 0$.
- Determinemos **P'**, o ponto comum entre **r** e $\overline{PP'}$:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ 2x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{9x}{2} - 31 = 0 \Rightarrow x = \frac{62}{13} \text{ e } y = \frac{93}{13}$$

Assim, as coordenadas de **P'** são $\left(\frac{62}{13}, \frac{93}{13}\right)$.

## EXERCÍCIOS

**60** Indique quais das retas abaixo são perpendiculares entre si.

r: $y = 2x + 3$ t: $x + 2y - 6 = 0$

s: $x - 4y + 4 = 0$ u: $y = -2x - 1$

**61** Obtenha a equação reduzida da reta que passa por P(2, −3) e é perpendicular a:

**a)** $y = 3x - 1$ **b)** $2x - 5y - 11 = 0$

**62** Determine **m** $\in \mathbb{R}$ para que as retas r: $3x + 5y - 7 = 0$ e s: $mx - 6y + 1 = 0$ sejam perpendiculares entre si.

**63** Determine, em cada caso, a posição relativa entre as retas **r** e **s**:

**a)** r: $x - 3y = 0$ s: $y = 3x + 2$

**b)** r: $2x - y + 1 = 0$ s: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

**c)** r: $x + 3 = 0$ s: $x - 1 = 0$

**d)** r: $x + 3 = 0$ s: $y + 3 = 0$

**e)** r: $2x - 3y + 4 = 0$ s: $y = \frac{2x}{3}$

**64** Dado o segmento $\overline{AB}$, com A(4, 5) e B(−2, 1),

**a)** determine a equação da mediatriz de $\overline{AB}$;

**b)** escolha um ponto qualquer dessa mediatriz e mostre que esse ponto equidista de **A** e **B**.

**65** Dado o triângulo ABC, com A(−3, 2), B(1, 0) e C(0, 3), obtenha as coordenadas de seu:

**a)** baricentro (ponto de encontro das medianas).

**b)** circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes).

**66** Dados P(2, −4) e r: $2x - 3y + 6 = 0$:

**a)** obtenha as coordenadas do ponto **Q**, interseção de **r** com a perpendicular a **r** por **P**;

**b)** determine o simétrico de **P** em relação à reta **r**.

**67** ABCD é um quadrado e A(1, 2) e B(3, 5) são vértices consecutivos. Determine as equações das retas suporte dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

**68** As retas **r** e **s**, de equações r: $2x - y + 3 = 0$ e s: $y = mx + n$, intersectam-se, perpendicularmente, no ponto (−2, −1). Quais são os valores de **m** e **n**?

**69** Determine os valores reais de **k** para os quais as retas r: $y = -\frac{k}{3}x + 1$ e s: $y = \left(\frac{k+1}{2}\right)x - 4$ não são perpendiculares entre si.

**70** Sejam os pontos A(2, 2), B(4, −1), C(−2, −5) e D(−4, −2).

**a)** Mostre que o triângulo ABC é retângulo em $\hat{B}$. Quanto mede sua hipotenusa?

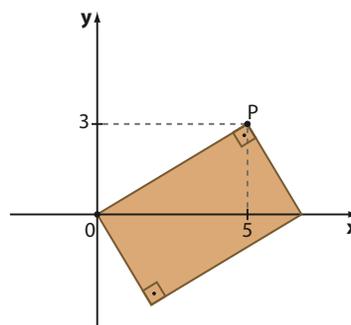
**b)** Mostre que o quadrilátero ABCD é um retângulo. Quanto mede sua diagonal?

**71** Seja ABC o triângulo de vértices A(0, −3), B(−4, 0) e C(2, 1). Determine a equação da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

**72** Obtenha a equação de uma reta perpendicular a r: $4x + 3y = 0$ e que defina com os eixos coordenados um triângulo de área 6.

**73** Um casal de namorados, Júlia e Jonas, costuma se encontrar depois do trabalho em uma sorveteria localizada na esquina de uma praça retangular.

ROBERT GLENN/GETTY IMAGES

Representando a praça em um sistema de coordenadas retangulares, observamos que Júlia trabalha em uma loja, representada pela origem do sistema, e Jonas trabalha em um *cyber*, representado pelo vértice do retângulo oposto à origem; a sorveteria encontra-se no ponto P(5, 3). Ambos caminham, em linha reta, de seus locais de trabalho à sorveteria pontualmente às 18 h. Sabendo que a unidade de medida de comprimento utilizada é o metro e a escala é de 1 : 20, identifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes. Considere $\sqrt{34} \simeq 5{,}8$.

**a)** A distância entre a loja onde Júlia trabalha e o ponto de encontro é maior que 100 metros.

**b)** O *cyber* onde Jonas trabalha está representado por um ponto de abscissa $\frac{34}{5}$.

**c)** Se Júlia caminha à velocidade constante de 2 km/h, então ela chega à sorveteria antes das 18 h 03 min.

**d)** Para dar uma volta completa ao redor da praça, um atleta, correndo à velocidade constante de 5 km/h, leva menos de 4 minutos.

**74** Obtenha os vértices de um losango ABCD tal que:

- **A** pertence ao eixo **y**;
- **B** pertence ao eixo **x**;
- a diagonal $\overline{AC}$ está contida na reta r: $7x + y - 3 = 0$;
- as diagonais se intersectam em um ponto de ordenada $-\frac{1}{2}$.

# Outros modos de escrever a equação de uma reta

## Forma segmentária

Seja **r** uma reta que intersecta os eixos coordenados nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com **P** e **Q** distintos.

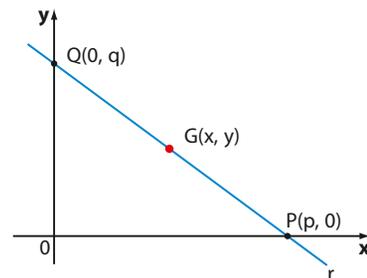
Seja G(x, y) um ponto genérico de **r**. A equação de **r** pode ser obtida a partir da condição de alinhamento de **P**, **Q** e **G**:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow pq - qx - py = 0 \Rightarrow qx + py = pq \quad (*)$$

Como **p** e **q** não são nulos (senão **P** e **Q** coincidiriam), podemos dividir os dois membros de (*) por p · q:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

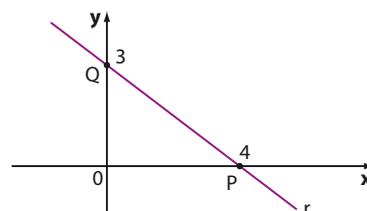
A equação obtida é chamada **equação segmentária** da reta **r**. Notemos que:

- o número real que divide **x** é igual à abscissa do ponto em que **r** intersecta o eixo **x**;
- o número real que divide **y** é igual à ordenada do ponto em que **r** intersecta o eixo **y**;
- o segundo membro da equação é igual a 1.

**EXEMPLO 19**

Observe que **r** intersecta o eixo **x** em P(4, 0) e o eixo **y** em (0, 3). A equação segmentária de **r** é, portanto:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

A partir da forma segmentária, podemos obter as equações geral e reduzida:

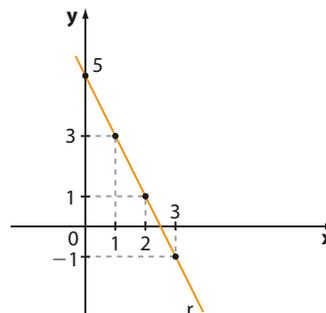
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 & \text{(geral)} \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 & \text{(reduzida)} \end{cases}$$

## Forma paramétrica

As equações geral, reduzida e segmentária relacionam diretamente entre si as coordenadas (x, y) de um ponto genérico da reta. Há outra alternativa para estabelecer a equação de uma reta **r**, que é expressando cada uma das coordenadas (**x** e **y**) dos pontos de **r** em função de uma terceira variável, denominada **parâmetro**.

EXEMPLO **20**

Os pontos de uma reta **r** satisfazem as equações $x = 1 + t$ e $y = 3 - 2t$, com $t \in \mathbb{R}$. Vamos representar graficamente a reta **r** e obter sua equação geral.

Façamos o parâmetro **t** variar em $\mathbb{R}$, a fim de obter alguns pontos de **r**:

| t | x | y | Ponto |
|---|---|---|---|
| −1 | 0 | 5 | (0, 5) |
| 0 | 1 | 3 | (1, 3) |
| 1 | 2 | 1 | (2, 1) |
| 2 | 3 | −1 | (3, −1) |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

A equação geral de **r** pode ser obtida tomando-se dois pontos quaisquer acima e estabelecendo a condição de alinhamento. Outra alternativa é resolver o sistema obtido quando usamos as coordenadas de dois pontos de **r** na lei $y = ax + b$.

Também é possível isolar **t** em uma das equações e substituí-lo na outra:

$$x = 1 + t \Rightarrow t = x - 1$$

Substituindo em $y = 3 - 2t$, temos:

$$y = 3 - 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3 - 2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

As equações $x = 1 + t$ e $y = 3 - 2t$, em que $t \in \mathbb{R}$, são exemplos de **equações paramétricas** da reta **r**.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**12** Seja **r** a reta cuja equação geral é $6x + y - 3 = 0$. Escreva a equação reduzida, a segmentária e um par de equações paramétricas de **r**.

**Solução:**

- Equação reduzida: basta isolar **y** em $6x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -6x + 3$.
- Equação segmentária: $6x + y - 3 = 0 \Rightarrow 6x + y = 3$; dividimos os dois membros dessa última equação por 3:

$$\frac{6x + y}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow 2x + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{3} = 1$$

Note que **r** intersecta o eixo **x** em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e o eixo **y** em (0, 3).

- Equação paramétrica:

Fazendo, por exemplo, $t = 3x$, temos: $x = \frac{t}{3}$ e, assim, podemos determinar **y** em função de **t**:

$$6x + y - 3 = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{t}{3} + y - 3 = 0 \Rightarrow 2t + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 2t$$

Um par de equações paramétricas de **r** é $\begin{cases} x = \frac{t}{3} \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ ; $t \in \mathbb{R}$.

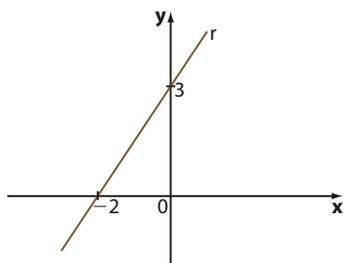
**PENSE NISTO:**

Como podemos obter outros pares de equações paramétricas da reta **r**?

**Pense nisto:** Basta escolher um parâmetro $t \neq 3x$. Por exemplo, fazendo $t = x$, temos: $6x + y - 3 = 0 \Rightarrow \Rightarrow 6t + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 6t$ e as equações paramétricas são $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$. Outro exemplo: $t = y - 1 \Rightarrow y = t + 1$. Daí $6x + (t + 1) - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{t}{6} + \frac{1}{3}$. O par é $\begin{cases} x = -\frac{t}{6} + \frac{1}{3} \\ y = t + 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**75** Seja **r** a reta representada no gráfico. Determine:

**a)** a equação segmentária de **r**;

**b)** uma equação geral de **r**.

**76** Escreva a forma geral, a reduzida e a segmentária da reta dada por $x = 2t - 1$ e $y = 2 - 3t$; $t \in \mathbb{R}$.

**77** Qual é a forma segmentária da equação da reta **r** dada por $y = 2x - 8$?

**78** A reta s: $\frac{x}{5} + y = 1$ determina com os eixos coordenados um triângulo retângulo. Determine:

**a)** o perímetro do triângulo;

**b)** a área do triângulo.

**79** Forneça um par de equações paramétricas da reta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

**80** Determine as coordenadas do ponto médio da hipotenusa do triângulo XOY, sendo **O** a origem e **X** e **Y** os pontos em que a reta $x - 2y - 4 = 0$ intersecta os eixos coordenados.

**81** Em cada caso, obtenha a posição relativa entre as retas **r** e **s**:

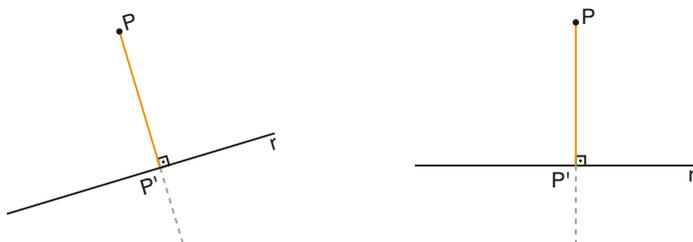
**a)** r: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ s: $2x - y - 4 = 0$

**b)** r: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ s: $y = -\frac{4x}{3} + 1$

**82** Determine a equação de uma reta **r** que passa por $(-2, -4)$ e é perpendicular à reta s: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

**83** Ache as coordenadas do ponto de interseção das retas r: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 5 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ e s: $\begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 7 + u \end{cases}$; $u \in \mathbb{R}$.

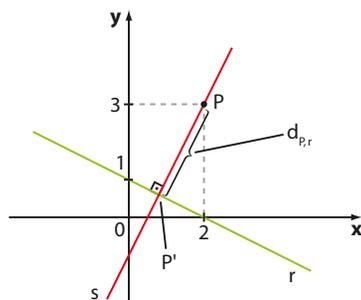
## Distância entre ponto e reta

Já sabemos que a distância entre um ponto e uma reta é a distância do ponto ao "pé da perpendicular" à reta dada, traçada pelo ponto.

Em ambos os casos, a distância entre **P** e **r** (indica-se por $d_{P,\,r}$) é a distância entre **P** e **P'**, sendo **P'** o ponto de interseção entre a reta perpendicular a **r**, conduzida por **P**, e a reta **r**.

**P'** também é chamado **projeção ortogonal** de **P** sobre **r**.

- Se $P \in r$, naturalmente, $d_{P,\,r} = 0$.
- Se $P \notin r$, temos $d_{P,\,r} > 0$.

**EXEMPLO 21**

Vamos agora obter, analiticamente, a distância entre P(2, 3) e a reta r: $x + 2y - 2 = 0$.

1º) Seja **s** a reta perpendicular a **r**, traçada por **P**. Vamos obter sua equação.

Temos: $m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$; como $m_r \cdot m_s = -1$, temos $m_s = -\frac{1}{m_r} = 2$.

Como **s** passa por P(2, 3), podemos escrever:

$$y - 3 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1 \text{ é a equação de } \mathbf{s}.$$

2º) Determinemos **P'**, interseção de **r** com **s**. Para isso, basta resolver o sistema formado pelas equações de **r** e **s**:

$$\begin{cases} r\colon x + 2y - 2 = 0 \\ s\colon y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \text{ e } x = \frac{4}{5}$$

Daí, $P'\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3º) A distância de **P** a **r** é a distância entre os pontos P(2, 3) e $P'\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$:

$$d_{P,\,r} = d_{P,\,P'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Podemos generalizar o procedimento descrito no exemplo anterior para calcular a distância **d** entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: $ax + by + c = 0$.

Obtemos a expressão:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

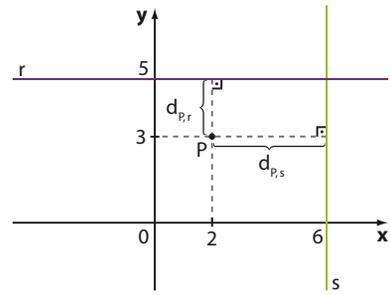
A demonstração dessa propriedade encontra-se na seção *Um pouco mais sobre*, página 65.

**EXEMPLO 22**

Vamos aplicar a fórmula para confirmar o resultado obtido no exemplo 21.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 3)\ (x_0 = 2,\ y_0 = 3) \\ r\colon x + 2y - 2 = 0 \\ (a = 1,\ b = 2,\ c = -2) \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

**OBSERVAÇÃO**

A distância de um ponto **P** a uma reta **r**, vertical ou horizontal, pode ser encontrada de maneira mais rápida e sem a necessidade de fórmula.
Acompanhe este exemplo, em que P(2, 3), a reta **r** é horizontal, r: $y - 5 = 0$ e a reta **s** é vertical, s: $x - 6 = 0$.
A distância de **P** a **r** é: $d_{P,\,r} = 5 - 3 = 2$.
A distância de **P** a **s** é: $d_{P,\,s} = 6 - 2 = 4$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

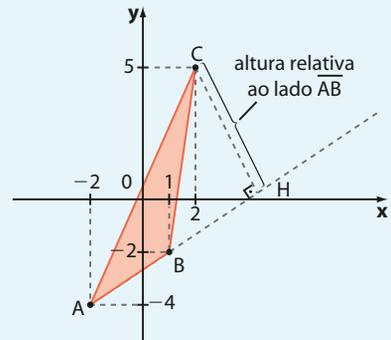
**13** Os vértices de um triângulo ABC são A(−2, −4), B(1, −2) e C(2, 5). Determine a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

**Solução:**

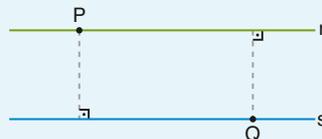
Para determinar o comprimento da altura $\overline{CH}$, primeiramente encontramos a equação de $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$

Agora, basta encontrar a distância entre C(2, 5) e $\overleftrightarrow{AB}$. Podemos seguir o procedimento usado no exemplo 21 ou aplicar a fórmula:

$$d_{C,\,\overleftrightarrow{AB}} = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-19|}{\sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{13}} \Rightarrow h_C = \frac{19\sqrt{13}}{13}$$

**14** Determine a distância entre as retas r: $x + 2y + 5 = 0$ e s: $x + 2y - 3 = 0$.

**Solução:**

É importante observar, de início, que **r** e **s** são paralelas distintas, pois possuem o mesmo coeficiente angular $\left(m_r = m_s = -\frac{1}{2}\right)$. A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas à outra reta.

$$d_{r,\,s} = d_{P,\,s} = d_{Q,\,r} = \ldots$$

Desse modo, é preciso escolher um ponto arbitrário de uma das retas e calcular a distância desse ponto à outra reta.

Tomamos um ponto **P** em **r**:

Escolhemos, arbitrariamente, $x = -1 \Rightarrow -1 + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0$
$\Rightarrow y = -2$; Assim, temos: $P(-1, -2) \in r$.

Calculamos a distância de **P** a **s**:

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

**PENSE NISTO:**

Tome agora um ponto em **s** e calcule sua distância à reta **r**.

Tomemos, por exemplo, o ponto **Q** pertencente à reta **s** com abscissa $x = 5$. Usando a equação da reta, temos: $5 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$

Calculamos a distância de Q(5, −1) à reta **r**: $d = \frac{|5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

## EXERCÍCIOS

**84** Determine a distância do ponto **P** à reta **r**, sendo:

**a)** $P(-1, -3)$ e r: $3x - y + 5 = 0$

**b)** $P(0, 2)$ e r: $4x - 3y - 11 = 0$

**c)** $P(-2, 5)$ e r: $5x + 2y + 29 = 0$

**d)** $P(1, -1)$ e r: $3x - y - 4 = 0$

**85** Dados os pontos $A(-1, -1)$, $B(6, -3)$ e $C(4, -10)$, calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC.

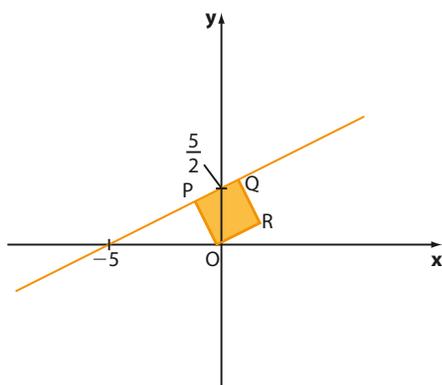
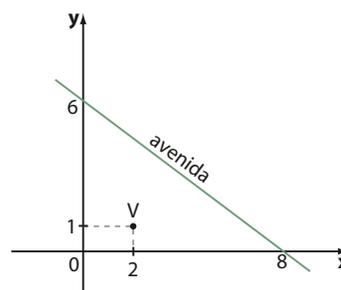
**86** Determine a distância entre as retas de equações $y = 3x - 1$ e $6x - 2y + 15 = 0$.

**87** Considere os pontos $P(10, -1)$, $Q(0, 3)$ e $R(5, 1)$.

**a)** Qual desses pontos é o mais distante da reta r: $2x + 5y - 1 = 0$?

**b)** O que se pode afirmar a respeito da posição relativa entre **r** e a reta que passa por **P** e **Q**?

**88** Calcule a medida da altura de um trapézio cujos vértices são $A(-1, -3)$, $B(6, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(-9, 0)$.

**89** Determine o perímetro e a área do quadrado OPQR.

**90** Para ir ao trabalho, José atravessa, a pé, uma longa avenida retilínea que corta parte da pequena cidade onde vive. De vários pontos da avenida, ele consegue avistar a casa de Vânia, sua namorada. O sistema de coordenadas retangulares seguinte mostra parte do mapa da cidade. A casa de Vânia está representada pelo ponto **V** e a origem do sistema corresponde ao marco zero da cidade.

Sabendo que a unidade de medida de comprimento utilizada é o metro e que a escala é de 1 : 100, determine:

**a)** a distância real do marco zero da cidade à casa de Vânia;

**b)** a distância real do marco zero da cidade à avenida;

**c)** as coordenadas do ponto da avenida na qual José fica mais próximo da casa de Vânia;

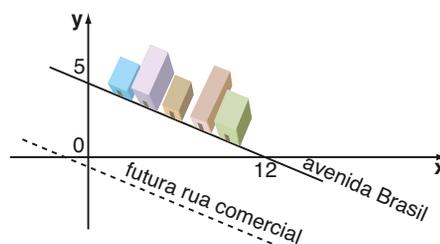
**d)** a distância real entre José e a casa de Vânia, considerando o item anterior.

**91** Obtenha uma equação da reta paralela a r: $x - y + 7 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $(2, 2)$.

**92** Para a construção de um anel viário, a prefeitura de uma cidade planejada pretende desapropriar alguns estabelecimentos comerciais que estão localizados ao longo da avenida Brasil.

CORBIS/FOTO ARENA

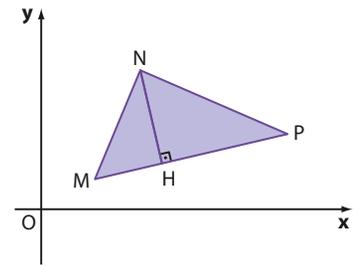
Os comerciantes instalados nessa avenida serão transferidos para uma futura rua comercial para pedestres, paralela à avenida Brasil e distante 6 km dela, como mostra o mapa seguinte, em que a unidade de medida de comprimento considerada é o quilômetro:

ZAPT

Determine, no sistema acima, a equação da reta que representa a futura rua comercial a ser construída na cidade.

# Área do triângulo

Vamos calcular a área de um triângulo MNP a partir das coordenadas dos três vértices: $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$.

Com base na Geometria Plana, sabemos que a área da superfície limitada por um triângulo ou, simplesmente, área do triângulo, pode ser calculada pela expressão:

$$\frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2}$$

- Tomando o lado $\overline{MP}$ como base, sua medida é a distância entre os pontos **M** e **P**, a saber:

$$d_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} \quad (1)$$

- A medida da altura $\overline{NH}$ é a distância entre o ponto **N** e a reta suporte do lado $\overline{MP}$. Para calcular essa distância, vamos inicialmente obter a equação de $\overleftrightarrow{MP}$:

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (}\mathbf{x}\text{ e }\mathbf{y}\text{ são as coordenadas de um ponto qualquer de } \overleftrightarrow{MP}\text{.)}$$

$$x_My_P + xy_M + yx_P - xy_P - yx_M - x_Py_M = 0$$

$$x(y_M - y_P) + y(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M) = 0 \quad (2)$$

- Vamos usar a expressão da distância entre ponto e reta para calcular a distância entre **N** e a reta suporte de $\overline{MP}$.

$$\begin{cases} N(x_N, y_N) \\ \overleftrightarrow{MP}: x(y_M - y_P) + y(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M) = 0 \end{cases}$$

$$d_{N, \overleftrightarrow{MP}} = \frac{|x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M)|}{\sqrt{(y_M - y_P)^2 + (x_P - x_M)^2}} \quad (3)$$

- Por fim, a área **A** do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot d_{MP} \cdot d_{N, \overleftrightarrow{MP}}$$

Usando (1) e (3), obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}} \cdot \frac{|x_N(y_M - y_P) + y_N(x_P - x_M) + (x_My_P - x_Py_M)|}{\cancel{\sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}}}$$

Observe que o módulo da expressão obtida coincide com (2) quando **x** e **y** são substituídos, respectivamente, por $\mathbf{x_N}$ e $\mathbf{y_N}$.

Logo, podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix}$$

Assim, mostramos que:

A área da superfície limitada pelo triângulo MNP, em que $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$, é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

**PENSE NISTO:**

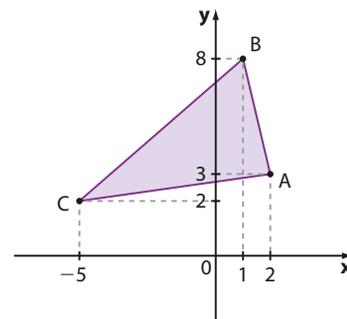
Se **M**, **N** e **P** são colineares, qual é o valor do determinante **D**?

Se **M**, **N** e **P** são colineares, o triângulo MNP não existe. Nesse caso, D = 0 (lembre a condição de alinhamento de três pontos).

**EXEMPLO 23**

Para calcular a área do triângulo de vértices A(2, 3), B(1, 8) e C(−5, 2), iniciamos pelo cálculo do determinante **D**:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 15 + 2 + 40 - 3 - 4 = 36$$

Assim, $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |36| = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \Rightarrow A_{\triangle ABC} =$
$= 18$ unidades de área.

## EXERCÍCIOS

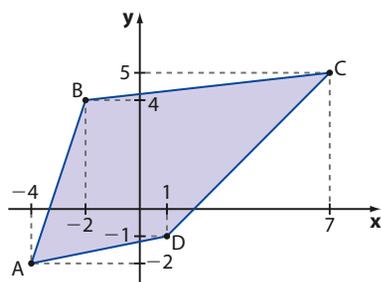
**93** Determine a área do triângulo de vértices:

**a)** A(2, 3), B(5, 4) e C(6, −3)

**b)** A(4, 1), B(−3, 1) e C(−1, −2)

**c)** $A\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e C(2, −1)

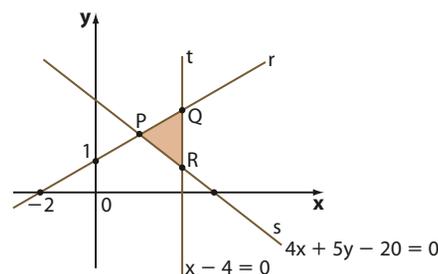
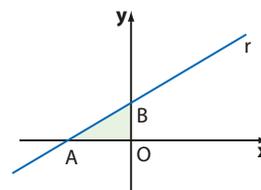
**d)** A(0, 0), B(3, 4) e C(−2, 11)

**94** Obtenha a área do quadrilátero ABCD.

**95** Os pontos A(1, 2), B(4, 3), C(3, 1) e **D** são vértices consecutivos de um paralelogramo.

**a)** Obtenha a equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$.

**b)** Calcule a área do paralelogramo.

**96** A reta r: 2x + y − 6 = 0 determina com os eixos coordenados um triângulo retângulo. Qual é a área desse triângulo?

**97** Determine a área do triângulo PQR seguinte.

**98** Na figura, temos o triângulo AOB em que AO = = 2 · OB. Obtenha a equação da reta **r**, sabendo que a área do triângulo é igual a 16.

**99** Determine a área do triângulo ABC, sabendo que:

- A(1, 0) e B(−1, 0);
- $\overleftrightarrow{BC}$ tem por equação: y = x + 1;
- o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AC}$ é 2.

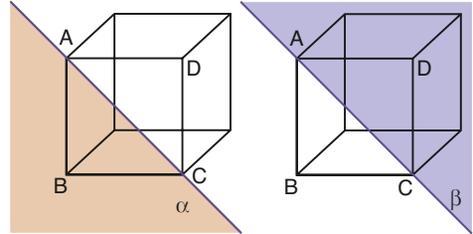
## Inequações do 1º grau – resolução gráfica

Sabemos, com base na Geometria Espacial de posição, que uma reta **r** contida em um plano divide-o em dois semiplanos, ambos com origem na própria reta.

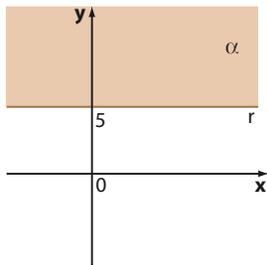
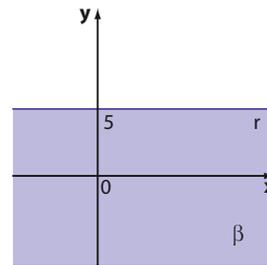
Observe o cubo ao lado.

A reta $\overleftrightarrow{AC}$ divide o plano que contém a face ABCD em dois semiplanos α e β, sendo $\overleftrightarrow{AC}$ a origem de ambos.

Consideremos uma reta **r** do plano cartesiano, que o divide em dois semiplanos. Cada um desses semiplanos pode ser representado por uma inequação do 1º grau (com uma ou duas incógnitas).

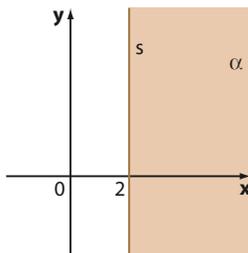
**1º caso**: A reta **r** é paralela a um dos eixos coordenados.

**EXEMPLO 24**

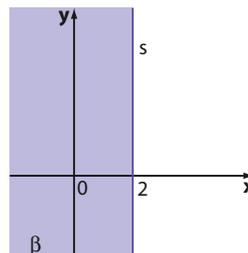
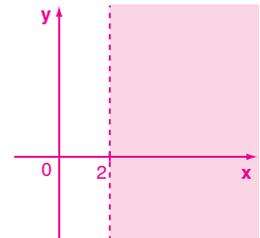
Seja r: $y - 5 = 0$.

**r** divide o plano cartesiano em dois semiplanos α e β:

Todos os pontos de α possuem ordenadas maiores ou iguais a 5. A inequação $y \geq 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y - 5 \geq 0$ pode representar esses pontos.

Todos os pontos de β possuem ordenadas menores ou iguais a 5. A inequação $y \leq 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y - 5 \leq 0$ pode representar esses pontos.

**EXEMPLO 25**

Seja s: $x - 2 = 0$.

**s** divide o plano cartesiano em dois semiplanos:

Todos os pontos de **α** possuem abscissas maiores ou iguais a 2. Podemos representá-los pela inequação $x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0$.

**Pense nisto**: $x - 2 > 0$ equivale a $x > 2$, com **y** qualquer; observe a reta tracejada.

Todos os pontos de **β** possuem abscissas menores ou iguais a 2. Podemos representá-los pela inequação $x \leq 2 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0$.

**PENSE NISTO:**

Represente graficamente o conjunto de pontos que satisfazem a inequação $x - 2 > 0$.

**2º caso**: A reta **r** não é paralela a qualquer um dos eixos coordenados.

**EXEMPLO 26**

Seja r: $x - 2y + 2 = 0$.

Tomemos um ponto qualquer $A(x_A, y_A)$ em **r**.

Temos: $x_A - 2y_A + 2 = 0 \Leftrightarrow y_A = \dfrac{x_A}{2} + 1$

Seja **B** um ponto na mesma vertical de **A** ($x_B = x_A$), acima de **r**, isto é, $y_B > y_A$, ou melhor:

$$y_B > \frac{x_A}{2} + 1$$

Como $x_A = x_B$, temos:

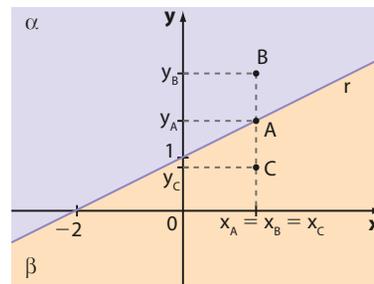
$$y_B > \frac{x_B}{2} + 1 \Rightarrow 2y_B > x_B + 2 \Rightarrow x_B - 2y_B + 2 < 0 \quad (1)$$

Seja **C** um ponto na mesma vertical de **A** ($x_A = x_C$), abaixo de **r**, isto é, $y_C < y_A \Rightarrow y_C < \dfrac{x_A}{2} + 1$.

Como $x_A = x_C$, escrevemos:

$$y_C < \frac{x_C}{2} + 1 \Rightarrow x_C - 2y_C + 2 > 0 \quad (2)$$

Assim, temos que:

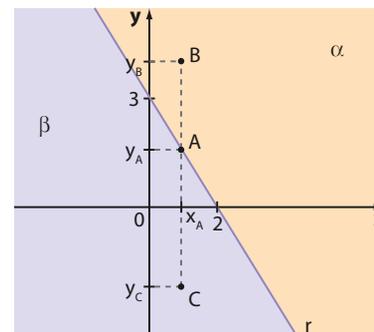
- todo ponto do semiplano $\alpha$, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $x - 2y + 2 < 0$, como em (1).
- todo ponto do semiplano $\beta$, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $x - 2y + 2 > 0$, como em (2).

**EXEMPLO 27**

Seja r: $3x + 2y - 6 = 0$; $\alpha$ e $\beta$ são os dois semiplanos determinados por **r**.

Temos:

- $A \in r \Rightarrow 3x_A + 2y_A - 6 = 0 \Leftrightarrow y_A = -\dfrac{3}{2}x_A + 3$
- $B \in \alpha\ (x_B = x_A, y_B > y_A) \Rightarrow y_B > -\dfrac{3}{2}x_B + 3 \Leftrightarrow 3x_B + 2y_B - 6 > 0$ (1)
- $C \in \beta\ (x_C = x_A, y_C < y_A) \Rightarrow y_C < -\dfrac{3}{2}x_C + 3 \Leftrightarrow 3x_C + 2y_C - 6 < 0$ (2)

Temos que:

- todo ponto do semiplano $\alpha$, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $3x + 2y - 6 > 0$, como em (1).
- todo ponto do semiplano $\beta$, excluindo os pontos de **r**, satisfaz a inequação $3x + 2y - 6 < 0$, como em (2).

**OBSERVAÇÃO**

Se uma reta **r** qualquer (não paralela a qualquer um dos eixos), de equação r: $ax + by + c = 0$, divide o plano cartesiano em dois semiplanos de mesma origem **r**, como nos exemplos 26 e 27, temos:

- Todo ponto $(x, y)$ pertencente a um dos semiplanos satisfaz a inequação $ax + by + c \geqslant 0$.
- Todo ponto $(x, y)$ pertencente ao outro semiplano satisfaz a inequação $ax + by + c \leqslant 0$.

Nos dois casos, a igualdade ocorre somente se o ponto pertence à reta.

**EXEMPLO 28**

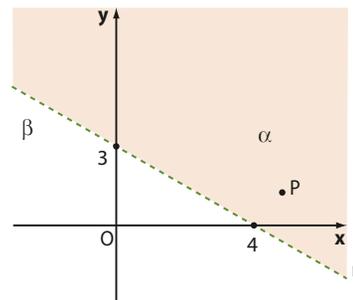
A reta r: $3x + 4y - 12 = 0$ divide o plano cartesiano nos semiplanos $\alpha$ e $\beta$. Vamos determinar a inequação que descreve os pontos de $\alpha$.

Consideramos um ponto qualquer do plano cartesiano, não pertencente a **r**, por exemplo, a origem O(0, 0).

Substituindo pelas coordenadas de **O**, obtemos, no primeiro membro da equação de **r**:

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$$

Isso mostra que os pontos do semiplano $\beta$, que contém **O**, satisfazem a inequação $3x + 4y - 12 < 0$.

Dessa forma, todos os pontos do semiplano $\alpha$, que não contém **O**, satisfazem a inequação $3x + 4y - 12 > 0$.

**OBSERVAÇÃO**

Se tivéssemos escolhido outro ponto qualquer, por exemplo, P(5, 2), chegaríamos à mesma conclusão:

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 12 = 11 > 0$$

Como o ponto **P** pertence ao semiplano $\alpha$, temos que os pontos de $\alpha$ podem ser descritos por $3x + 4y - 12 > 0$.

Porque na origem $x = y = 0$, então o sinal do trinômio $ax + by + c = 0$ na origem é, simplesmente, o sinal de **c**.

**PENSE NISTO:**

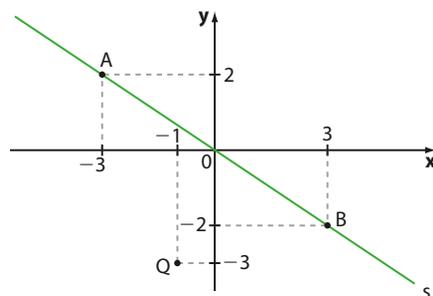
Por que é mais prático escolher a origem para testar o sinal?

**EXEMPLO 29**

A inequação $2x + 3y \leqslant 0$ pode ser resolvida graficamente.

Seja **s** a reta de equação $2x + 3y = 0$.

Tomemos dois pontos de **s**:

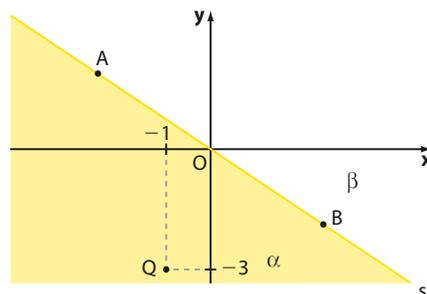
| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| −3 | 2 | A(−3, 2) |
| 3 | −2 | B(3, −2) |

Na equação de **s**, devemos "experimentar" as coordenadas de um ponto não pertencente a **s** para escolher a região correta.

Como a origem pertence à reta **s**, tomemos outro ponto, por exemplo, o ponto Q(−1, −3):

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = -11 \leqslant 0$$

O sinal da desigualdade coincide com o requerido pela inequação inicial; portanto, o ponto **Q** (e todos os outros pontos do mesmo semiplano $\alpha$) satisfaz a condição, e a região escolhida é a que está "abaixo" de **s**. Veja a figura ao lado.

No caso, a reta **s** é marcada continuamente (veja o sinal $\leqslant$).

Podemos apresentar como solução para a inequação dada: "semiplano s$\alpha$ (incluindo **s**)".

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**15** As coordenadas dos pontos de uma região do plano cartesiano satisfazem simultaneamente as inequações:

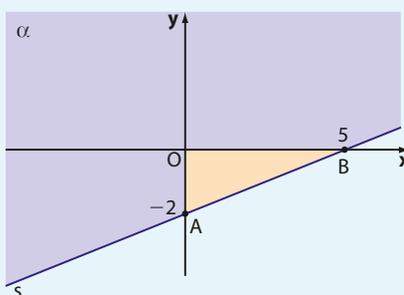
$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x - 5y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

Determine a área dessa região.

**Solução:**

As duas primeiras inequações são satisfeitas pelos pontos pertencentes ao 4º quadrante. (1)

Para resolver graficamente a terceira inequação, devemos construir a reta s: $2x - 5y - 10 = 0$.

| x | y |
|---|---|
| 0 | −2 |
| 5 | 0 |

Tomando a origem **O** (com $O \notin s$) e substituindo suas coordenadas no 1º membro da equação da reta **s**, temos:

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

Assim, o semiplano que satisfaz a inequação $2x - 5y - 10 \leq 0$ deve conter a origem, isto é, é o semiplano **α** incluindo **s**. (2)

A interseção dos pontos de (1) e (2) é o triângulo OAB destacado no gráfico. Sua área é:

$$\frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ u.a. (unidades de área)}$$

## EXERCÍCIOS

**100** Resolva graficamente as inequações:

**a)** $x + 1 \leq 0$

**b)** $y + 3 > 0$

**c)** $x - 3y \leq 2$

**d)** $2x - 6y > 0$

**e)** $4x + y \geq 3$

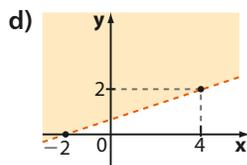
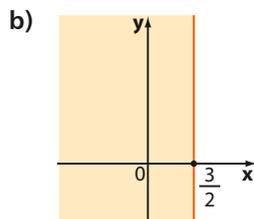
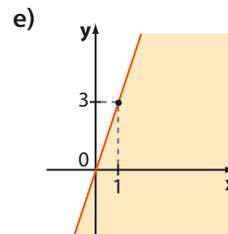
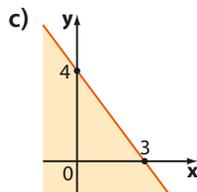
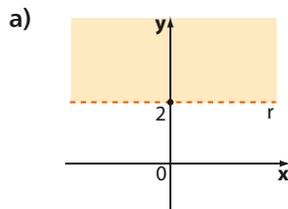
**101** Escreva uma inequação do 1º grau que represente, em cada caso, a região sombreada:

**a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**e)**

**102** Seja **R** a região do plano cujos pontos têm coordenadas que satisfazem simultaneamente as condições: $-2 \leq x \leq 2$ e $-1 \leq y \leq 3$.

**a)** Represente graficamente **R**.

**b)** Determine a área de **R**.

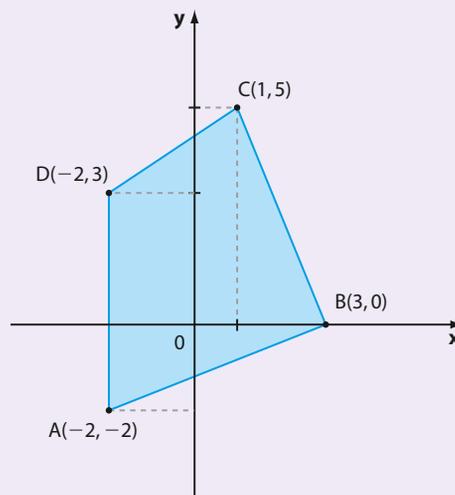
**103** As coordenadas dos pontos pertencentes a determinada região do plano satisfazem simultaneamente as inequações:

$$\begin{cases} x + y \leq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Determine o perímetro dessa região.

**104** Represente graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente as inequações $x - 3y \leq 2$ e $3x + y \geq 4$.

## DESAFIO

Em um pequeno município, a região de alcance de transmissão do sinal de uma operadora de telefonia celular está representada no plano cartesiano abaixo pelo quadrilátero ABCD reunido com o seu interior. A origem do sistema de coordenadas cartesianas coincide com o local onde está instalada a torre da operadora. A unidade de medida de comprimento considerada é o quilômetro.

**a)** Qual é, em quilômetros quadrados, a área da região do município que recebe o sinal da operadora?

**b)** A casa de Juca está localizada em um ponto do 1º quadrante, equidistante de **B** e **C** e representada, no mapa, sobre a reta de equação $2x - y = 0$. A família de Juca recebe o sinal? A que distância da torre se encontra sua casa? Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$.

**c)** Sabe-se que, nesse plano cartesiano, o município encontra-se no interior da região limitada pelas retas horizontais $y - 5 = 0$ e $y + 4 = 0$ e pelas retas verticais $x - 5 = 0$ e $x + 3 = 0$. Escolhendo-se, ao acaso, um ponto qualquer do município, qual é a probabilidade de que ele receba o sinal da operadora?

Aplicações

# Uma introdução à programação linear

Uma empresa fabrica *tablets* em dois modelos: **A** e **B**.

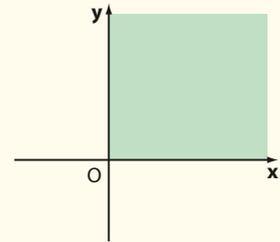
O custo de produção unitário do modelo **A** é R$ 600,00 e o do modelo **B** é R$ 900,00. As restrições orçamentárias da empresa permitem gastos mensais de até R$ 54 000,00 na produção dos *tablets* e sua capacidade produtiva mensal é de 80 unidades.

Representando por

**x**: número de *tablets* do tipo **A** fabricados no mês
**y**: número de *tablets* do tipo **B** fabricados no mês

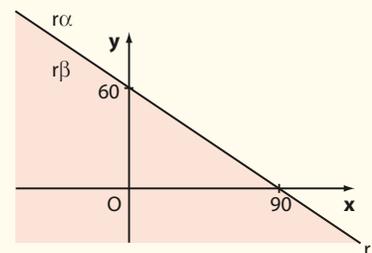
podemos estabelecer as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 & (1) \\ y \geqslant 0 & (2) \\ 600 \cdot x + 900 \cdot y \leqslant 54\,000 & (3) \\ x + y \leqslant 80 & (4) \end{cases}$$

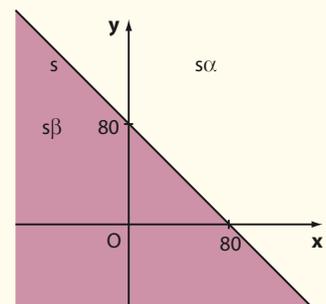
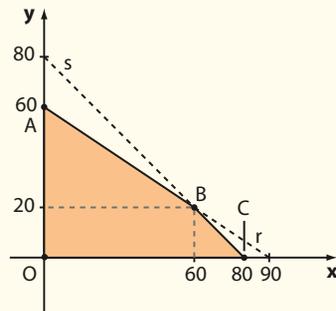
Observe que (1) e (2) representam os pontos do 1º quadrante, incluindo os semieixos reais positivos Ox e Oy.

De (3), seja r: $600x + 900y - 54\,000 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 180 = 0$

Testando a origem O(0, 0), temos que:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 180 < 0$$

Assim, a representação gráfica de (3) é o semiplano rβ (incluindo **r**).

De (4) temos s: $x + y = 80 \Leftrightarrow x + y - 80 = 0$;
Testando a origem, temos:

$$0 + 0 - 80 < 0$$

A representação gráfica de (4) é o semiplano sβ (incluindo **s**).

Reunindo as três últimas representações gráficas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas e determinando o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, 1, 2, 3 e 4, obtemos o quadrilátero ABCO reunido com seu interior; sendo O(0, 0), A(0, 60), B(60, 20) e C(80, 0).

Resolvendo o sistema formado pelas equações de **r** e **s**:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 180 = 0 \\ x + y - 80 = 0 \end{cases}$$, cuja solução é x = 60 e y = 20.

**PENSE NISTO:**

Como foram obtidas as coordenadas de **B**?

A análise da solução gráfica obtida permite à empresa saber que, em um determinado mês (mantidas tais restrições), é possível fabricar, por exemplo, 20 *tablets* do tipo **A** e 50 do tipo **B**, pois (20, 50) pertence ao interior de ABCO; da mesma forma, podem ser fabricados, em um mês, 70 *tablets* do tipo **A** e 10 do tipo **B**, pois (70, 10) pertence ao interior de ABCO.

Ao contrário, não é possível fabricar 40 *tablets* de cada tipo em um mês, pois (40, 40) **não** pertence à região destacada.

Conhecendo-se o preço unitário de venda de cada tipo de *tablet*, é possível, através de conhecimentos da Matemática do Ensino Superior, determinar o número de unidades que devem ser vendidas (respeitadas as restrições orçamentárias e de produtividade) a fim de maximizar a receita da empresa com a venda de *tablets*.

A situação aqui descrita é um exemplo introdutório simples de problemas estudados pela programação linear.

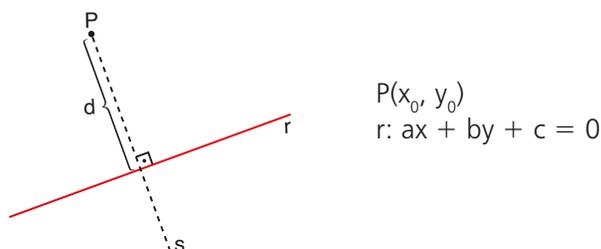
**Programação linear** é uma técnica de planejamento em pesquisa operacional presente em vários ramos da atividade humana. Em linhas gerais, trata de problemas de otimização: como distribuir recursos limitados para atender um objetivo específico, que pode ser a maximização da receita (ou do lucro) de uma empresa, em situações de restrições orçamentárias.

Veja alguns outros exemplos de aplicações da programação linear:

- formulação da composição de alimentos, rações e adubo para melhor rendimento, em negócios agropecuários;
- composição de tabelas de escala de horários dos funcionários em uma empresa para gerar maior receita com o menor custo possível;
- seleção de rotas e elaboração da logística que permitam a uma empresa a redução de custos na realização de transportes de cargas e encomendas, com qualidade e segurança.

**Fontes de pesquisa:** NOGUEIRA, F. M. A. *Programação linear*. Disponível em: <www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/IntrodPL.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016; *Introdução à programação linear*. Disponível em: <www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/modulo_II/pdf/CAP5EE2PLapost.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016.; LOUREIRO, M. *Problemas de programação linear*. Disponível em: <www.novaims.unl.pt/docentes/vlobo/IO/1%20PPLinear.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016.
MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira; HAZZAN, Samuel. *Cálculo*: Funções de uma e várias variáveis. 2ª ed. São Paulo: Saraiva 2010.

## UM POUCO MAIS SOBRE — Demonstração da fórmula da distância de um ponto a uma reta

Vamos determinar **d** (distância de **P** a **r**).

$P(x_0, y_0)$
$r: ax + by + c = 0$

1º) Determinamos a equação da reta perpendicular a **r** por **P**.

- Como $s \perp r$, $m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{\left(-\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{b}{a}$.
- **s** passa por $P(x_0, y_0) \Rightarrow y - y_0 = \dfrac{b}{a} \cdot (x - x_0) \Rightarrow s: bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$

2º) Determinamos as coordenadas de **P'**, projeção ortogonal de **P** sobre **r**. Devemos resolver o sistema, nas incógnitas **x** e **y**, formado pelas equações de **r** e de **s**:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira equação multiplicada por **b** com a segunda equação multiplicada por $-a$, obtemos: $y = \dfrac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}$. Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtemos o valor de **x**:

$$x = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$$

3º) Calculamos a distância entre **P** e **P'**.
A distância de **P** a **r** é a distância entre $P(x_0, y_0)$ e $P'\left(\dfrac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}, \dfrac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2}\right)$:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{b \cdot (-ax_0 - by_0 - c)}{a^2 + b^2}\right]^2}$$

Lembrando que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t)^2 = t^2$, e colocando $(ax_0 + by_0 + c)^2$ em evidência, temos:

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CAPÍTULO 3

# A circunferência

## A equação reduzida da circunferência

Uma circunferência λ com centro $C(x_C, y_C)$ e raio de medida **r** é o conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano que distam **r** de **C**:

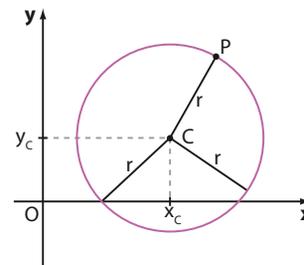
$$d_{PC} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

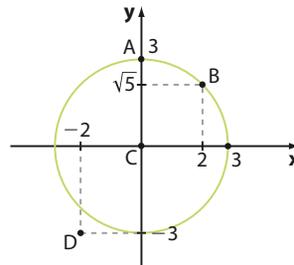
Elevando membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

chamada **equação reduzida da circunferência**, em que:

- $\mathbf{x_C}$ e $\mathbf{y_C}$ são as **coordenadas do centro C** da circunferência;

- **r** é a medida do **raio** da circunferência;
- **x** e **y** são as **coordenadas do ponto genérico P** — um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando **r** de **C**.

EXEMPLO 1

A equação reduzida da circunferência de centro C(0, 0) e raio de medida 3 é $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$, isto é, $x^2 + y^2 = 9$.

Note que o ponto A(0, 3) pertence a essa circunferência, pois $(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 9$.
Da mesma forma, o ponto $B(2, \sqrt{5})$ também pertence, pois $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$.
Já o ponto D(−2, −3) não pertence à circunferência, pois $(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9$.

EXEMPLO 2

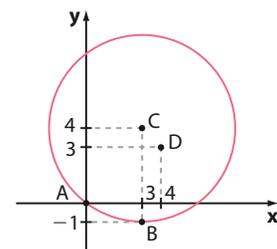
A equação reduzida da circunferência de centro C(3, 4) e raio de medida 5 é $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Note que os pontos A(0, 0) e B(3, −1) pertencem a essa circunferência, pois:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$$

e

$$(3 - 3)^2 + (-1 - 4)^2 = 25$$

O ponto D(4, 3) não pertence, pois $(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 25$.

# EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Qual é a equação reduzida da circunferência em que as extremidades de um diâmetro são A(4, 0) e B(0, 4)?

**Solução:**

O ponto médio de $\overline{AB}$ é o centro **C** da circunferência; então:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \text{ e } y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Portanto, **C** é (2, 2).

O raio **r** mede a metade da distância entre **A** e **B**:

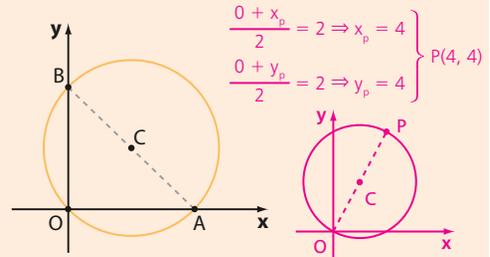
$$r = \frac{1}{2} d_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2, \text{ isto é,}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

O ponto diametralmente oposto à origem **O** é o ponto **P** da circunferência, tal que $\overline{OP}$ é um diâmetro. Então, C(2, 2) é ponto médio de $\overline{OP}$; portanto:

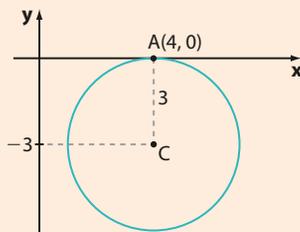
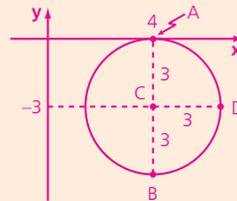
$$\frac{0 + x_P}{2} = 2 \Rightarrow x_P = 4$$
$$\frac{0 + y_P}{2} = 2 \Rightarrow y_P = 4$$
P(4, 4)

**PENSE NISTO:**

Qual é o ponto diametralmente oposto à origem **O**?

**2** Qual é a equação reduzida da circunferência que tem raio de medida 3, tangencia o eixo das abscissas no ponto A(4, 0) e está contida no quarto quadrante?

**Solução:**

O centro da circunferência é C(4, −3), e seu raio mede 3. Então, a equação reduzida é:

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

**PENSE NISTO:**

Entre todos os pontos dessa circunferência, qual é o de menor ordenada? E o de maior abscissa?

**3** Obtenha a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(−3, 0), B(2, 5) e D(1, 6).

**Solução:**

Este exercício pode ser resolvido de dois modos:

*1º modo:*

A equação reduzida é da forma $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, em que precisamos determinar $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{y_C}$ e **r**.

Como **A**, **B** e **D** pertencem à circunferência, suas coordenadas devem satisfazer sua equação, então:

$$\begin{cases} (-3 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 9 + 6x_C + x_C^2 + y_C^2 = r^2 & (1) \\ (2 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 4 - 4x_C + x_C^2 + 25 - 10y_C + y_C^2 = r^2 & (2) \\ (1 - x_C)^2 + (6 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow 1 - 2x_C + x_C^2 + 36 - 12y_C + y_C^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1), obtemos $x_C + y_C - 2 = 0$. (4)

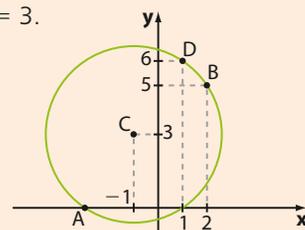
Subtraindo (3) de (2), obtemos $-x_C + y_C - 4 = 0$. (5)

Resolvendo o sistema formado por (4) e (5), obtemos: $x_C = -1$ e $y_C = 3$.

Substituindo $\mathbf{x_C}$ e $\mathbf{y_C}$ por seus valores em (1), temos:

$$(-3 + 1)^2 + (0 - 3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 13$$

A equação reduzida dessa circunferência é:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

*2º modo:*

O centro $C(x_C, y_C)$ dista igualmente de **A** e **B**, portanto pertence à mediatriz **r** de $\overline{AB}$ (reta perpendicular a $\overline{AB}$ traçada pelo seu ponto médio **M**). Então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{2+3} = 1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = -1$$

$$r: y - \frac{5}{2} = -1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x + y - 2 = 0 \quad (1)$$

Analogamente, o centro **C** pertence à mediatriz **s** de $\overline{BD}$ (reta perpendicular a $\overline{BD}$ traçada pelo seu ponto médio **N**). Então:

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},\ y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$$

$$m_{BD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-5}{1-2} = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_{BD}} = 1$$

$$s: y - \frac{11}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x - y + 4 = 0 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema de equações (1) e (2), encontramos $x = -1$ e $y = 3$. Então, $C(-1, 3)$.

$$\text{raio: } CA = \sqrt{(-1+3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

A equação reduzida dessa circunferência é $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$.

## EXERCÍCIOS

**1** Escreva a equação reduzida de cada circunferência descrita abaixo:

**a)** centro na origem e raio de medida 4.

**b)** centro $C(-2, 5)$ e raio de medida 3.

**c)** centro $C(3, -2)$ e raio de medida $\sqrt{7}$.

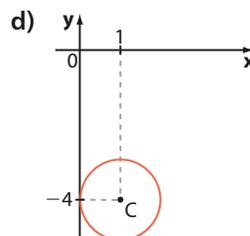
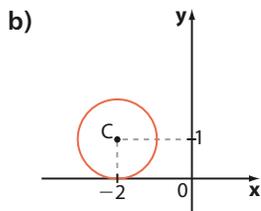
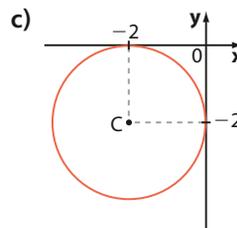
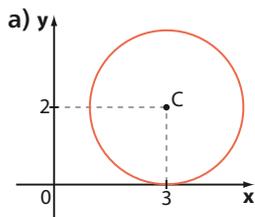
**d)** com diâmetro $\overline{AB}$, sendo $A(2, -2)$ e $B(6, 2)$.

**2** Escreva a equação reduzida de cada circunferência de centro **C** a seguir:

**a)**

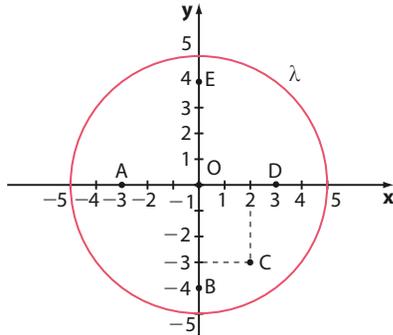
**c)**

**b)**

**d)**

**3** Há quatro circunferências que tangenciam os eixos coordenados e possuem raio unitário.

**a)** Quais são suas equações reduzidas?

**b)** Determine a área do quadrilátero que possui os vértices nos centros dessas circunferências.

**4** Observe esta figura:

Determine a equação reduzida da circunferência que:

**a)** tem centro **A** e passa por **O**;

**b)** é concêntrica com **λ** e passa por **A**;

**c)** tem diâmetro $\overline{BC}$;

**d)** tem centro **D** e passa por **E**.

**5** Uma circunferência passa pela origem e tem centro em $(-4, -3)$. Determine sua equação reduzida.

**6** A circunferência **λ** encontra-se no 2º quadrante, seu raio mede 3 e **λ** tangencia os eixos coordenados.

**a)** Qual é a sua equação reduzida?

**b)** **λ** passa por $(-2, 5)$?

**7** Sendo $A(-2, -6)$ e $B(2, 4)$, escreva a equação reduzida:

**a)** da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$;

**b)** de outra circunferência que passa por **A** e **B**.

**8** Determine os valores reais de **k** de modo que a circunferência de equação $(x - k)^2 + (y - 4)^2 = 25$ passe pelo ponto $(2k, 0)$.

**9** As retas r: $y = 2x - 1$ e s: $3x + 2y - 5 = 0$ intersectam-se em um ponto **P** da circunferência **λ**, de centro $(2, 4)$. Qual é o ponto diametralmente oposto a **P**?

**10** Uma circunferência **λ** tem equação reduzida $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Determine:

**a)** o ponto de **λ** mais distante do eixo das abscissas;

**b)** o ponto de **λ** mais distante do eixo das ordenadas.

**11** Seja **λ** a circunferência de equação $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ e seja $P(a + 1, a - 1)$ um ponto de **λ**.

**a)** Calcule **a**.

**b)** Para o valor positivo de **a** encontrado, calcule o coeficiente angular da reta que passa por **P** e pelo centro de **λ**.

**12** Determine a área de um quadrado circunscrito à circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 16$, em que **a** e **b** podem assumir quaisquer valores reais.

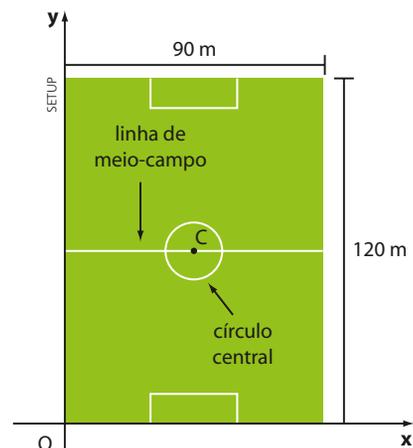
**13** Qual é o ponto da circunferência $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ mais distante do eixo **y**?

**14** O centro de uma circunferência pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Sabendo que os pontos $(3, -1)$ e $(7, 3)$ pertencem à circunferência, determine sua equação.

**15** Em cada caso, verifique se os pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados. A seguir, se possível, escreva a equação reduzida da circunferência à qual eles pertencem:

**a)** $A(-1, 3)$, $B(3, -1)$ e $C(1, 5)$

**b)** $A(2, 6)$, $B(-1, 0)$ e $C(-3, -4)$

**16** Um campo oficial de futebol tem 120 m de comprimento por 90 m de largura. O campo é dividido em duas partes iguais e o centro **C** é marcado com um ponto na metade da linha de meio-campo. O círculo central tem 18,30 m de diâmetro (para facilitar os cálculos, aproxime esse valor para 18 m):

Inserindo-se um sistema de coordenadas cartesianas de origem **O**, com eixos Ox e Oy de sentidos positivos indicados na figura, e sendo a unidade de medida de comprimento o metro, é possível determinar equações de retas e circunferências.

**a)** Escreva a equação da reta que passa por **O** e **C**.

**b)** Escreva a equação da circunferência que representa o círculo central.

# A equação geral da circunferência

A partir da equação reduzida de uma circunferência, $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, podemos desenvolver os produtos notáveis e obter uma equação equivalente. Temos:

$$x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y_C^2 = r^2$$

Agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$$

A equação destacada é conhecida como **forma geral da equação da circunferência** ou **equação geral da circunferência**, com centro $(x_C, y_C)$ e raio de medida **r**.

A circunferência com centro em $(-1, 3)$ e cujo raio mede 4, por exemplo, tem equação reduzida $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$; pode ser escrita como $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ na forma geral.

Dada a equação geral de uma circunferência, como podemos determinar seu centro e a medida de seu raio? Vamos conhecer agora dois métodos.

## Método I: completando os quadrados

Para determinarmos o centro e a medida do raio da circunferência representada, por exemplo, pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$ (ou mesmo saber se, de fato, a equação representa uma circunferência), utilizamos um processo prático que consiste em "completar quadrados" para podermos escrever a equação em sua forma reduzida:

- Agrupamos os termos em **x** e em **y** e passamos o termo independente para o 2º membro da igualdade:

  $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 23$ e escrevemos: $x^2 - 6x + \blacksquare + y^2 - 4y + \blacksquare = 23$

- Podemos notar que existem números reais que podem ser colocados no lugar do quadradinho azul e do quadradinho vermelho de modo a obter dois trinômios quadrados perfeitos (um em **x** e o outro em **y**). Esses números são 9 e 4, respectivamente, que também devem ser adicionados ao 2º membro da igualdade a fim de não alterá-la:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x - 3)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y - 2)^2} = 23 + 9 + 4 = 36$$

  Assim, transformamos a equação geral da circunferência, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$, na equação reduzida $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$ e, como sabemos, o centro é $(3, 2)$ e a medida do raio é 6.

## Método II: analisando os coeficientes

Nem sempre, porém, uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais, representa uma circunferência. Vamos analisar as condições que os coeficientes dessa equação devem satisfazer para que ela represente uma circunferência. Inicialmente vamos dividir os dois membros da equação por $A \neq 0$:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Comparando com a equação geral da circunferência, $x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$, obtemos as relações:

- $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$ (os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ devem ser iguais, mas não nulos)
- $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$ (não há termo em xy)
- $\frac{D}{A} = -2x_C \Rightarrow x_C = \frac{-D}{2A}$
- $\frac{E}{A} = -2y_C \Rightarrow y_C = \frac{-E}{2A}$
- $\frac{F}{A} = x_C^2 + y_C^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = x_C^2 + y_C^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{4AF}{4A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$ com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

São essas as relações que deverão ser satisfeitas para determinar se uma equação é realmente a equação de uma circunferência. Em caso afirmativo, elas servirão também para determinar as coordenadas do centro e a medida do raio.

**EXEMPLO 3**

Para verificar se a equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ representa uma circunferência e qual é ela, devemos testar as cinco condições:

- $A = B = 1 \neq 0$
- $C = 0$ (não há termo em xy)
- $x_C = \frac{-D}{2A} = \frac{-8}{2} = -4$
- $y_C = \frac{-E}{2A} = \frac{6}{2} = 3$

centro $C(-4, 3)$

- $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \sqrt{\frac{8^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11)}{4 \cdot 1^2}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = 6$ (o raio mede 6)

Para conferir, vamos agora usar o método de completamento de quadrados:

$$x^2 + 8x + ■ + y^2 - 6y + ■ = 11 + ■ + ■$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 11 + 16 + 9$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

Então, $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$ é a equação reduzida da circunferência de centro $(-4, 3)$ e raio de medida 6.

**EXEMPLO 4**

No estudo das cinco condições a respeito da equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$, temos:

- $A = B = 1 \neq 0$
- $C = 0$
- $\frac{-D}{2A} = \frac{4}{2} = 2$
- $\frac{-E}{2A} = \frac{-10}{2} = -5$
- $D^2 + E^2 - 4AF = (-4)^2 + 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 31 = 16 + 100 - 124 = -8 < 0$

Como não se verifica a quinta condição, não se trata de equação da circunferência. Conferindo, agora pelo método de completamento dos quadrados:

$$x^2 - 4x + ■ + y^2 + 10y + ■ = -31 + ■ + ■$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = -31 + 4 + 25$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = -2 \quad (*)$$

o que é impossível, pois o primeiro membro de (*) é uma soma de quadrados de dois números reais.

Assim, a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$ representa o conjunto vazio.

**PENSE NISTO:**

Quaisquer que sejam os números reais **a** e **b**, qual é o sinal de $a^2 + b^2$?

Como **a** é número real, $a^2 \geq 0$.
Como **b** é número real, $b^2 \geq 0$.
Então, $a^2 + b^2 \geq 0$, $\forall a\ \forall b$, ou seja, o sinal é positivo e a igualdade $a^2 + b^2 = 0$ só ocorre se **a** e **b** forem simultaneamente nulos.

## EXERCÍCIOS

**17** Verifique se as equações abaixo representam circunferências. Em caso afirmativo, forneça o centro e a medida do raio da circunferência que cada uma representa.

**a)** $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$

**b)** $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 73 = 0$

**c)** $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$

**d)** $x^2 + 2y^2 + 4x + 18y - 100 = 0$

**e)** $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$

**f)** $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$

**g)** $x^2 + y^2 - 20x + 99 = 0$

**h)** $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$

**18** Determine as coordenadas do centro e a medida do raio de cada circunferência:

**a)** $x^2 + y^2 - 6y = 0$

**b)** $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

**c)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

**d)** $2x^2 + 2y^2 + 16x - 32y + 134 = 0$

**19** Transforme, conforme o caso, a forma geral da equação da circunferência em reduzida (ou vice-versa):

**a)** $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 9 = 0$

**b)** $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$

**c)** $x^2 + y^2 - 5x - 9y + \frac{3}{2} = 0$

**d)** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{4}$

**20** Escreva a equação geral da circunferência que passa:

**a)** pela origem e tem centro $C(-1, -4)$.

**b)** por $(-1, -4)$ e tem centro na origem.

**21** Calcule a distância do ponto $P(4, 6)$ ao centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$.

**22** Determine os valores reais de **k** para que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y - k + 28 = 0$ seja de uma circunferência.

**23** Determine o maior valor inteiro de **k** de modo que $x^2 + y^2 + 6x + 14y + k = 0$ seja equação de uma circunferência.

**24** Determine a equação geral da reta que passa pelos centros das circunferências de equações $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 19$ e $x^2 + y^2 - (x + y + 1) = 0$.

**25** Qual é a distância entre os centros das circunferências de equações $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 12 = 0$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 11$?

**26** Determine o único valor real de **p** que faz com que as circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 + px - 6y - 17 = 0$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 4x - (p + 2)y - 10 = 0$ sejam concêntricas. Qual é o centro comum de $\lambda_1$ e $\lambda_2$?

**27** O centro de uma circunferência $\lambda$ pertence à reta **r** de equação: $2x - y + 4 = 0$. Sabe-se que $\lambda$ passa por $(2, 2)$ e $(-1, 5)$.

**a)** Determine a equação geral de $\lambda$.

**b)** Represente **r** e $\lambda$ em um mesmo plano cartesiano. Se desejar, use um quadriculado.

**28** Dadas as circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$, determine as coordenadas:

**a)** do ponto de maior abscissa de $\boldsymbol{\lambda_1}$;

**b)** do ponto de menor ordenada de $\boldsymbol{\lambda_2}$.

**29** Determine o perímetro do quadrado inscrito na circunferência de equação:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32$$

**30** Em certa cidade, foi decretado o rodízio de carros como forma de reduzir os congestionamentos e a emissão de poluentes. Ficou estabelecido que a limitação ao uso dos carros ficaria restrita à região formada pelas vias que distassem até 8 quilômetros do marco zero da cidade.

Vamos representar essa cidade em um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem é o marco zero da cidade, a unidade de medida de comprimento usada é o centímetro e a escala é de 1 : 20 000.

A região de abrangência do rodízio é limitada por uma circunferência. Determine, nesse sistema de coordenadas,

**a)** a equação dessa circunferência;

**b)** a área da região de abrangência do rodízio.

# Posições relativas entre ponto e circunferência

Todos os pontos de uma circunferência distam igualmente do centro e mantêm dele distância igual à medida do raio. Assim, dada uma circunferência de centro **C** e raio de medida **r**, se a distância de um ponto **P** qualquer do plano cartesiano a **C** é diferente de **r**, então **P** é externo ou interno à circunferência.

**EXEMPLO 5**

A circunferência $\lambda$: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, de centro C(3, 1) e raio 5, passa pelo ponto P(−1, −2), pois:

$$(-1 - 3)^2 + (-2 - 1)^2 = 25$$

$\lambda$ também passa por Q(7, 4), pois:

$$(7 - 3)^2 + (4 - 1)^2 = 25$$

Mas $\lambda$ não passa pela origem **O**, pois:

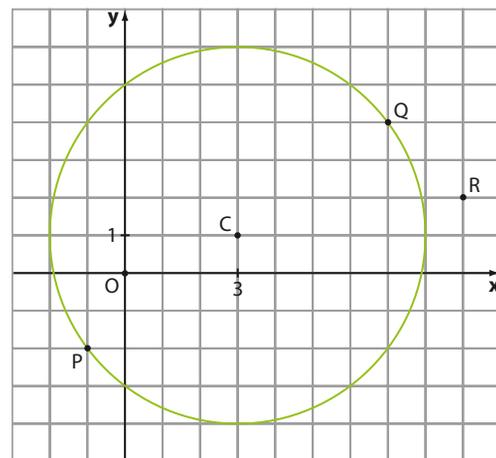
$$(0 - 3)^2 + (0 - 1)^2 \neq 25$$

O ponto R(9, 2) também não pertence a $\lambda$, já que:

$$(9 - 3)^2 + (2 - 1)^2 \neq 25$$

Observe que:

- $d_{OC} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10} < 5 = r$, e **O** é interno a $\lambda$.
- $d_{RC} = \sqrt{(9 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{37} > 5 = r$, e **R** é externo a $\lambda$.

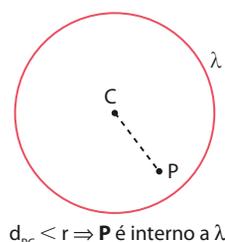
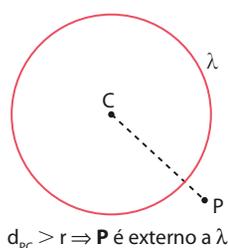
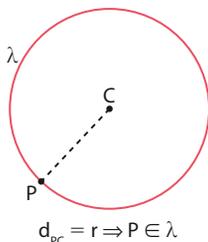
Trata-se, portanto, de uma simples comparação de distâncias.

Para uma circunferência $\lambda$ de centro $C(x_C, y_C)$, raio de medida **r** e um ponto **P** qualquer do plano, distinto de **C**, compararemos $d_{PC}$ com **r**.

Há três possibilidades:

- Se $d_{PC} = r$, então **P** pertence à circunferência.
- Se $d_{PC} > r$, então **P** é externo à circunferência.
- Se $d_{PC} < r$, então **P** é interno à circunferência.

$d_{PC} = r \Rightarrow P \in \lambda$

$d_{PC} > r \Rightarrow$ **P** é externo a $\lambda$

$d_{PC} < r \Rightarrow$ **P** é interno a $\lambda$

No exemplo 5, em que foi dada a equação reduzida da circunferência, determinamos a posição de um ponto dado em relação à circunferência calculando a distância entre o centro e o ponto em questão e comparando-a com a medida do raio.

De modo geral, dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma circunferência $\lambda$ de equação $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, temos:

- $P \in \lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 = 0$
- **P** externo a $\lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 > 0$
- **P** interno a $\lambda \Leftrightarrow d^2_{CP} < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 - r^2 < 0$

**EXEMPLO 6**

Para determinar a posição relativa entre a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ e o ponto P(2, 1), podemos fazer:

$$2^2 + 1^2 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 6 = -3 < 0$$

concluindo que o ponto **P** é interno à circunferência.

Já o ponto Q(5, 1) pertence à circunferência, pois:

$$5^2 + 1^2 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 6 = 0$$

E o ponto R(6, 2) é externo a ela, pois:

$$6^2 + 2^2 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 6 = 6 > 0$$

Resumindo, dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e a equação geral $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A > 0$ e com todas as condições para que ela represente uma circunferência satisfeitas, basta substituirmos na equação as coordenadas do ponto dado e obtermos o valor numérico $M(x_0, y_0)$ da expressão do primeiro membro da equação.

- Se $M(x_0, y_0) = 0$, então **P** é ponto da circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) < 0$, então **P** é interno à circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) > 0$, então **P** é externo à circunferência.

## EXERCÍCIOS

**31** Em relação à circunferência $\lambda$: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$, dê a posição dos pontos A(−2, 2), B(−5, 1), D(−1, 2), E(0, 1) e F(−5, −1).

**32** Dê a posição dos pontos A(−1, 2), B(3, 6), O(0, 0), D(−1, −4) e E(3, 0) em relação à circunferência $\lambda$: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

**33** O ponto (3, −3) pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$. Determine o valor de **k**.

**34** O ponto (−3, k) pertence à circunferência $\lambda$ de equação $x^2 + y^2 + 12x + 4y + 15 = 0$.

**a)** Determine os possíveis valores reais de **k**.

**b)** Considere o triângulo cujos vértices são o centro de $\lambda$ e os pontos de abscissa −3 pelos quais passa $\lambda$. Qual é a área desse triângulo?

**35** Para quais valores reais de **p** o ponto (−3, p) é interno à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$?

**36** Para quais valores reais de **p** o ponto (−1, p) não é interno à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 7x + 2y - 11 = 0$?

**37** Para que valores reais de **m** o ponto (m, 0) é externo à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 5 = 0$?

**38** Considere a circunferência $\lambda$ que passa por P(−1, 4) e P'(−3, −2), sendo **P'** diametralmente oposto a **P**. Qual é a posição do ponto Q(−2, 4) em relação a $\lambda$?

**39** Uma circunferência $\lambda$ de centro $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$, em que $k \in \mathbb{R}^*_+$, tangencia os eixos coordenados, no 1º quadrante.

Determine:

**a)** a equação reduzida de $\lambda$.

**b)** a posição da origem (0, 0) em relação a $\lambda$.

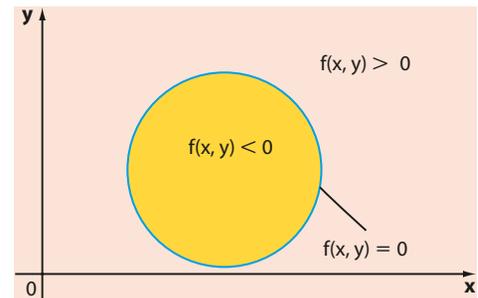
**c)** a posição do ponto (k, k) em relação a $\lambda$.

**d)** a posição do ponto $\left(0, \frac{k}{2}\right)$ em relação a $\lambda$.

# Inequações do 2º grau com duas incógnitas

Uma aplicação do estudo sobre as posições relativas entre um ponto e uma circunferência é o desenvolvimento de um método para resolver inequações do 2º grau da forma $f(x, y) > 0$ ou $f(x, y) < 0$, em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma circunferência com coeficiente de $x^2$ positivo.

Dada a circunferência $\lambda$ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos: $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$; o plano cartesiano fica dividido em três subconjuntos:

- subconjunto dos pontos $(x, y)$ exteriores a $\lambda$, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0$, isto é, satisfazem a desigualdade $f(x, y) > 0$.
- subconjunto dos pontos $(x, y)$ pertencentes a $\lambda$, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, isto é, satisfazem a igualdade $f(x, y) = 0$.
- subconjunto dos pontos $(x, y)$ interiores a $\lambda$, para os quais $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0$, isto é, satisfazem a desigualdade $f(x, y) < 0$.

Nos exercícios resolvidos a seguir, veremos como resolver graficamente inequações do 2º grau com duas incógnitas.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

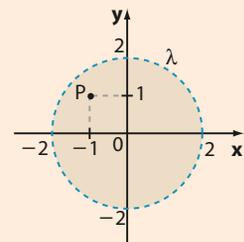
**4** Resolva graficamente a inequação $x^2 + y^2 < 4$.

**Solução:**

Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, e $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência $\lambda$ de centro $(0, 0)$ e raio 2.

O conjunto de pontos que tornam $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos internos a $\lambda$.

Veja, por exemplo, o ponto $P(-1, 1)$. Se $x = -1$ e $y = 1$, então $f(x, y) < 0$:

$$f(-1, 1) = (-1)^2 + 1^2 - 4 = -2 < 0$$

**5** Qual é a solução gráfica da inequacão: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 \leqslant 0$?

**Solução:**

Fazemos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = (x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 6 =$$
$$= (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 4$$

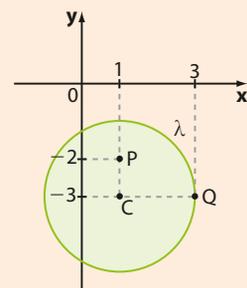
Então $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência $\lambda$ de centro $C(1, -3)$ e raio 2.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \leqslant 0$ é o conjunto dos pontos interiores a $\lambda$, reunidos com os pontos de $\lambda$.

Veja, por exemplo, o ponto $P(1, -2)$. Suas coordenadas satisfazem $f(x, y) < 0$:

$$f(1, -2) = 1^2 + (-2)^2 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 6 = -3 < 0$$

Já o ponto $Q(3, -3)$ pertence à circunferência, pois, se $x = 3$ e $y = -3$, então $f(x, y) = 0$:

$$f(3, -3) = 3^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-3) + 6 = 9 + 9 - 6 - 18 + 6 = 0$$

**6** Represente graficamente o conjunto de pontos do plano que satisfazem a desigualdade $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 \geqslant 0$.

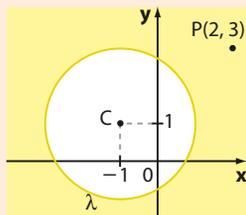
**Solução:**

Fazendo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 =$$
$$= (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 2 =$$
$$= (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$$

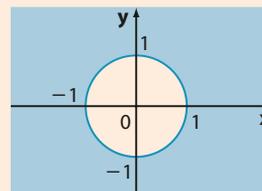
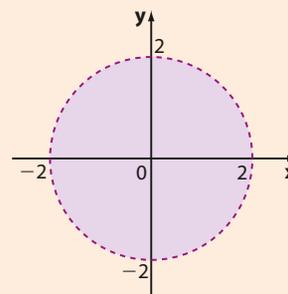
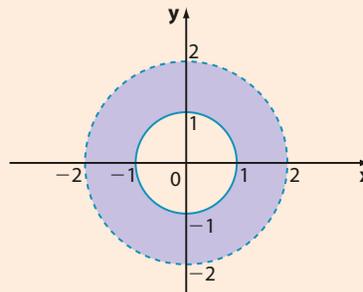
$f(x, y) = 0$ representa a circunferência $\lambda$ de centro $C(-1, 1)$ e raio 2.

O conjunto solução de $f(x, y) \geqslant 0$ é o conjunto de todos os pontos do plano, exceto os pontos internos a $\lambda$. Veja, por exemplo, o ponto $P(2, 3)$. Suas coordenadas satisfazem $f(x, y) > 0$, pois:

$$f(2, 3) = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 = 9 > 0$$

**7** Resolva graficamente o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$.

**Solução:**

O conjunto solução da inequação $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$ é o conjunto dos pontos do plano cartesiano menos o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro na origem e raio de medida 1.

Veja a figura abaixo.

O conjunto solução da inequação $x^2 + y^2 - 4 < 0$ é o conjunto dos pontos internos à circunferência com centro na origem e raio de medida 2. Veja a figura abaixo.

Como as duas inequações devem ser simultaneamente satisfeitas, basta fazer a interseção dos dois conjuntos obtidos. A solução do sistema é a coroa circular colorida da figura abaixo.

## EXERCÍCIOS

**40** Resolva graficamente as seguintes inequações:

**a)** $x^2 + y^2 \leqslant 1$

**b)** $x^2 + y^2 < 1$

**c)** $x^2 + y^2 \geqslant 1$

**d)** $x^2 + y^2 > 1$

**41** Resolva graficamente as inequações:

**a)** $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 > 0$

**b)** $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leqslant 0$

**c)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \leqslant 0$

**d)** $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 > 0$

**42** Resolva graficamente os sistemas de inequações:

**a)** $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 2 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

**43** Apresente a solução gráfica do sistema:

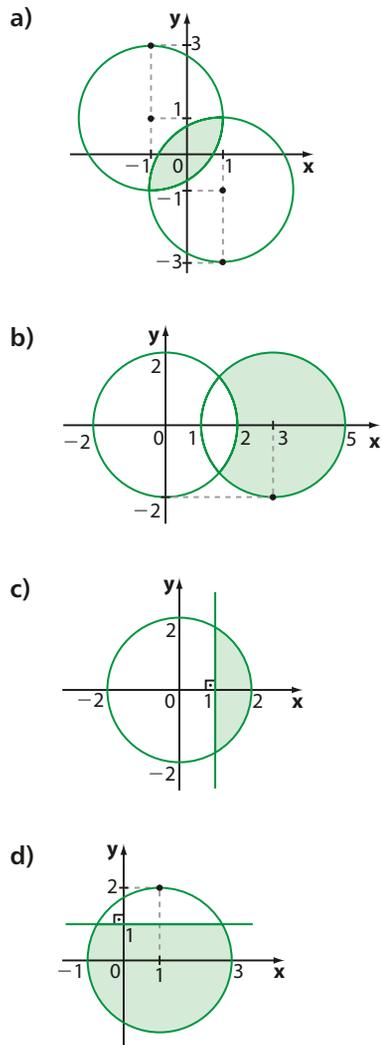
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

**44** Em cada caso, caracterize, por meio de duas desigualdades, o conjunto sombreado:

**a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**45** Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

**46** Em cada item, represente, no plano cartesiano, a região de pontos **P** cujas coordenadas (x, y) satisfazem as condições dadas; em seguida, determine a área da região:

**a)** $x + y \leqslant 2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 4$

**b)** $x + y \geqslant 2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 4$

**47** Representando a região central de um pequeno município em um sistema de coordenadas cartesianas, em que a unidade de medida de comprimento é o quilômetro, é possível localizar alguns pontos de referência da cidade por meio de suas coordenadas:

praça central: (0, 0); escola municipal: (−4, 0); posto de saúde: (0, −6).

O prefeito pretende construir um edifício residencial para suprir a carência habitacional do município. Esse edifício deve ser equidistante da escola e do posto de saúde.

Estudos preliminares feitos por técnicos de engenharia mostram que seria possível construir esse edifício em um ponto cuja distância à praça central poderia variar de 2 quilômetros, no mínimo, a 4 quilômetros, no máximo.

Caso o parecer dos técnicos seja confirmado, represente, nesse sistema de coordenadas, o conjunto de pontos que satisfazem, simultaneamente, a intenção do prefeito e o parecer, ou seja, o conjunto de pontos onde seria possível construir o edifício. Não se esqueça de fornecer as equações das retas e circunferências envolvidas.

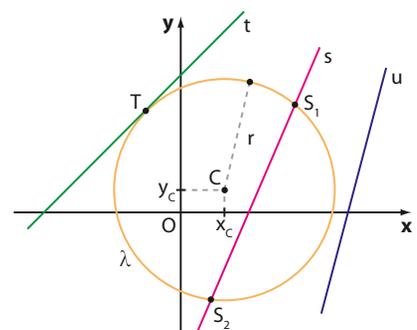
## Posição relativa de reta e circunferência

Seja uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio **r**. No plano existem retas que intersectam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não intersectam a circunferência em ponto algum.

Essas retas são chamadas, respectivamente, **secantes**, **tangentes** e **externas à circunferência**.

Na figura:

- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, e **s** é secante à circunferência.
- $t \cap \lambda = \{T\}$, e **t** é tangente à circunferência.
- $u \cap \lambda = \varnothing$, e **u** é externa à circunferência.

Vejamos, por meio de exercícios resolvidos, como analisar essas posições relativas, baseando-se na determinação da quantidade de pontos comuns à reta e à circunferência.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**8** Qual é a posição relativa de r: $x - y + 4 = 0$ e $\lambda$: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$?

**Solução:**

Vamos verificar se existem pontos de interseção entre elas.

Inicialmente, podemos isolar **y** na equação de **r**, obtendo $y = x + 4$.

Substituindo esse valor na equação da circunferência, temos:

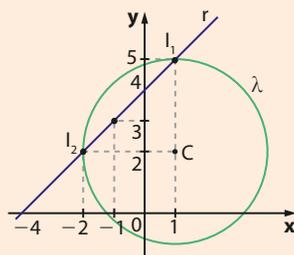
$$x^2 + (x + 4)^2 - 2x - 4(x + 4) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 + 8x + 16 - 2x - 4x - 16 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Calculando o discriminante da equação $\Delta = 1 + 8 = 9$, vemos que ela possui duas raízes reais e distintas. Cada uma delas é a abscissa de um ponto de interseção entre **r** e $\lambda$. Assim, a reta é secante à circunferência.

Temos, então:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = x + 4 = 1 + 4 = 5 \\ \text{ou} \\ x = -2 \Rightarrow y = x + 4 = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

Assim, $I_1(1,\ 5)$ e $I_2(-2,\ 2)$ são os pontos de interseção entre **r** e $\lambda$.

A representação gráfica abaixo confirma a resolução algébrica apresentada.

**PENSE NISTO:**

Qual é o comprimento da corda que **r** determina em $\lambda$?

O comprimento da corda que **r** determina em $\lambda$ é a distância $I_1I_2$, a saber $d = \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.

**9** Qual é a posição relativa de r: $2x + y + 2 = 0$ e $\lambda$: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$?

**Solução:**

No estudo da posição relativa entre a reta **r** e a circunferência $\lambda$ podemos repetir o raciocínio do exercício resolvido 8.

Isolamos **y** na equação da reta, $y = -2x - 2$, e substituímos na equação de $\lambda$:

$$(x - 1)^2 + (-2x - 2 - 1)^2 = 5$$
$$(x - 1)^2 + (-2x - 3)^2 = 5$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 5$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0, \text{ com } \Delta = 4 - 4 = 0$$

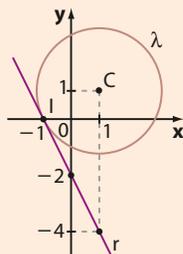
A equação possui apenas uma raiz real, que é a abscissa do único ponto comum a **r** e $\lambda$. Assim, a reta é tangente à circunferência.

Temos, então:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

Assim, $y = -2x - 2 = -2(-1) - 2 = 0$.

Logo, $I(-1,\ 0)$ é o ponto de tangência entre **r** e $\lambda$, como mostra o gráfico abaixo.

O ângulo mede 90°.
Essa é uma propriedade de Geometria Plana: toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

**PENSE NISTO:**

Qual é a medida do ângulo que **r** forma com $\overleftrightarrow{CI}$?

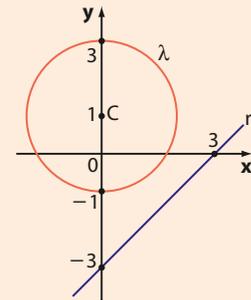
**10** Qual é a posição relativa de r: $x - y - 3 = 0$ e λ: $x^2 + (y - 1)^2 = 4$?

**Solução:**

Para estudar a posição relativa entre elas, podemos isolar **y** na equação da reta e substituir esse valor na equação da circunferência, chegando a uma equação do 2º grau.

Substituindo $y = x - 3$, temos:

$$x^2 + (x - 3 - 1)^2 = 4$$
$$x^2 + (x - 4)^2 = 4$$
$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

Essa equação, por possuir discriminante negativo ($\Delta = -8 < 0$), não possui raízes reais. Assim, não há pontos de interseção entre **r** e λ, ou seja, a reta é externa à circunferência, como mostra o gráfico ao lado.

O quadro a seguir apresenta um resumo de como obter a posição relativa entre uma reta e uma circunferência.

Se substituirmos o valor de uma das variáveis (isolada na equação da reta) na equação da circunferência, obteremos uma equação do 2º grau (na outra variável).

Calculando o discriminante da equação obtida, poderemos ter:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são secantes (há dois pontos de interseção).
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são tangentes (há um único ponto de interseção).
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ a reta é externa à circunferência (não há ponto de interseção).

Para encontrar os eventuais pontos comuns, basta prosseguir na resolução da equação.

## EXERCÍCIOS

**48** Em cada caso, dê a posição relativa entre **r** e λ:

**a)** r: $x - y = 0$ e λ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

**b)** r: $x - y + 1 = 0$ e λ: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

**c)** r: $x + y - 2 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

**d)** r: $2x - y - 1 = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

**49** Em cada caso, obtenha, se existir, os pontos de interseção entre a reta **r** e a circunferência λ:

**a)** r: $3x + 4y - 35 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

**b)** r: $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ e λ: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

**c)** r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ e λ: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$, em que $t \in \mathbb{R}$.

**50** Sabendo que a reta **r** passa por (1, 0), verifique a posição de **r** em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

**51** Determine os valores reais de **p** para que a reta de equação $2x - y + p = 0$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

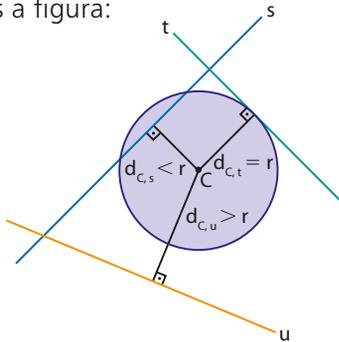
**52** Determine os valores reais de **k** de modo que a reta de equação $x + y + k = 0$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ seja:

**a)** tangente; **b)** secante; **c)** externa.

**53** Qual é o comprimento da corda cujas extremidades são os pontos de interseção de r: $2x - y = 0$ com λ: $x^2 + y^2 = 4$?

## Método alternativo

Existe outro processo, geralmente menos trabalhoso, para determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência. Por meio desse processo, uma vez conhecidos o centro e a medida do raio da circunferência, bem como a equação da reta, calcula-se a distância entre o centro da circunferência e a reta, comparando-a, em seguida, com a medida do raio.

Observemos a figura:

- $d_{C,\,s} < r \Leftrightarrow$ **s** é secante a $\lambda$.
- $d_{C,\,t} = r \Leftrightarrow$ **t** é tangente a $\lambda$.
- $d_{C,\,u} > r \Leftrightarrow$ **u** é externa a $\lambda$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**11** Seja a circunferência $\lambda$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$.

Dadas as retas f: $4x + 3y - 36 = 0$, g: $3x - y + 5 = 0$ e h: $x + y + 5 = 0$, verifique suas posições em relação a $\lambda$, calculando a distância entre cada uma delas e o centro **C** de $\lambda$.

**Solução:**

Completando os quadrados da equação da circunferência $\lambda$, encontramos C(2, 1) e r = 5.

- Quanto à reta **f**:

$$d_1 = d_{C,\,f} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 36|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

**f** é tangente à circunferência.

- Quanto à reta **g**:

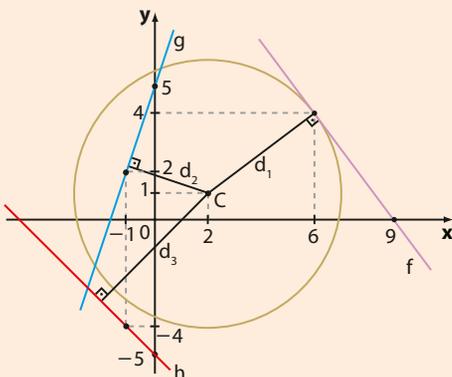
$$d_2 = d_{C,\,g} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} < 5 = r$$

**g** é secante à circunferência.

- Quanto à reta **h**:

$$d_3 = d_{C,\,h} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} > 5 = r$$

**h** é externa à circunferência.

Observe no gráfico abaixo a posição da circunferência e das três retas:

$\lambda: \begin{cases} C(2, 1) \\ r = 5 \end{cases}$

f:

| x | y |
|---|---|
| 6 | 4 |
| 9 | 0 |

g:

| x | y |
|---|---|
| 0 | 5 |
| –1 | 2 |

h:

| x | y |
|---|---|
| 0 | –5 |
| –1 | –4 |

**12** Seja o feixe de retas paralelas dado por r: $2x + y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, e a circunferência $\lambda$: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$ (centro C(1, 5) e raio de medida $\sqrt{5}$). Discuta, em função de **c**, a posição relativa de **r** e $\lambda$.

**Solução:**

Conforme os valores de **c**, as retas do feixe assumem diferentes posições em relação à circunferência.

Vamos calcular a distância **d** do centro **C** a uma reta genérica do feixe:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|7 + c|}{\sqrt{5}}$$

Há três possibilidades comparando-se essa distância com a medida do raio $(\sqrt{5})$ de $\lambda$:

- Para que a reta seja tangente à circunferência:

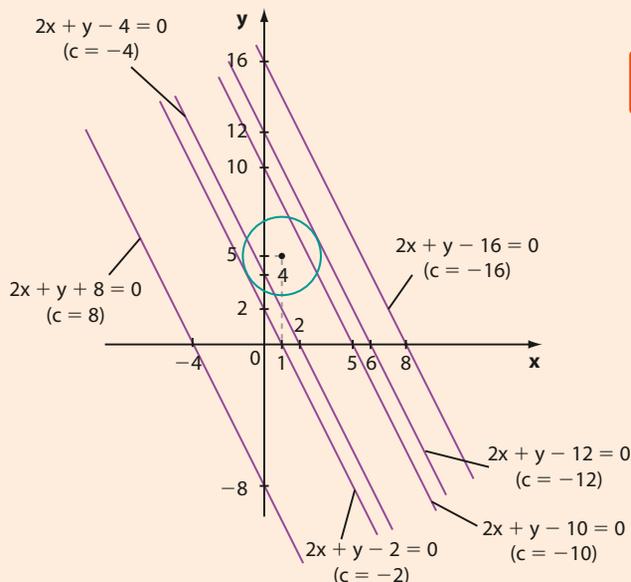
$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| = 5 \Rightarrow 7 + c = \pm 5 \Rightarrow c = -2 \text{ ou } c = -12$$

- Para que a reta seja secante à circunferência:

$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| < 5 \Rightarrow -5 < 7 + c < 5 \Rightarrow -12 < c < -2$$

- Para que a reta seja externa à circunferência:

$$\frac{|7 + c|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5} \Rightarrow |7 + c| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 7 + c > 5 \Rightarrow c > -2 \quad \text{ou} \\ 7 + c < -5 \Rightarrow c < -12 \end{cases}$$

Para alguns valores escolhidos para **c**, veja as posições das retas do feixe e da circunferência:

**PENSE NISTO:**

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, qual é o conjunto-solução da inequação $|x| < a$? E $|x| > a$?

Professor, o objetivo é lembrar a resolução de inequações modulares básicas:
$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
$|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > -a$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**54** Em cada caso, por meio do cálculo da distância entre o centro da circunferência $\lambda$ e a reta **r**, apresente a posição de **r** em relação a $\lambda$:

**a)** r: $x + 2y + 3 = 0$ e $\lambda$: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$

**b)** r: $x - 2y - 3 = 0$ e $\lambda$: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

**c)** r: $3x + y - 4 = 0$ e $\lambda$: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$

**d)** r: $4x - 3y - 24 = 0$ e $\lambda$: $x^2 + y^2 - 24x + 4y + 99 = 0$

**e)** r: $x - 2 = 0$ e $\lambda$: $4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$

**55** Em cada caso, determine o comprimento da corda determinada pela reta **r** sobre a circunferência $\lambda$:

**a)** r: $x + y - 5 = 0$ e $\lambda$: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

**b)** r: $3x - y = 0$ e $\lambda$: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

**56** Determine os valores reais de **k** de modo que a reta r: $3x - 4y - 18 = 0$ em relação à circunferência $\lambda$: $x^2 + y^2 - 2x + k = 0$ seja:

**a)** tangente; **b)** externa; **c)** secante.

**57** A reta de equação $2x + 3y - 1 = 0$ passa pelo centro da circunferência de equação $(x + m)^2 + (y - 1)^2 = 200$. Encontre o valor real de **m** e a medida do diâmetro da circunferência.

**58** Determine o ponto de $\lambda$: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ mais próximo da reta r: $x + y + 11 = 0$.

**59** Determine as equações das retas paralelas ao eixo das abscissas e tangentes à circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

**60** Sejam **r** a reta de equação $y = x + 2$ e $\lambda$ a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + a = 0$, em que **a** é uma constante real. Determine o maior valor de **a** de modo que ocorra interseção entre **r** e $\lambda$.

**61** Obtenha a equação geral da circunferência de centro (1, 2) que tangencia a reta de equação $5x + 12y + 10 = 0$.

**62** Na figura abaixo, sabe-se que Q(2, 5) é o ponto de ordenada máxima da circunferência de centro **C**.

**a)** Determine a soma das coordenadas de **P**.

**b)** Obtenha as equações das retas paralelas a **r** e tangentes a essa circunferência.

**63** Dê o valor de **k** $\in \mathbb{R}$ para que a equação $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$ seja a equação de uma circunferência e determine no eixo das abscissas uma corda de comprimento 3.

**64** Determine as equações das retas tangentes a $\lambda$: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ que são:

**a)** horizontais;

**b)** verticais;

**c)** perpendiculares a r: $3x - 4y = 0$.

**65** Qual é a distância entre as retas tangentes à circunferência $\lambda$: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 20y - 15 = 0$ que são paralelas a r: $6x - 8y + 15 = 0$?

**66** Determine a equação reduzida da circunferência que passa por (3, 0) e (5, 0) e é tangente à reta de equação $y + 10 = 0$.

**67** Encontre as equações das retas que tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ e formam ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo.

**68** Seja $\lambda$ uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Sendo $\lambda$ tangente à reta de equação $y = x$ no ponto de ordenada 4, determine a equação de $\lambda$.

# Interseção de circunferências

Dadas duas circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$, achar a interseção de $\lambda_1$ com $\lambda_2$ é determinar os pontos P(x, y) que pertencem a ambas as curvas e que, portanto, satisfazem ao sistema formado por suas equações.

Por meio de exercícios resolvidos mostraremos como fazer isso.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**13** Obtenha a interseção das circunferências $\lambda_1$: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e $\lambda_2$: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

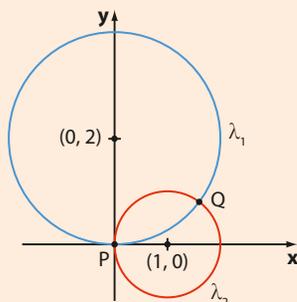
**Solução:**

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 & (1) \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Subtraindo, membro a membro, (2) de (1), obtemos: $-4y + 2x = 0$ e, daí: $x = 2y$ (3).

Substituindo (3) em (1), resulta:

$$(2y)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow 5y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Concluímos que as circunferências têm dois pontos em comum: P(0, 0) e $Q\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{(0, 0), \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)\right\}$$

**14** Obtenha a interseção das circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 49$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

**Solução:**

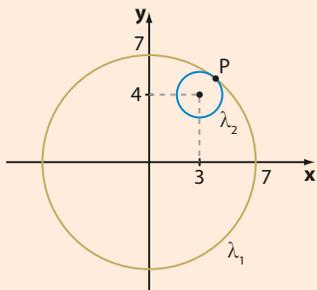
Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 & (1) \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 & (2) \end{cases}$

Subtraindo, membro a membro, (2) de (1), obtemos:

$$6x + 8y - 21 = 49 \Rightarrow x = \dfrac{70 - 8y}{6} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), resulta:

$$\left(\dfrac{70 - 8y}{6}\right)^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 100y^2 - 1\,120y + 3\,136 = 0 \Rightarrow (10y - 56)^2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{28}{5} \Rightarrow x = \dfrac{21}{5}$$

Concluímos que essas circunferências têm um único ponto comum: $P\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{28}{5}\right)$.

$$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{28}{5}\right)\right\}$$

A área da região interna a $\lambda_1$ e externa a $\lambda_2$ é a diferença entre as áreas dos círculos, limitadas por $\lambda_1$ e $\lambda_2$, ou seja: $\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 2^2 = 45\pi$

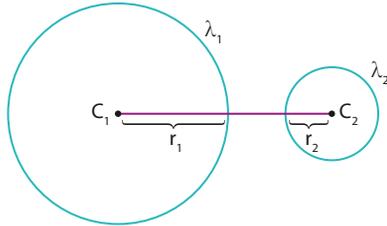
**PENSE NISTO:**

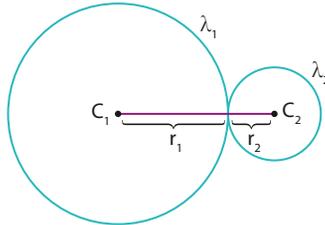
Qual é a área da região interna a $\lambda_1$ e externa a $\lambda_2$?

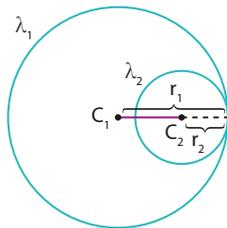
## Posições relativas de duas circunferências

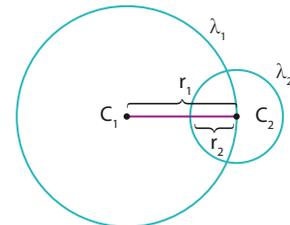
A posição relativa das circunferências $\lambda_1$ (com centro $\mathbf{C_1}$ e raio de medida $\mathbf{r_1}$) e $\lambda_2$ (com centro $\mathbf{C_2}$ e raio de medida $\mathbf{r_2}$) pode ser determinada comparando-se a distância $C_1C_2$ entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com o módulo da diferença $|r_1 - r_2|$ das medidas dos raios.

De acordo com a Geometria Plana, são possíveis cinco casos distintos:

- **1º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ exteriores

$$C_1C_2 > r_1 + r_2$$

- **2º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes exteriores

$$C_1C_2 = r_1 + r_2$$

- **3º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes interiores

$$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$$

- **4º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ secantes

$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$$

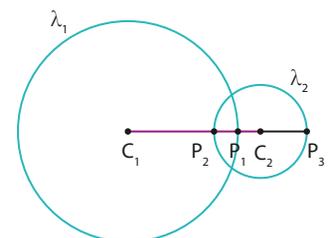
**Justificativa**

Considere $r_1 > r_2$ e $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$ pontos de $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, tais que $P_1 \in \boldsymbol{\lambda_1}$ e é interno à $\boldsymbol{\lambda_2}$, $P_2 \in \boldsymbol{\lambda_2}$ e é interno à $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $P_3 \in \boldsymbol{\lambda_2}$ e é externo à $\boldsymbol{\lambda_1}$. Temos:

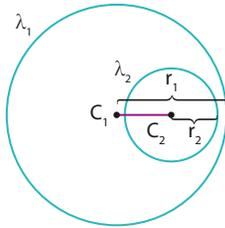
$C_1C_2 = C_1P_1 + C_2P_2 - P_1P_2 = r_1 + r_2 - P_1P_2$

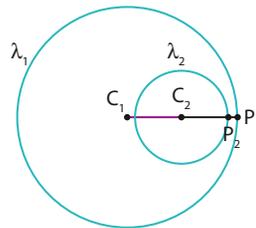
Como $P_1P_2 > 0$, segue que: $C_1C_2 < r_1 + r_2$ 

$C_1C_2 = C_1P_1 + P_1P_3 - C_2P_3 = r_1 + P_1P_3 - r_2$

Como $P_1P_3 > 0$, segue que: $C_1C_2 > r_1 - r_2$ 2

De (1) e (2), temos que $r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$.
Podemos ter também $r_1 < r_2$ e, para esse caso, obter $r_2 - r_1 < C_1C_2 < r_1 + r_2$.
Assim, consideramos o módulo da diferença entre as medidas dos raios e podemos escrever:

$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$$

- **5º caso: $\lambda_1$** e **$\lambda_2$** uma interna à outra

$$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

**Justificativa**
Considere $r_1 > r_2$, $\lambda_2$ interna a $\lambda_1$, e $P_1$ e $P_2$ pontos de $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, tais que $P_1 \in \lambda_1$, $P_2 \in \lambda_2$, $C_2$ está entre $P_1$ e $C_1$ e $P_2$ está entre $P_1$ e $C_2$.

Temos:
$C_1C_2 = C_1P_1 - C_2P_2 - P_1P_2$
$C_1C_2 = r_1 - r_2 - P_1P_2$
Como $P_1P_2 > 0$, temos que $C_1C_2 < r_1 - r_2$.
Também podemos ter $\lambda_1$ interna a $\lambda_2$, obtendo $C_1C_2 < r_2 - r_1$.
Assim, consideramos o módulo da diferença entre as medidas dos raios e podemos escrever:

$$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**15** Qual é a posição das circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 49$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$?

**Solução:**

$\lambda_1$ tem centro $C_1(0, 0)$ e raio de medida $r_1 = 7$ e $\lambda_2$ tem centro $C_2(3, 4)$ e raio de medida $r_2 = 6$.

$$C_1C_2 = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = 5$$

Comparemos $C_1C_2$ com a soma das medidas dos raios: $C_1C_2 = 5$ e $r_1 + r_2 = 13$. Notamos que $C_1C_2 < r_1 + r_2$ e concluímos que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ não podem ser exteriores, nem tangentes exteriormente.

Comparemos $C_1C_2$ com o módulo da diferença das medidas dos raios:

$$C_1C_2 = 5 \quad \text{e} \quad |r_1 - r_2| = 1$$

Notamos que $C_1C_2 > |r_1 - r_2|$ e concluímos que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ não podem ser uma interna à outra, nem tangentes interiormente. Então, por exclusão, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são secantes.

## EXERCÍCIOS

**69** Obtenha os pontos de interseção das circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 100$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$.

**70** Dadas as circunferências $\lambda_1$: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, determine seus pontos de interseção.

**71** Determine, em cada caso, a posição relativa de $\lambda_1$ e $\lambda_2$.

**a)** $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 16$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

**b)** $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 18$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 20x - 10y + 124 = 0$

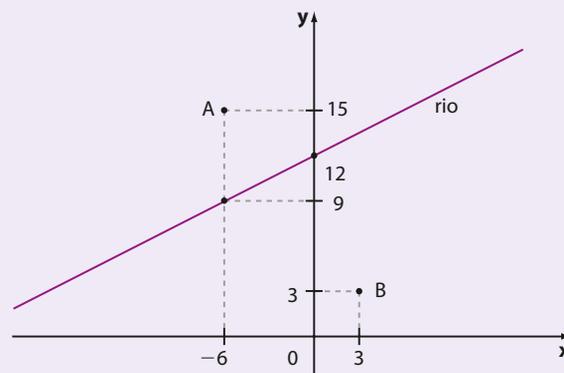
**c)** $\lambda_1$: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$

**d)** $\lambda_1$: $x^2 + y^2 = 81$ e $\lambda_2$: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

**72** Obtenha as equações das circunferências de centro C(2, −1) e tangentes à seguinte circunferência:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

## DESAFIO

Em um treinamento militar, um míssil será lançado de uma base **B** para atingir o alvo **A**. Um extenso rio retilíneo separa a região em que se encontra a base **B** da região onde está o alvo **A**. A figura a seguir ilustra essa situação em um plano cartesiano representado na escala 1 : 20 000. A unidade de medida de comprimento é o metro.

**a)** Qual é a distância real entre a base **B** e o alvo **A**?

**b)** Sabendo que os efeitos de destruição do míssil podem ser sentidos até 200 quilômetros do alvo, qual é a relação que deve ser satisfeita pelas coordenadas de um ponto P(x, y) desse plano para que esses efeitos sejam sentidos em **P**?

**c)** Qual é a área da região afetada pelo míssil representada nesse sistema cartesiano?

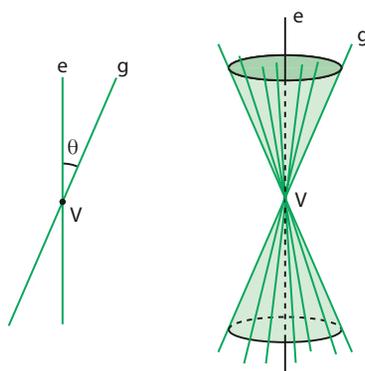
**d)** No plano cartesiano, o rio pode ser representado pela reta que passa pelos pontos (−6, 9) e (0, 12). Qual é o ponto desse rio mais próximo do alvo? A que distância real do alvo ele se encontra?

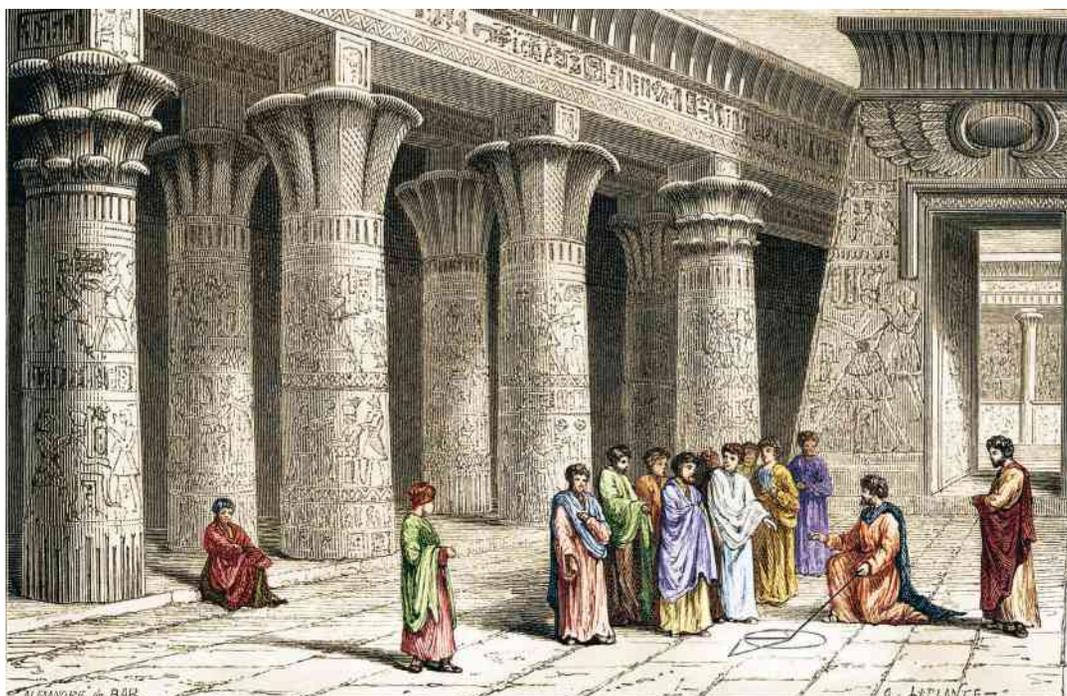
Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$ e indique o número inteiro mais próximo.

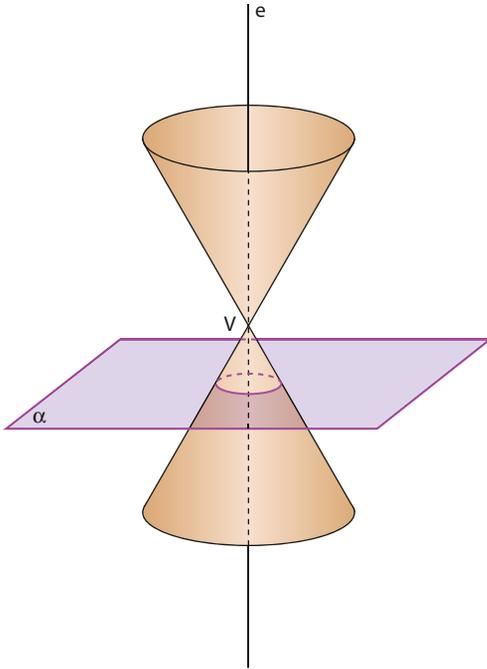
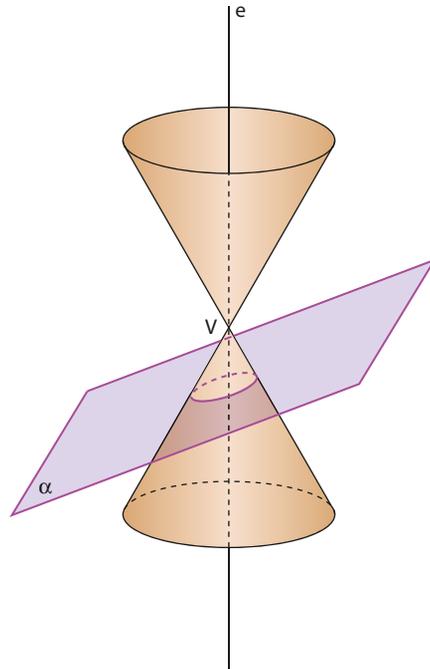
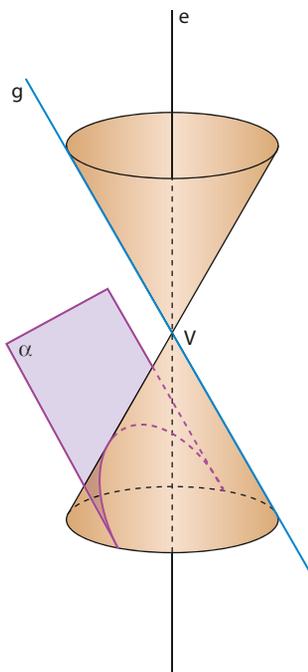
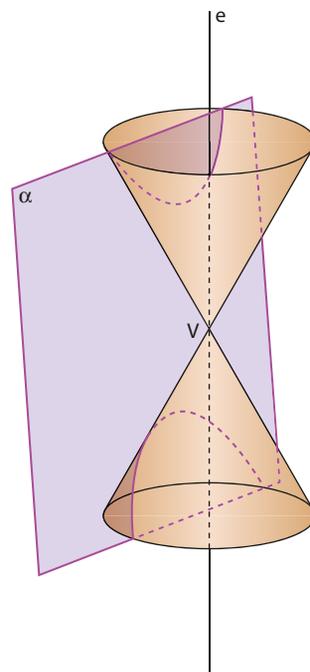
# As cônicas

## Introdução

Consideremos duas retas **e** e **g** concorrentes em **V** e não perpendiculares.

Com a reta **e** fixa, pelo ponto **V** façamos **g** girar 360° em torno de **e**, mantendo constante o ângulo de medida θ formado por elas. A reta **g** gera uma superfície denominada **superfície cônica de duas folhas**. A reta **g** é chamada **geratriz** dessa superfície.

Apolônio de Perga, cerca de 200 a.C., iniciou o estudo das curvas obtidas quando se seciona uma superfície cônica por um plano α. Dependendo da posição desse plano α, diferentes seções podem ser obtidas.

SHEILA TERRY/SPL/LATINSTOCK/COLEÇÃO PARTICULAR

Apolônio de Perga demonstrando suas teorias matemáticas em Alexandria. Gravura de C. Laplante, data desconhecida.

Se o plano α é perpendicular à reta **e**, a seção obtida é uma **circunferência**. Em particular, se α passa por **V**, a seção obtida é um ponto.

Se o plano α é oblíquo à reta **e**, mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **elipse**.

Se o plano **α** é paralelo a uma geratriz **g** da superfície cônica, a seção obtida é uma **parábola**.

Se o plano **α** é oblíquo à reta **e** e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **hipérbole**.

Neste capítulo faremos um estudo inicial da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas, juntamente com a circunferência, **seções cônicas**.

# Elipse

Observe as fotos abaixo.

GRAY BUILDINGS, DISTRICT OF COLUMBIA/GOOGLE EARTH

Imagem I. Parque *The Ellipse* (A elipse), na cidade de Washington, EUA, 2015.

PETER MUKHERJEE/E+/GETTY IMAGES

Imagem II. O contorno destacado da cuba de louça nos remete a uma elipse.

A imagem I mostra um importante marco da cidade de Washington, capital dos Estados Unidos: um parque chamado *The Ellipse* (A elipse).

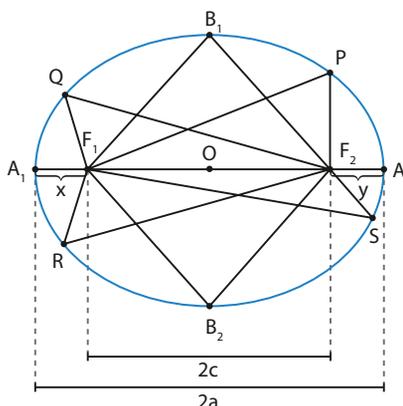
A imagem II mostra uma cuba de louça usada em pias de banheiros. Seus contornos lembram a cônica que passaremos a estudar: a elipse.

## O que é elipse?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano $\alpha$, seja 2c a distância entre eles e **O** o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. **Elipse** é o conjunto dos pontos de $\alpha$ cuja soma das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é igual à constante 2a ($2a > 2c$).

$$\text{elipse} = \{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

Assim, temos:

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$
$$RF_1 + RF_2 = 2a$$
$$SF_1 + SF_2 = 2a$$
$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$
$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$
$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$
$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$

Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$$

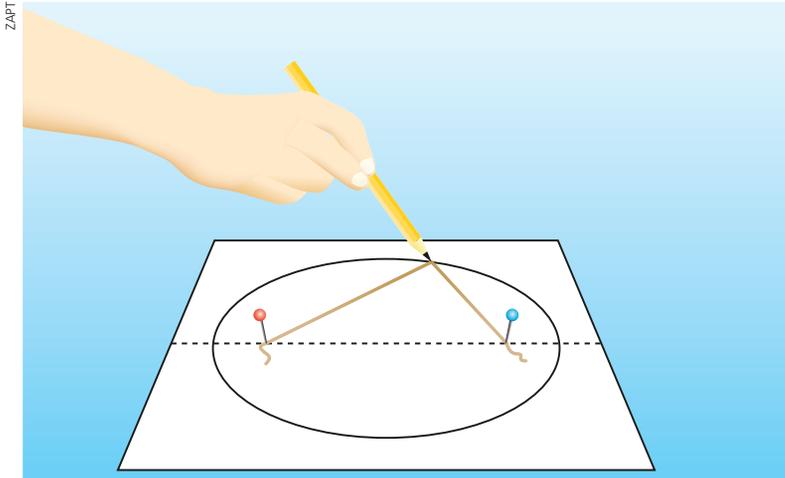
então:

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto, $x = y$.

Daí:

$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

Observe a figura a seguir para compreender o traçado de uma elipse.

Um barbante de comprimento 2a é fixado em dois pregos distantes 2c um do outro (observe que $2a > 2c$). Mantendo o barbante esticado, desloca-se a ponta do lápis. A curva que ele descreverá será uma elipse.

**PENSE NISTO:**

Por que o ponto **O** é também ponto médio de $\overline{A_1A_2}$?

$A_1O = x + c$
$A_2O = y + c$
Como $x = y$, então
$A_1O = A_2O$.

## Elementos principais

**$F_1$** e **$F_2$**: focos

**O**: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor

$\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são perpendiculares entre si

2c: distância focal

2a: medida do eixo maior

2b: medida do eixo menor

$\frac{c}{a}$: excentricidade (*)

(*) Veja, na seção *Aplicações* das páginas 96 e 97, o infográfico "As órbitas dos planetas".

Numa elipse, a medida do semieixo maior **a**, a medida do semieixo menor **b** e a metade da distância focal **c** verificam a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $OF_2B_1$.

**PENSE NISTO:**

Por que a medida de $\overline{B_1F_2}$ é igual a **a**?

**$B_1$** pertence à elipse, então $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$.
**$B_1$** pertence à mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, então $B_1F_1 = B_1F_2$.
Desse modo, $B_1F_1 = B_1F_2 = a$.

## Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$$\overline{A_1A_2} \subset Ox \text{ e } \overline{B_1B_2} \subset Oy$$

É fácil verificar que os focos são os pontos:

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0)$$

Chama-se **equação reduzida da elipse** a equação que o ponto genérico da curva, P(x, y), verifica.

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

Vamos deduzi-la.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

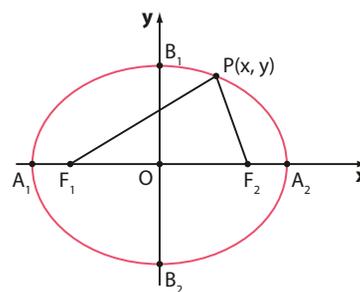
Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

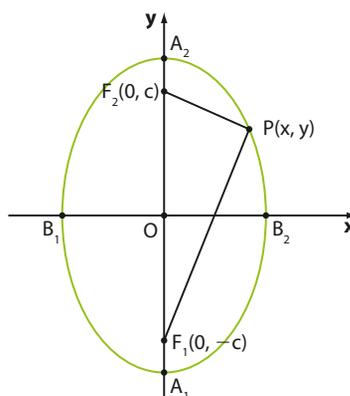
Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e, dividindo os dois membros da igualdade por $a^2b^2$, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## Equação reduzida (II)

Analogamente, se a elipse apresenta $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

e, repetindo o raciocínio anterior, decorre novamente a equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

**EXEMPLO 1**

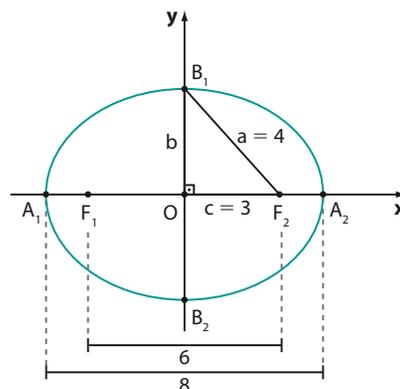
Uma elipse com eixo maior de medida 8 e distância focal de medida 6 apresenta:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

Se o eixo maior da elipse estiver contido no eixo **x**, a posição da elipse é a indicada na figura, isto é:

$$\overline{A_1A_2} \subset Ox \ \text{ e } \ \overline{B_1B_2} \subset Oy$$

então sua equação é:

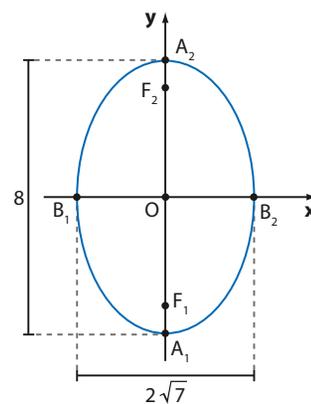
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

**EXEMPLO 2**

Uma elipse com eixo maior de medida 8 e eixo menor de medida $2\sqrt{7}$, com $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, isto é, na posição indicada na figura, tem equação:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$$

ou ainda:

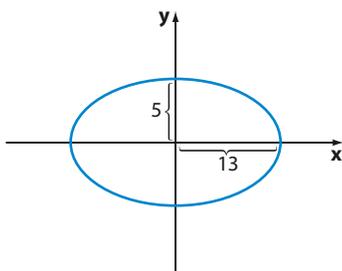
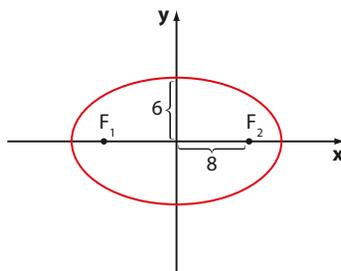
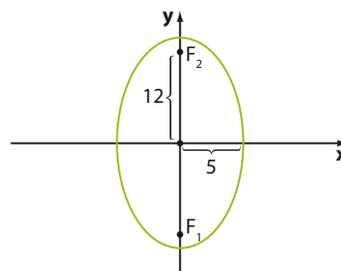
$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^2 = (\sqrt{7})^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{16 - 7} \Rightarrow c = 3$
Assim, os focos são $F_1(0, -3)$ e $F_2(0, 3)$.

**PENSE NISTO:**

Quais são as coordenadas dos focos dessa elipse?

## EXERCÍCIOS

**1** Determine as equações das elipses seguintes.

**a)**

**b)**

**c)**

**2** Determine as coordenadas dos focos de cada elipse do exercício anterior.

**3** Determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(-12, 0)$ e $F_2(12, 0)$ e que contém o ponto $P\left(12, \frac{27}{5}\right)$.

**4** Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse $\lambda$: $x^2 + 3y^2 = 6$.

**5** Determine a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P(1, \sqrt{6})$ e tem um foco $F_1(0, -2)$.

**6** Determine a equação da elipse cujos focos são os pontos $F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$, sendo 6 cm a medida de seu eixo menor.

**7** Encontre as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 16y^2 = 4$.

**8** Represente no plano cartesiano a elipse cuja equação é $x^2 + 2y^2 = 4$ e obtenha as coordenadas dos focos.

**9** Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$ é 8?

**10** Os pontos $A(3, 0)$ e $B(x, y)$ pertencem a uma elipse cujos focos são $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$. Calcule o perímetro do triângulo $BF_1F_2$.

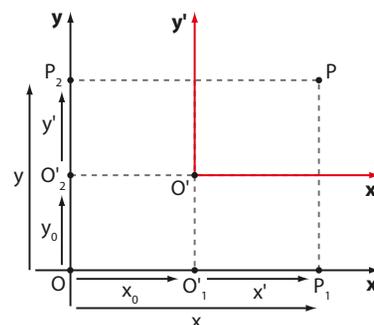
## Translação de sistema

Sejam $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ dois pontos referidos a um sistema cartesiano xOy.

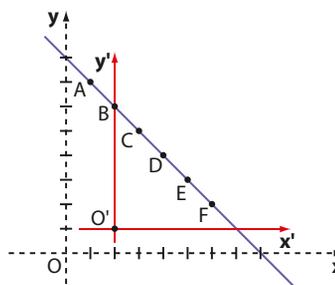
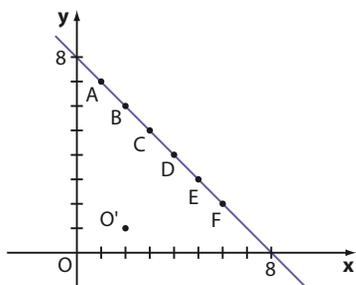
Se x'O'y' é um sistema tal que x' // x, y' // y e **x'**, **y'** têm respectivamente o mesmo sentido positivo de **x**, **y**, dizemos que x'O'y' foi obtido por uma translação de xOy.

Vamos estabelecer uma relação entre as coordenadas de **P** nos sistemas x'O'y' e xOy.

No eixo Ox, temos: $OP_1 = OO'_1 + O'_1P_1 \Rightarrow$ $x = x_0 + x'$

No eixo Oy, temos: $OP_2 = OO'_2 + O'_2P_2 \Rightarrow$ $y = y_0 + y'$

**EXEMPLO 3**

Consideremos a reta de equação $x + y - 8 = 0$. Eis alguns pontos que pertencem a essa reta:

A(1, 7), B(2, 6), C(3, 5), D(4, 4), E(5, 3), F(6, 2)

Se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja O'(2, 1), todos os pontos citados mudam de coordenadas, obedecendo à lei:

$x'$ (nova) $=$ $x$ (antiga) $-$ $2$ (origem **O'**)

$y' = y - 1$

Em relação ao sistema x'O'y' temos as novas coordenadas para os pontos **A** a **F**:

A(−1, 6), B(0, 5), C(1, 4), D(2, 3), E(3, 2), F(4, 1)

A equação da reta no sistema x'O'y' é obtida a partir de $x + y - 8 = 0$, fazendo $x = x' + 2$ e $y = y' + 1$. Assim:

$$x + y - 8 = 0 \Rightarrow (x' + 2) + (y' + 1) - 8 = 0 \Rightarrow x' + y' - 5 = 0$$

**EXEMPLO 4**

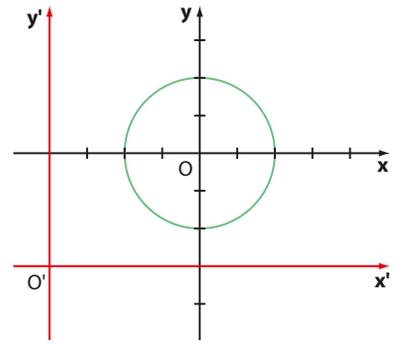
Consideremos a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Seu centro no sistema xOy é (0, 0) e seu raio é 2.

Se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja O'(−4, −3), todos os pontos mudam de coordenadas, obedecendo à lei:

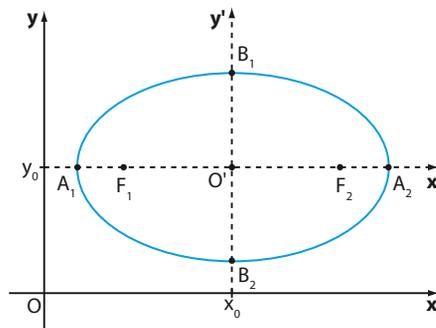
$$\underset{\text{(nova)}}{x'} = \underset{\text{(antiga)}}{x} + 4 \quad \text{e} \quad \underset{\text{(nova)}}{y'} = \underset{\text{(antiga)}}{y} + 3$$

A equação da circunferência em relação ao sistema x'O'y' pode ser obtida a partir de $x^2 + y^2 = 4$.

Assim:

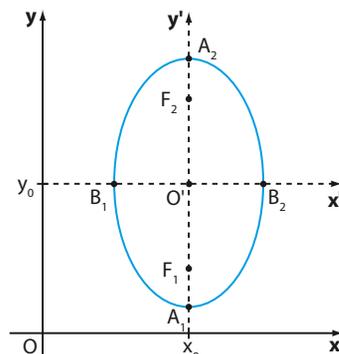
$$x^2 + y^2 = 4$$
$$(x' - 4)^2 + (y' - 3)^2 = 4$$

## Elipses com centro fora da origem e eixos paralelos aos eixos x e y

Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Ox, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'O'y' é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Portanto, de acordo com as "fórmulas" da translação vistas, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Oy, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Professor, lembre o estudante de que, no GeoGebra:
- a divisão é indicada por "/";
- a potenciação é indicada por "^";
- o uso de parênteses é obrigatório.

Note que, ao se apresentar a lei da cônica à esquerda na reprodução de cada tela, são usados valores decimais e os produtos notáveis são desenvolvidos (veja as expressões obtidas em "entrada"). No entanto, também é possível utilizar a equação na forma reduzida para traçar as cônicas no GeoGebra.

**EXEMPLO 5**

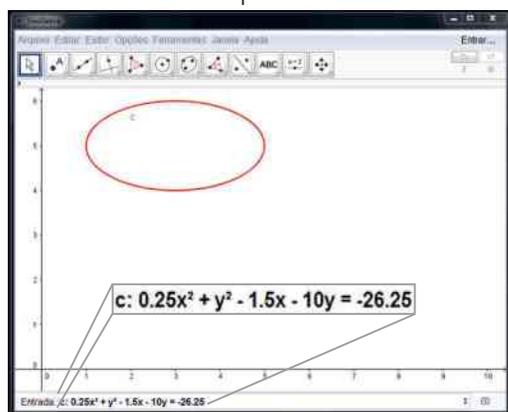
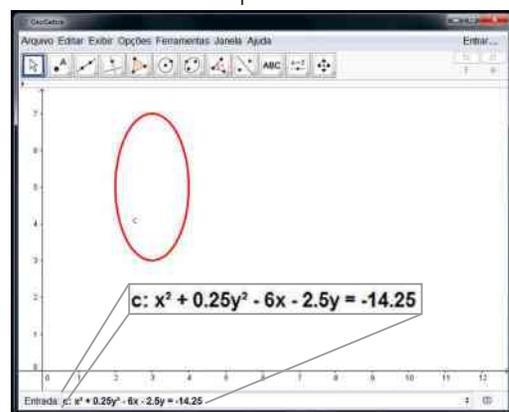
Uma elipse que tem centro no ponto O'(3, 5), semieixo maior a = 2 e semieixo menor b = 1 apresenta a equação:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{1} = 1 \text{ (se o eixo maior é paralelo ao eixo } \mathbf{x}\text{)} \quad \text{(I)}$$

ou:

$$\frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1 \text{ (se o eixo maior é paralelo ao eixo } \mathbf{y}\text{)} \quad \text{(II)}$$

Observe os dois gráficos dessas elipses traçados com auxílio do GeoGebra.

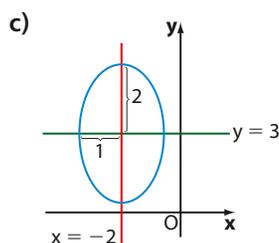
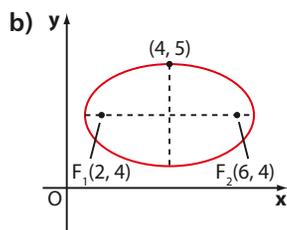
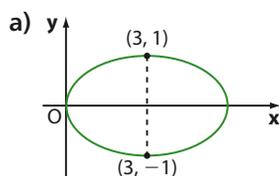
elipse I

elipse II

IMAGENS: GEOGEBRA

## EXERCÍCIOS

**11** Determine as equações das elipses seguintes.

a)

b)

c)

**12** Determine as coordenadas dos focos de cada elipse nos itens *a* e *c* do exercício anterior.

**13** O ponto C(−3, −2) é o centro de uma elipse tangente aos eixos coordenados. Se os eixos de simetria da elipse são paralelos aos eixos coordenados, escreva a equação da elipse.

**14** Determine a equação da elipse cujo centro é C(−2, −1), a qual passa pelos pontos A(−1, −1) e B(−2, −3), tendo os seus eixos paralelos aos eixos coordenados.

**15** A metade do eixo maior de uma elipse mede 5 cm e a distância focal é de 4 cm, sendo (2, 1) o centro dessa elipse. Se o eixo menor é paralelo ao eixo coordenado Ox, escreva a equação reduzida dessa elipse.

**16** Determine os focos da cônica de equação:

$$\frac{(x-3)^2}{169} + \frac{(y-2)^2}{144} = 1$$

Aplicações

# As órbitas dos planetas

## O modelo heliocêntrico

O movimento dos planetas e a configuração do Sistema Solar podem ser relacionados por um **modelo heliocêntrico**, proposto inicialmente pelo astrônomo Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) e retomado, entre outros, pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Copérnico era um astrônomo com grande inclinação para a Matemática e, entre outras realizações, acreditava que a Terra é um planeta como todos os outros e que gira em órbita circular ao redor do Sol (supostamente imóvel). Copérnico ordenou os planetas considerando sua distância em relação ao Sol e concluiu que, à medida que o planeta se aproxima do Sol, maior é sua velocidade orbital. A teoria heliocêntrica de Copérnico (considerada mais simples que a de Cláudio Ptolomeu, que perdurou por toda a Idade Média) derrubou a crença de que o homem era o centro da criação do Universo.

O astrônomo polonês Nicolau Copérnico e a sua representação do Modelo Heliocêntrico, em que as órbitas dos planetas em torno do Sol são **circulares**.



### Mercúrio

- Período de revolução (intervalo de tempo para que o planeta dê uma volta completa em torno do Sol): 88 dias terrestres.
- Diâmetro: 4 878 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,206 = 20,6%**

### Terra

- Período de revolução: 365 dias e 4 horas.
- Diâmetro: 12 800 km (pouco maior que o diâmetro de Vênus).
- A atmosfera terrestre nos protege contra pequenos corpos celestes externos (meteoros, por exemplo), que, em sua maioria, se queimam por meio do atrito com o ar antes de colidirem com a superfície terrestre.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0167 = 1,67%**

### O Sol

- Ocupa posição teoricamente fixa, correspondente a um dos focos das órbitas elípticas dos planetas.
- Para termos uma ideia do seu tamanho, seriam necessários 1 300 000 planetas com o mesmo diâmetro da Terra para preencher o interior do Sol.
- A temperatura em sua superfície é de aproximadamente 6 000 °C.

### Vênus

- Período de revolução: 225 dias terrestres.
- Diâmetro: 12 000 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,0068 = 0,68%**

## A excentricidade

As órbitas elípticas ocupam diferentes planos no espaço e têm diferentes tamanhos e formas. Para entender o aspecto dessas órbitas, é necessário entender o conceito de **excentricidade**.

Se uma elipse tem eixo maior de medida 2a e distância focal 2c, sua excentricidade (ou "achatamento") é dada por:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Como $c < a$, vemos que **e** é sempre um número pertencente ao intervalo ]0, 1[, isto é, $0 < e < 1$. Elipses que têm excentricidade próxima de 0 são pouco achatadas e têm forma muito próxima à de uma circunferência. Elipses que têm excentricidade próxima de 1 são bem achatadas.

Observe, na ilustração ao lado, as seis elipses, de diferentes excentricidades, tendo todas um eixo maior com medida igual a 2 cm.

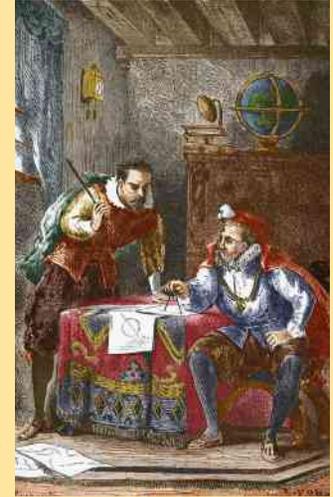
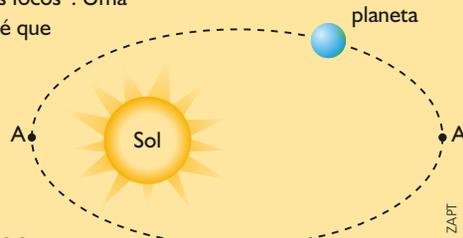
e = 0,1 | e = 0,4 | e = 0,6 | e = 0,7 | e = 0,8 | e = 0,9

Com base em medições, os astrônomos calcularam as excentricidades das órbitas dos planetas, mostradas neste infográfico. Observe, no infográfico, que, embora as órbitas dos planetas sejam elipses, de modo geral suas excentridades são tão pequenas que elas se parecem com círculos.

## As órbitas elípticas

Em 1546 (três anos após a morte de Copérnico), nasceu o astrônomo Tycho Brahe, que, usando instrumentos projetados e fabricados por ele mesmo, registrou as posições de planetas e estrelas com precisão admirável para a época (em que não existiam os telescópios). Brahe contratou, em 1600, um matemático alemão chamado Johannes Kepler (na época com 29 anos) para ajudá-lo na análise das informações coletadas. Com a morte de Brahe em 1601, Kepler deu continuidade à análise dos dados e determinou que a trajetória dos planetas em relação ao Sol não eram circunferências e sim **elipses**. No ano de 1609, Kepler enuncia a lei das órbitas elípticas: "A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos". Uma consequência dessa lei é que a distância do Sol a um planeta varia ao longo do seu movimento orbital (sendo mínima quando o planeta ocupa a posição **A** e máxima quando ocupa a posição **A'**). Foram as descobertas de Galileu Galilei (1564-1642) que proporcionaram grande quantidade de evidências, consolidando o sistema heliocêntrico.

planeta
A
Sol
A'
ZAPT

COLEÇÃO PARTICULAR. SHEILA TERRY/SCIENCE PHOTO LIBRARY

Neste quadro, observamos Johannes Kepler (à esquerda) e Tycho Brahe trabalhando com base nos dados das posições dos planetas levantados por Brahe. Autor e data desconhecidos.

CASA PAULISTANA DE COMUNICAÇÃO

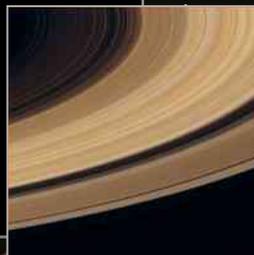
### Marte

- Período de revolução: 690 dias terrestres.
- Diâmetro: 6 800 km
- Excentricidade de sua órbita: **0,093 = 9,3%**
- Marte e os planetas mais próximos do Sol (Terra, Vênus e Mercúrio) são chamados de **planetas sólidos**.

### Júpiter

- É o maior planeta do Sistema Solar (diâmetro da ordem de 142 984 km).
- Período de revolução: 12 anos terrestres.
- Júpiter e os planetas mais distantes do Sol (Saturno, Urano e Netuno) são chamados de **planetas gasosos**.
- Excentricidade de sua órbita: **0,048 = 4,8%**

### Saturno

- Esse planeta é visivelmente achatado nos polos. Dessa forma, o seu diâmetro (medido na Linha do Equador) é da ordem de 119 300 km.
- Período de revolução: 29 anos e 6 meses terrestres.
- O sistema de anéis faz de Saturno um objeto celeste singular no Sistema Solar. Esses anéis são formados por poeira e água na forma sólida.
- Excentricidade de sua órbita: **0,056 = 5,6%**

NASA/JPL/SPACE SCIENCE INSTITUTE

### Urano

- Diâmetro: 51 800 km
- Período de revolução: 84 anos terrestres.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0461 = 4,61%**

### Netuno

- Se Netuno fosse um planeta oco poderia conter, em seu interior, aproximadamente 60 planetas com o mesmo diâmetro da Terra.
- Diâmetro: 49 500 km
- Período de revolução 165 anos.
- Excentricidade de sua órbita: **0,0097 = 0,97%**

ELEMENTOS SEM PROPORÇÃO ENTRE SI E EM CORES FANTASIA.

**Fontes de pesquisa:** *Movimento dos Planetas: Tycho, Kepler e Galileo*. Disponível em: <astro.if.ufrgs.br/movplan2/movplan2.htm>. Acesso em: 15 mar. 2016.; *O modelo heliocêntrico de Copérnico*. Disponível em: <www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Jose-Tarcisio-Costa/copernico.htm>. Acesso em: 15 mar. 2016.

# Hipérbole

Você já deve ter observado o que acontece quando se acende um abajur em um ambiente escuro: na parede, é possível visualizar duas regiões iluminadas. Seus contornos têm a forma da cônica que passaremos a estudar: a hipérbole.

MISHA GORDON/ALAMY/FOTOARENA

Professor, depois de caracterizar as curvas cônicas e apresentar os elementos da hipérbole, é interessante retomar essa imagem e esclarecer que os contornos das regiões iluminadas são ramos de duas diferentes hipérboles (e não da mesma).

Veja agora a foto ao lado, que mostra um conhecido ponto turístico de Brasília: a Catedral Metropolitana.

Projetada por Oscar Niemeyer, ela apresenta dezesseis pilares dispostos ao longo de um círculo. Os contornos desses pilares lembram uma hipérbole.

CASSANDRA CURY/PULSAR IMAGENS

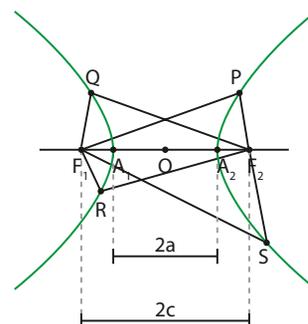
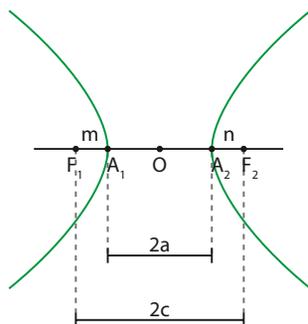
Catedral Metropolitana de Brasília (DF) em 2014.

## O que é hipérbole?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano $\alpha$, seja 2c a distância entre eles e **O** o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. **Hipérbole** é o conjunto dos pontos de $\alpha$ cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é a constante 2a (com $0 < 2a < 2c$).

$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Assim, temos:

$$|QF_2 - QF_1| = 2a$$
$$|RF_2 - RF_1| = 2a$$
$$|SF_1 - SF_2| = 2a$$
$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a$$
$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$$

Observe a figura abaixo. Vamos mostrar que m = n.

**PENSE NISTO:**

Por que o ponto **O** também é ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ ?

$A_1$ pertence à hipérbole, então:
$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow (A_1A_2 + n) - m = 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + n - m = 2a \Rightarrow n = m$
Como $OF_1 = OF_2$, decorre:
$m + A_1O = OA_2 + n \Rightarrow$
$\Rightarrow m + A_1O = OA_2 + m \Rightarrow A_1O = OA_2$

De fato:

$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a \Rightarrow A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - n) - n = 2a$$

então: $c = a + n$ (1)

$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \Rightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - m) - m = 2a$$

então: $c = a + m$ (2)

De (1) e (2), resulta m = n.

### Elementos principais

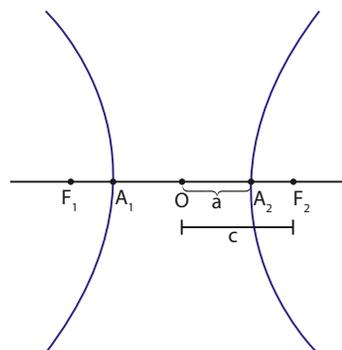
**$F_1$** e **$F_2$**: focos

**O**: centro

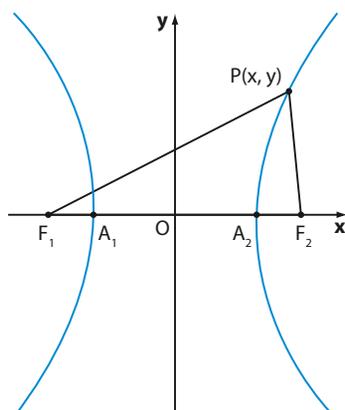
$\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso

2c: distância focal, em que $c = OF_1 = OF_2$

2a: medida do eixo real, em que $a = OA_1 = OA_2$

$\frac{c}{a}$: excentricidade

## Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $\overline{F_1F_2}$ esteja contido no eixo **x** e a reta perpendicular a esse segmento, passando por **O** (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$) seja o eixo **y**. O eixo real é $\overline{A_1A_2}$ e sua medida é 2a. Os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$

Chama-se **equação reduzida da hipérbole** a equação que o ponto genérico da hipérbole, P(x, y), verifica.

Vamos deduzi-la:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$(cx - a^2)^2 = a^2 \cdot (x - c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$ (observe que $a < c \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$), temos que:

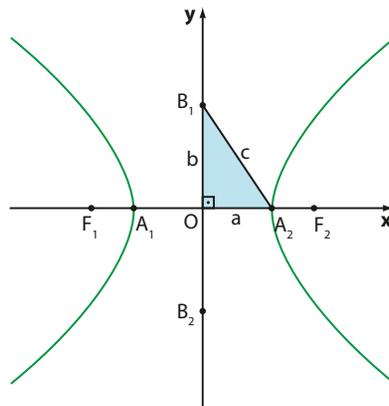
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo membro a membro por $a^2b^2$, resulta na equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

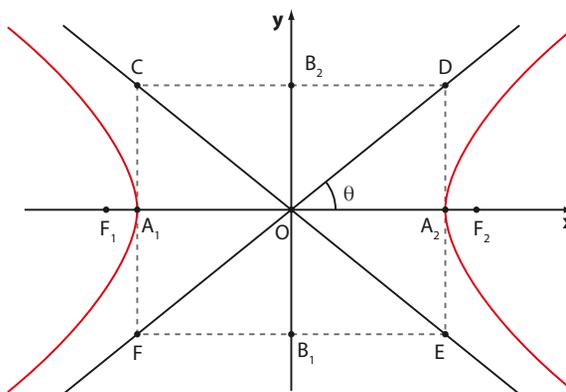
Observe que, se $x = 0$, temos:

$$\frac{0}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2$$

Como $b \in \mathbb{R}_+^*$, temos que $y \notin \mathbb{R}$. Desse modo, não há pontos em comum entre a hipérbole e o eixo **y**. Os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ não pertencem à hipérbole mas determinam o segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida 2b, que é chamado **eixo imaginário da hipérbole**.

$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

$B_1B_2 = 2b$: medida do eixo imaginário

Relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$

Traçando por $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ retas verticais e traçando por $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ retas horizontais, obtemos o retângulo CDEF, cujos vértices são as interseções dessas retas.

A reta suporte da diagonal $\overline{DF}$ passa por O(0, 0) e tem coeficiente angular igual a $\text{tg}\ \theta = \frac{b}{a}$.

Sua equação reduzida é $y = \frac{b}{a}x$.

Analogamente, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{CE}$ é $y = -\frac{b}{a}x$.

As retas de equações $y = \pm\frac{b}{a}x$ são chamadas **assíntotas** da hipérbole.

As assíntotas não intersectam a hipérbole, mas, na medida em que tomamos pontos da hipérbole muito afastados do centro **O** (para a esquerda de **O** ou à direita de **O**), o traçado da hipérbole "aproxima-se" das assíntotas.

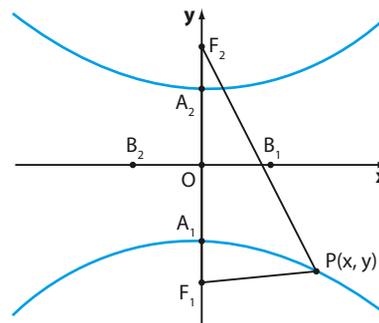
## Equação reduzida (II)

Analogamente ao que vimos, se a hipérbole apresenta eixo real $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e eixo imaginário $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$F_1(0, -c) \text{ e } F_2(0, c) \text{ em que } c > 0$$

Se P(x, y) pertence à hipérbole, então:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

Daí obtemos a equação da hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

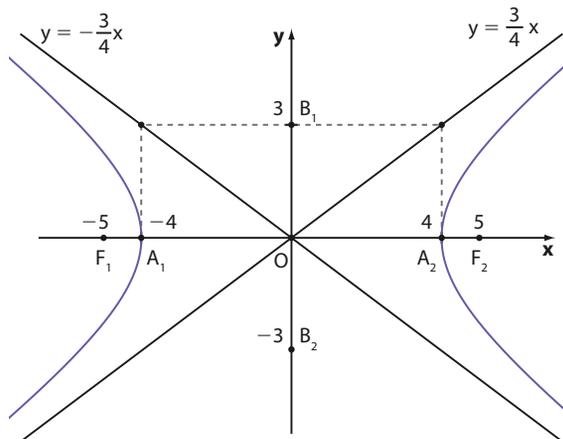
As assíntotas têm equações $y = \pm\frac{a}{b}x$.

**EXEMPLO 6**

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10 apresenta:

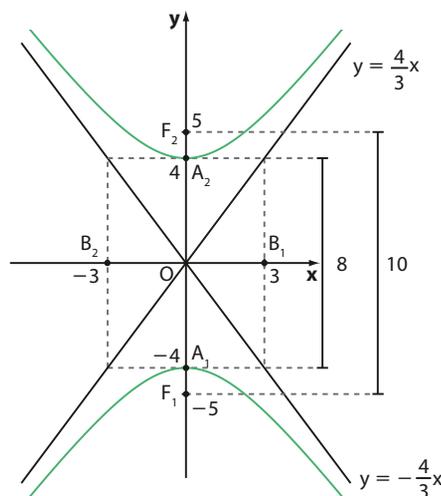
$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

Se o eixo real da hipérbole estiver contido no eixo **x**, a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Ox$ e $\overline{B_1B_2} \subset Oy$, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{3}{4}x$.

**EXEMPLO 7**

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10, na posição indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, tem equação:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Esta equação, evidentemente, não é equivalente à equação da hipérbole do exemplo 6:

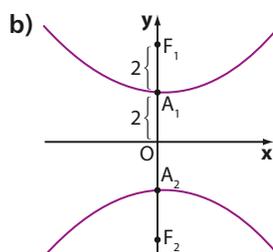
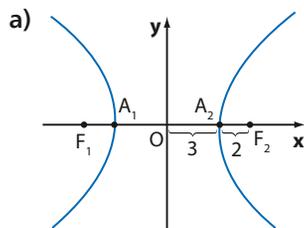
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{4}{3}x$.

## EXERCÍCIOS

**17** Em cada caso, determine as equações das hipérboles seguintes e de suas assíntotas:

**a)**

**b)**

**18** Determine as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior.

**19** Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$. Quais são as equações das assíntotas?

**20** Faça o que se pede:

**a)** Calcule a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$.

**b)** Represente essa hipérbole e suas assíntotas no plano cartesiano.

**21** Construa os gráficos das cônicas $\lambda$: $x^2 - y^2 = 1$ e $\lambda'$: $y^2 - x^2 = 1$. Seus gráficos são coincidentes?

**22** Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2 - y^2 = 300$.

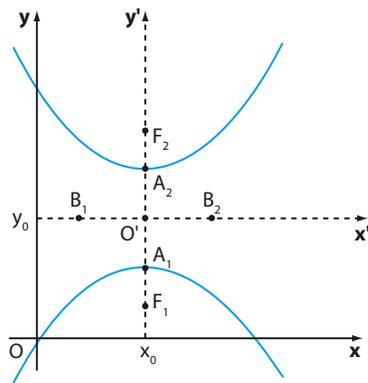
## Hipérboles com centro fora da origem

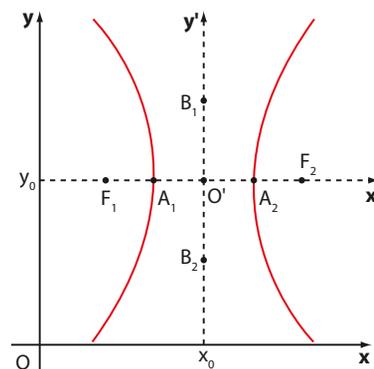
Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Ox, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'O'y' é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Observe a hibérbole a seguir, que tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ // Oy.

Analogamente, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

**EXEMPLO 8**

Uma hipérbole que tem centro no ponto O'(−2, −3), semieixo real a = 5 e semieixo imaginário b = 6 apresenta equação:

$$\frac{(x + 2)^2}{25} - \frac{(y + 3)^2}{36} = 1 \text{ (se o eixo real é paralelo ao eixo } \mathbf{x}\text{) (I)}$$

ou:

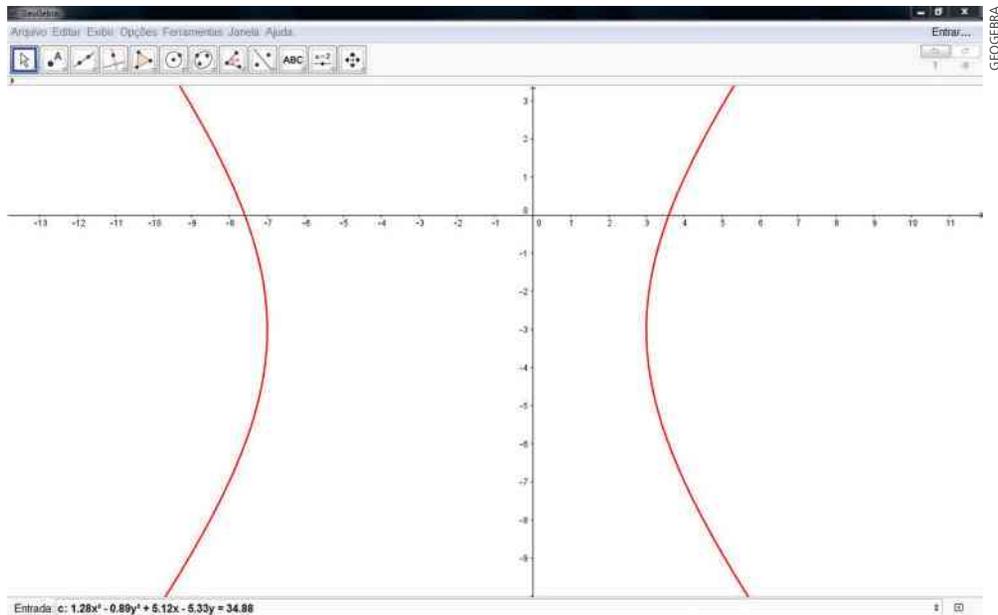
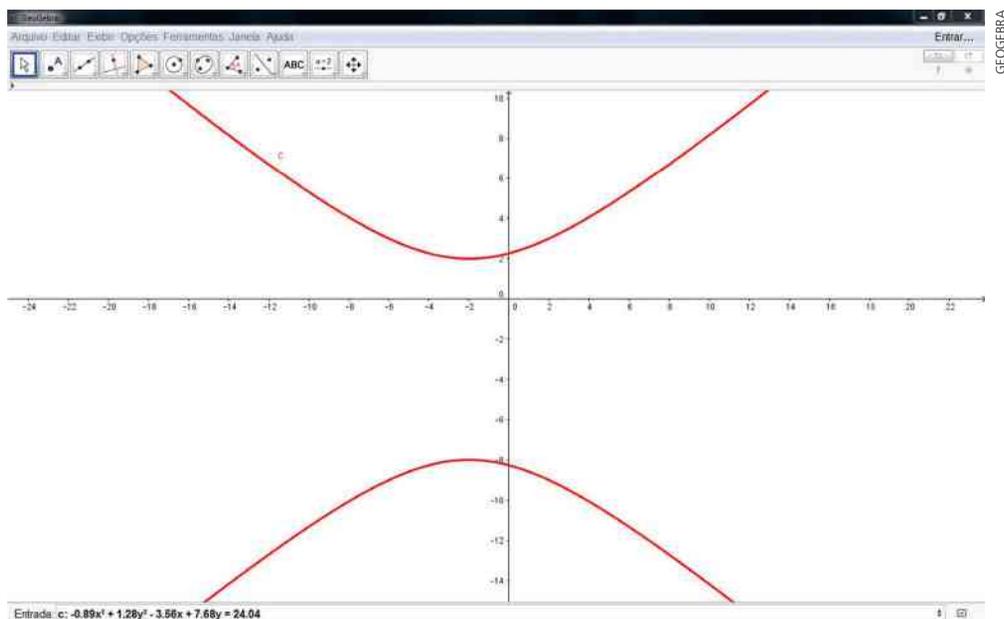
$$\frac{(y + 3)^2}{25} - \frac{(x + 2)^2}{36} = 1 \text{ (se o eixo real é paralelo ao eixo } \mathbf{y}\text{) (II)}$$

Veja, a seguir, as hipérboles de equações (I) e (II) construídos com auxílio do GeoGebra.

hipérbole I

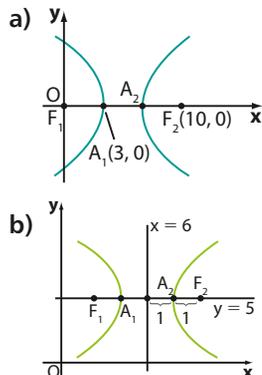
GEOGEBRA

hipérbole II

GEOGEBRA

# EXERCÍCIOS

**23** Determine as equações das hipérboles abaixo:

a)

b)

**24** Quais são as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior?

**25** Obtenha os focos da hipérbole cuja equação é $\frac{(x+1)^2}{13} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

**26** Qual é a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{(y-7)^2}{2} - \frac{(x+9)^2}{47} = 1$?

**27** Qual é a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$? Faça um esboço dessa cônica no plano cartesiano.

## Hipérboles e funções recíprocas

Vamos determinar a equação de uma hipérbole especial com as seguintes características:

- focos $F_1(-m, -m)$ e $F_2(m, m)$, com $m \in \mathbb{R}_+^*$, ambos na bissetriz dos quadrantes ímpares;
- hipérbole equilátera, ou seja, com a = b.

**OBSERVAÇÃO** 

Dizemos que uma hipérbole é **equilátera** se sua equação apresenta a = b.

Sabemos que a distância focal será:

$$2c = F_1F_2 = \sqrt{(m+m)^2 + (m+m)^2} = 2m\sqrt{2}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ e a = b, temos:

$$(m\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 2m^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = m \text{ (medida do semieixo real)}$$

Um ponto P(x, y) pertencente a essa hipérbole deve verificar a condição:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Então:

$$\sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} = \pm 2m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

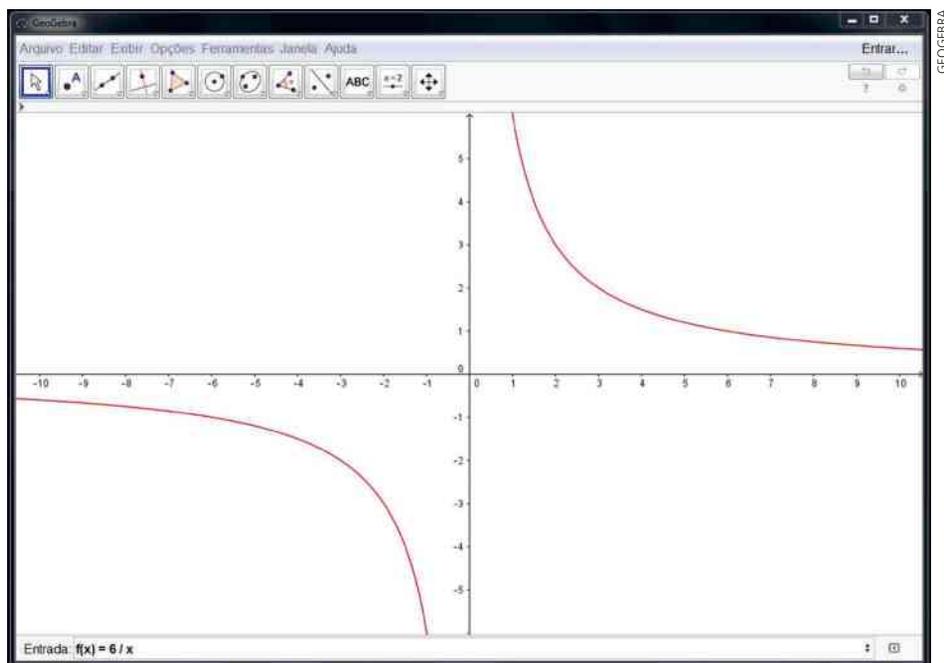
$$(x+m)^2 + (y+m)^2 = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} + (x-m)^2 + (y-m)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4xm + 4ym = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y - m = \pm\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente e fazendo as simplificações, chegamos finalmente a:

$$xy = \frac{m^2}{2}$$

que é a equação da hipérbole.

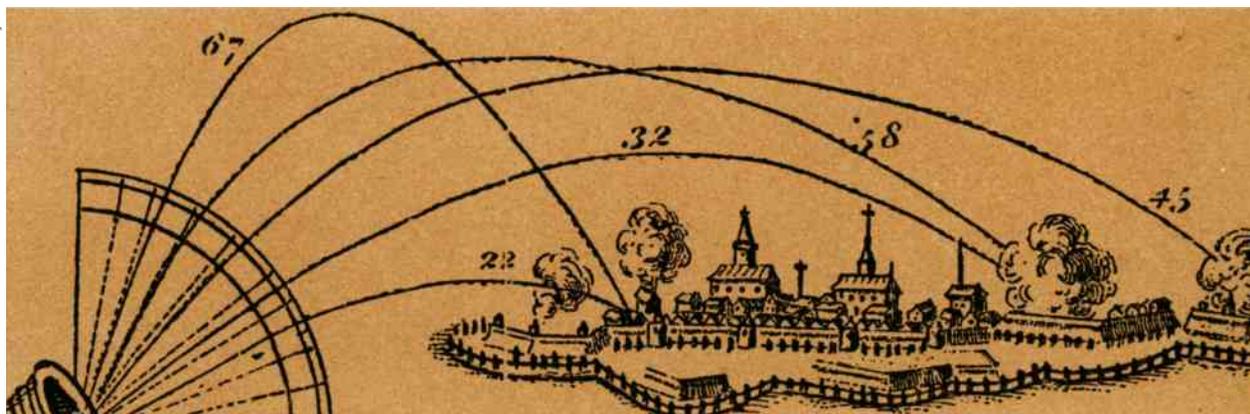
Se chamarmos a constante $\frac{m^2}{2}$ de **k**, a equação da hipérbole será xy = k. Observe que essa equação pode ser vista como $y = \frac{k}{x}$, portanto, a hipérbole é simplesmente o gráfico dessa função.

Observe, como exemplo, o gráfico da função recíproca $y = \frac{6}{x}$, construído com auxílio do GeoGebra.

Do estudo de funções temos que o gráfico de uma função definida por $y = \frac{k}{x}$ (com $k \neq 0$), chamada de função recíproca, é uma hipérbole. Agora, temos a comprovação disso.

Se duas grandezas **x** e **y** são inversamente proporcionais, isto é, se $x \cdot y = k$, o gráfico da função que relaciona os valores de **x** com os valores de **y** são os pontos de uma hipérbole.

## Parábola

A curva que descreve, por exemplo, o movimento de uma bala lançada por um canhão é chamada parábola.

O movimento com trajetória parabólica já era estudado por Galileu Galilei no século XVI. Observe abaixo uma ilustração elaborada por esse cientista.



Gravura que mostra trajetórias parabólicas de balas de canhão. Os números, próximos a cada parábola, indicam a inclinação do canhão em relação à direção horizontal.

As fotos seguintes mostram cartões-postais de duas cidades brasileiras. Na primeira, vemos as fontes de água do parque do Ibirapuera, em São Paulo. Na segunda, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília.

ALEXANDRE CARVALHO/FOTOARENA

Lago do parque do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2012.

PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

Ponte Juscelino Kubitschek, Brasília (DF), em 2010.

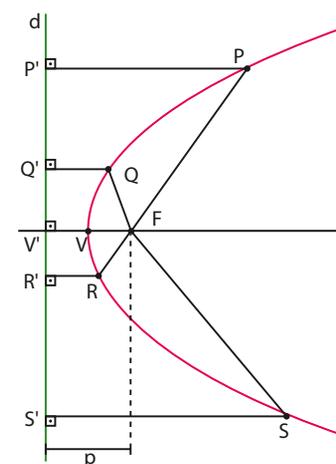
As imagens que acabamos de ver nos remetem a formas que se assemelham a parábolas. O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Façamos agora o estudo detalhado dessa cônica.

## O que é parábola?

Dados um ponto **F** pertencente a um plano $\alpha$ e uma reta **d** contida em $\alpha$, com $F \notin d$, seja **p** a distância entre o ponto **F** e a reta **d**. **Parábola** é o conjunto dos pontos de $\alpha$ que estão à mesma distância de **F** e de **d**.

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$$

Assim, temos:

$$VF = VV'$$
$$PF = PP'$$
$$QF = QQ'$$
$$RF = RR'$$
$$SF = SS'$$

### Elementos principais

**F**: foco

**d**: diretriz

**p**: parâmetro

**V**: vértice

$\overleftrightarrow{VF}$: eixo de simetria (é a reta que passa por **F** e é perpendicular à diretriz)

Relação notável: $VF = \dfrac{p}{2}$, pois $VF = VV'$.

## Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. Como a distância entre **F** e **d** é **p**, temos que $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, e a diretriz **d** tem equação:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Nessas condições, chama-se **equação reduzida da parábola** a equação que o ponto genérico da curva P(x, y) vai verificar. Vamos deduzi-la.

$$P \in \text{parábola} \Leftrightarrow PF = PP'$$

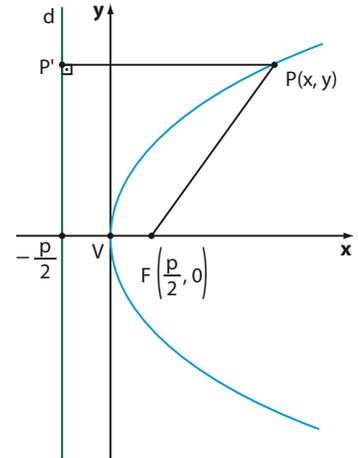
Então:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, obtemos:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando, resulta:

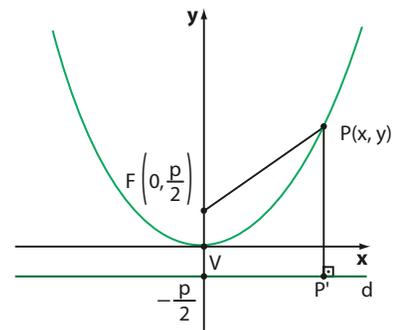
$$y^2 = 2px$$

## Equação reduzida (II)

Analogamente ao que já vimos, se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:

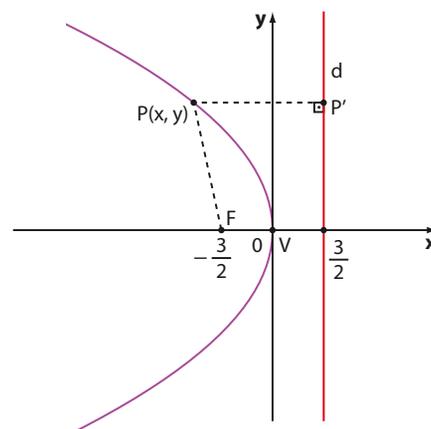
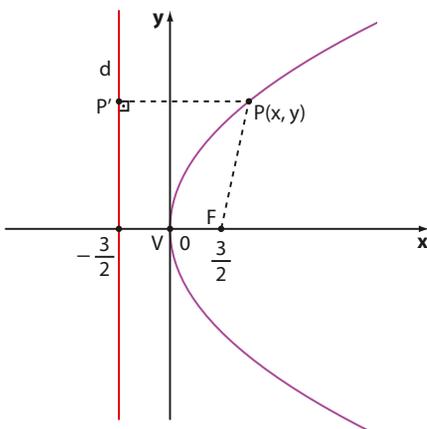
$$PF = PP'$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Daí, decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 2py$$

**EXEMPLO 9**

Uma parábola com parâmetro p = 3, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo Ox tem equação:

$y^2 = 6x$, se **F** está à direita de **V** ou $y^2 = -6x$, se **F** está à esquerda de **V**

Observe que:

- Se **F** está à direita de **V**, temos: $P'\left(-\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = 6x$$

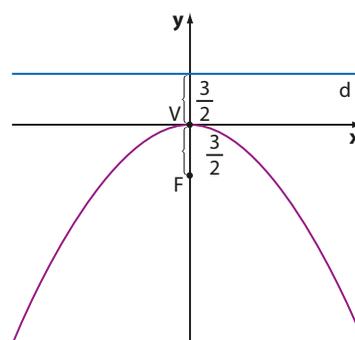
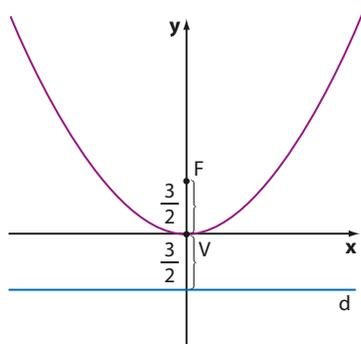
- Se **F** está à esquerda de **V**, temos: $P'\left(\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = -6x$$

**EXEMPLO 10**

Uma parábola com parâmetro p = 3, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo dos **y** tem equação:

$x^2 = 6y$, se **F** está acima de **V** ou $x^2 = -6y$, se **F** está abaixo de **V**

**PENSE NISTO:**

Observando esses últimos exemplos (9 e 10), que parábolas podem ser gráficos de funções de ℝ em ℝ?

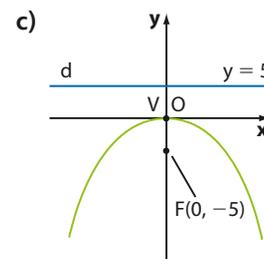
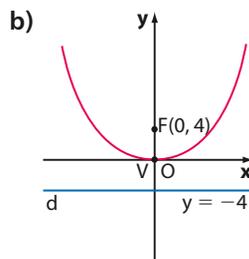
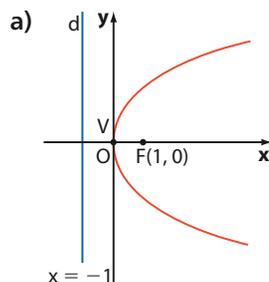
Somente as parábolas que têm eixo de simetria vertical (exemplo 10). Nessas, para cada valor real de **x** existe um único valor correspondente de **y**.

## EXERCÍCIOS

**28** Determine as equações das parábolas seguintes:

**a)**

**b)**

**c)**

**29** Qual é a equação da diretriz da parábola de equação $2x^2 - 7y = 0$?

**30** Determine as coordenadas do foco **F** e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 - 16x = 0$.

**31** Em cada caso, obtenha as coordenadas do foco, a equação da diretriz e represente graficamente a parábola dada por:

**a)** $y^2 = -16x$ **b)** $x^2 = 2y$ **c)** $y^2 = x$

**32** Uma parábola tem vértice na origem, eixo de simetria coincidente com o eixo das abscissas e passa pelo ponto P(4, −7). Qual é sua equação?

## Parábolas com vértice fora da origem

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF} \parallel Ox$, sua equação em relação ao sistema auxiliar x'Vy' é:

$$(y')^2 = 2px'$$

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF} \parallel Oy$, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

EXEMPLO **11**

Uma parábola de parâmetro p = 2, vértice V(4, 2) e eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF}$ paralelo ao eixo Ox tem equação:

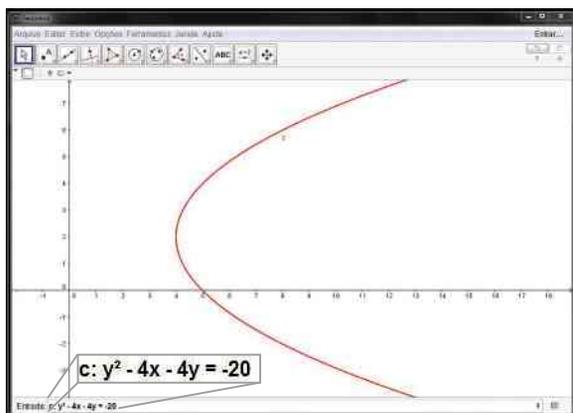
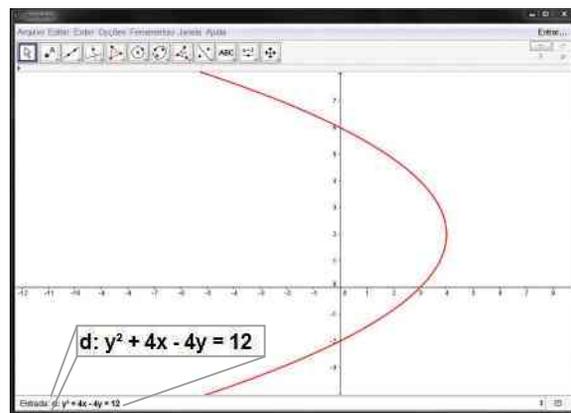
$(y - 2)^2 = 4(x - 4)$ se **F** está à direita de **V** ou $(y - 2)^2 = -4(x - 4)$ se **F** está à esquerda de **V**

Observe as parábolas I e II construídas com o GeoGebra.

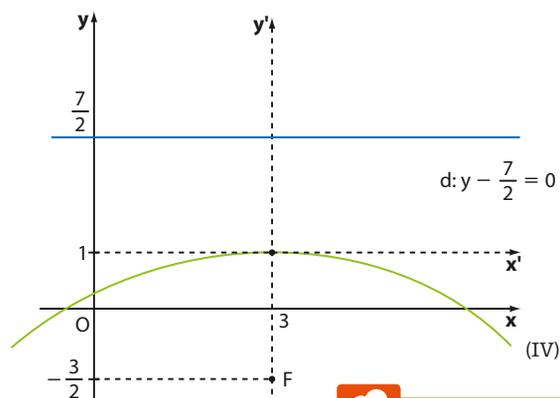
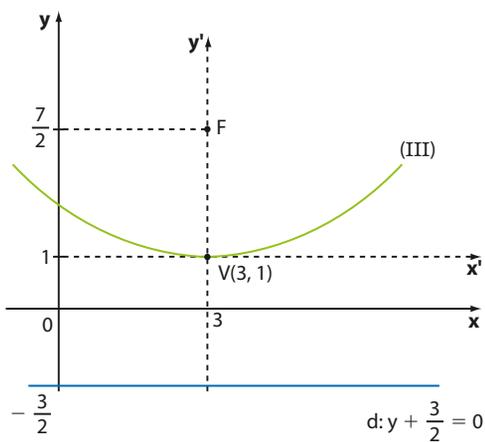
parábola I

c: y² - 4x - 4y = -20

parábola II

IMAGENS: GEOGEBRA

EXEMPLO 12

Uma parábola de parâmetro $p = 5$, vértice $V(3, 1)$ e eixo de simetria $\overleftrightarrow{VF}$ paralelo ao eixo Oy tem equação:

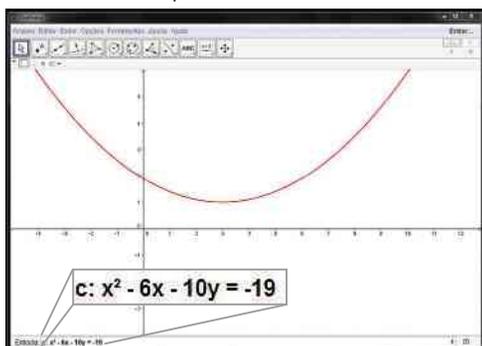
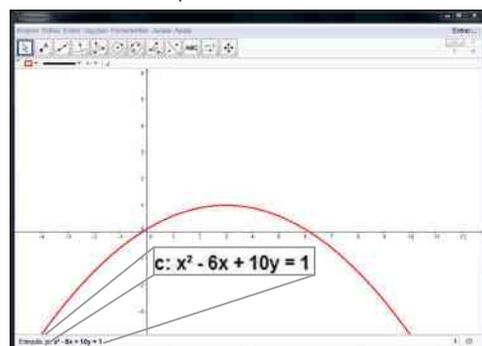
$(x - 3)^2 = 10(y - 1)$ se **F** está acima de **V** ou $(x - 3)^2 = -10(y - 1)$ se **F** está abaixo de **V**

**PENSE NISTO:**

Em que ponto cada uma das parábolas do exemplo 12 intersectam o eixo Oy?

Observe as parábolas (III) e (IV) construídas com o GeoGebra.

parábola III

parábola IV

IMAGENS: GEOGEBRA

Basta fazer $x = 0$ nas equações: $(0 - 3)^2 = 10 \cdot (y - 1) \Rightarrow y = 1{,}9$; o ponto é (0; 1,9)
$(0 - 3)^2 = -10 \cdot (y - 1) \Rightarrow y = 0{,}1$; o ponto é (0; 0,1). Confira nos gráficos acima.

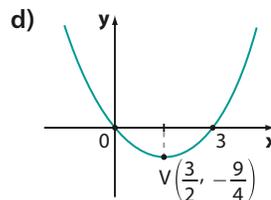
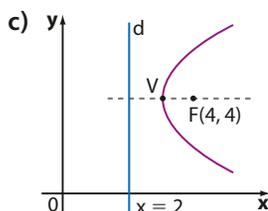
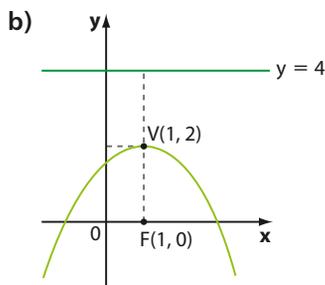
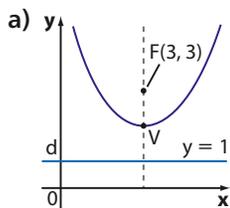
## EXERCÍCIOS

**33** Determine a equação de cada parábola representada a seguir:

a)

b)

c)

d)

**34** Determine o foco e o vértice da parábola $\lambda: (y + 3)^2 = 12(x - 2)$.

**35** Escreva a equação da diretriz da parábola representada pela equação $y = -(x + 5)^2$.

**36** Determine as coordenadas do vértice da parábola cuja equação é $y^2 - 7x - 6y + 9 = 0$.

**37** Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é $d: x = -2$ e cujo foco é $F(6, 0)$.

**38** Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ que são equidistantes da reta $d: y = 3$ e do ponto $F(-2, -3)$?

**39** Dê a equação da parábola simétrica relativamente ao eixo dos **y** e que passa pelos pontos de interseção da reta de equação $x + y = 0$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

## Parábolas e funções quadráticas

Note que uma parábola com equação $x^2 = 2py$ tem eixo de simetria vertical coincidente com o eixo das ordenadas. Então, para cada valor real atribuído a **x** existe em correspondência um único valor correspondente de **y**. Assim, a lei $y = \frac{1}{2p}x^2$ define uma função cujo gráfico é precisamente a parábola. Isso já foi visto no estudo de funções e agora é comprovado. Por exemplo, as funções $y = x^2$ $\left(\text{em que } p = \frac{1}{2}\right)$, $y = 3x^2$ $\left(\text{em que } p = \frac{1}{6}\right)$ e $y = -4x^2$ $\left(\text{em que } p = \frac{1}{8}\right)$ têm gráficos que são parábolas com vértice na origem.

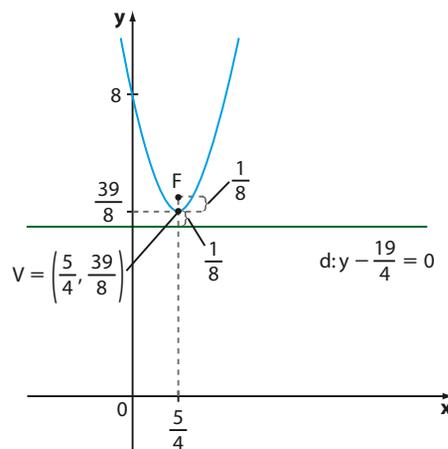
Observe que uma parábola de equação $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ possui vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria vertical. Podemos escrevê-la na forma:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 2py - 2py_0$$

ou ainda:

$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p} \cdot x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$, que corresponde à lei de uma função quadrática.

No estudo de funções, vimos que a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) tem por gráfico uma parábola, o que agora foi comprovado ao verificar que: $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$.

Por exemplo, a função dada por $y = 2x^2 - 5x + 8$ tem por gráfico uma parábola com $2 = \frac{1}{2p}$, $-5 = -\frac{x_0}{p}$ e $8 = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$, ou seja, $p = \frac{1}{4}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ e $y_0 = \frac{39}{8}$; $V\left(\frac{5}{4}, \frac{39}{8}\right)$ e $F\left(\frac{5}{4}, 5\right)$.

## Reconhecimento de uma cônica pela equação

### Elipses

Comparemos as equações das elipses:

| $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (elipse com eixo maior horizontal) | $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ (elipse com eixo maior vertical) |
|---|---|

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma elipse com eixo maior paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1, \text{ com } k_1 > 0,\ k_2 > 0 \text{ e } k_1 \neq k_2$$

- se $k_1 > k_2$, $k_1 = a^2$ e $k_2 = b^2$, então o eixo maior é horizontal.
- se $k_1 < k_2$, $k_1 = b^2$ e $k_2 = a^2$, então o eixo maior é vertical.
- $(x_0, y_0)$ é o centro da elipse.

Se $k_1 = k_2$, segue a equação: $\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_1} = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k_1$, que é a equação de outra cônica: uma circunferência de centro $(x_0, y_0)$ cujo raio mede $\sqrt{k_1}$. Se tivéssemos $k_1 = a^2 = b^2$ em uma elipse, teríamos $c^2 = a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow c = 0$ e a excentricidade seria $\frac{c}{a} = 0$, ou seja, teríamos uma circunferência. (Veja também o texto da seção *Aplicações*.)

**PENSE NISTO:**

Por que admitimos $k_1 \neq k_2$ na equação apresentada?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.

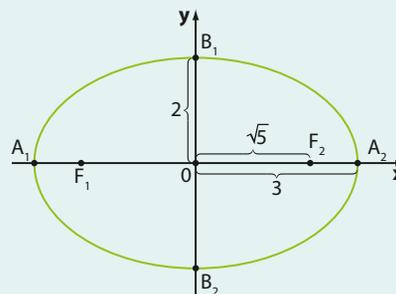
**Solução:**

Dividindo os dois membros da equação por 36, temos:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Portanto, a cônica é uma elipse com centro na origem e eixo maior horizontal tal que:

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

Os focos são $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

**2** Qual é a distância entre os focos da cônica cuja equação é $9x^2 + 4y^2 = 36$?

**Solução:**

Temos:

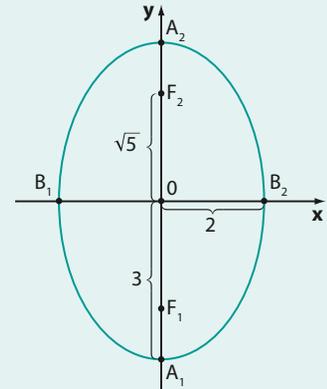
$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A cônica é uma elipse com centro (0, 0) e eixo maior vertical tal que:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

Portanto, os focos são:

$$F_1\left(0, -\sqrt{5}\right) \text{ e } F_2\left(0, \sqrt{5}\right)$$

e a distância entre eles é $2c = 2\sqrt{5}$.

**3** Qual é a cônica representada pela equação $9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$? Esboce seu gráfico.

**Solução:**

Vamos identificar a cônica com sua equação genérica $\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$, isto é:

$$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + \left(k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2\right) = 0$$

Temos coeficientes respectivamente iguais aos da equação dada, portanto:

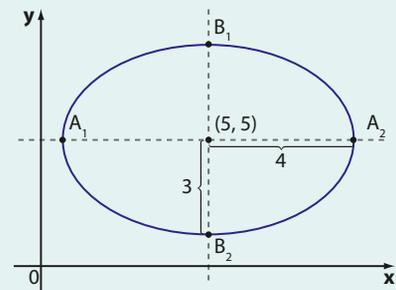
$$k_2 = 9, \quad k_1 = 16, \quad 2k_2x_0 = 90, \quad 2k_1y_0 = 160, \quad k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 481$$

Daí, temos:

$$k_2 = 9, \quad k_1 = 16, \quad x_0 = 5, \quad y_0 = 5$$

Como $k_1 > k_2 > 0$, a equação representa uma elipse com eixo maior horizontal e centro (5, 5), sendo $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$.

A equação reduzida dessa elipse é:

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

A equação reduzida dessa elipse pode ser obtida de outro modo.

Vamos completar quadrados:

$$9x^2 - 90x + 16y^2 - 160y + 481 = 0$$

$$9(x^2 - 10x + \blacksquare) + 16(y^2 - 10y + \blacksquare) + 481 = 0$$

$$9 \cdot (x^2 - 10x + 25) + 16 \cdot (y^2 - 10y + 25) + 481 = 0 + 9 \cdot 25 + 16 \cdot 25$$

$$9 \cdot (x - 5)^2 + 16 \cdot (y - 5)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

## Hipérboles

Comparemos as equações das hipérboles:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{-b^2} = 1$$

(hipérbole com eixo real horizontal)

$$\frac{(x - x_0)^2}{-b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

(hipérbole com eixo real vertical)

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma hipérbole com eixo real paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$$

em que $\mathbf{k_1}$ e $\mathbf{k_2}$ têm sinais contrários.

- se $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, então $k_1 = a^2$ e $k_2 = -b^2$; o eixo real é horizontal.
- se $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, então $k_1 = -b^2$ e $k_2 = a^2$; o eixo real é vertical.
- $(x_0, y_0)$ é o centro da hipérbole.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**4** Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.

**Solução:**

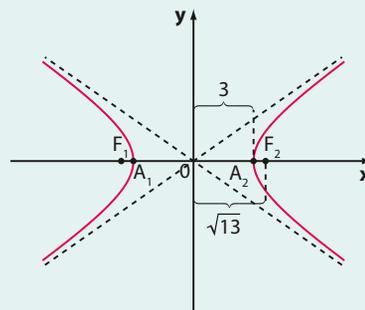
Temos:

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Portanto, a cônica é uma hipérbole com centro (0, 0) e eixo real horizontal. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

Seus focos são:

$$F_1\left(-\sqrt{13}, 0\right) \text{ e } F_2\left(\sqrt{13}, 0\right)$$

**5** Quais são os focos da cônica cuja equação é $x^2 - y^2 = 1$?

**Solução:**

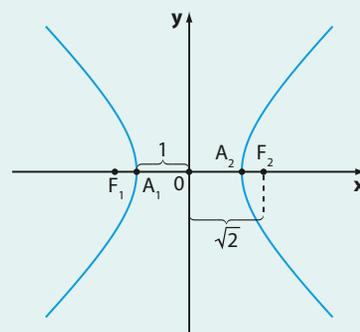
A partir da equação dada, podemos escrever:

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

A cônica é uma hipérbole com centro (0, 0) e eixo real horizontal tal que:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$$

Portanto, os focos são:

$$F_1\left(-\sqrt{2}, 0\right) \text{ e } F_2\left(\sqrt{2}, 0\right)$$

**6** Qual é a cônica representada pela equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$?

**Solução:**

Este exercício pode ser resolvido de dois modos:

*1º modo:*

Desenvolvendo a equação geral $\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1$, obtemos:

$$\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{k_1} + \frac{y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{k_2} = 1$$

$$k_2x^2 - 2x_0k_2x + k_2x_0^2 + k_1y^2 - 2k_1y_0y + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 0$$

Comparando com a equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, temos:

$$\begin{cases} k_2 = 4 \\ k_1 = -1 \\ -2x_0k_2 = -32 \Rightarrow -2x_0 \cdot 4 = -32 \Rightarrow x_0 = 4 \\ -2y_0k_1 = 8 \Rightarrow -2y_0 \cdot (-1) = 8 \Rightarrow y_0 = 4 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = 52 \text{ (Note que } 64 - 16 + 4 = 52) \end{cases}$$

Como $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$, a equação representa uma hipérbole com eixo real vertical e centro (4, 4), sendo $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$.

A equação reduzida é:

$$\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{1} = 1$$

*2º modo:*

Vamos completar os quadrados:

$$4(x^2 - 8x + ■) - (y^2 - 8y + ■) = -52$$

$$4 \cdot (x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 8y + 16) = -52 + 4 \cdot 16 + (-16)$$

$$4 \cdot (x - 4)^2 - (y - 4)^2 = -4$$

Dividindo os dois membros por −4, obtemos:

$$\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{1} = 1$$

## Parábolas

Desenvolvendo as equações das parábolas $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ e $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, obtemos respectivamente:

$$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2 - \frac{y_0}{p} \cdot y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$$

(parábola com eixo de simetria horizontal)

e

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2 - \frac{x_0}{p} \cdot x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$$

(parábola com eixo de simetria vertical)

Comparando as duas equações, concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma parábola com eixo paralelo a Ox ou Oy se for redutível a uma das formas:

$$x = ay^2 + by + c \text{ (com } a \neq 0) \quad (1)$$

ou

$$y = ax^2 + bx + c \text{ (com } a \neq 0) \quad (2)$$

- Se redutível à forma (1), então a parábola tem eixo de simetria horizontal e $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{y_0}{p}$ e $c = \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$.
- Se redutível à forma (2), então a parábola tem eixo de simetria vertical e $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$.
- $(x_0, y_0)$ é o vértice da parábola.

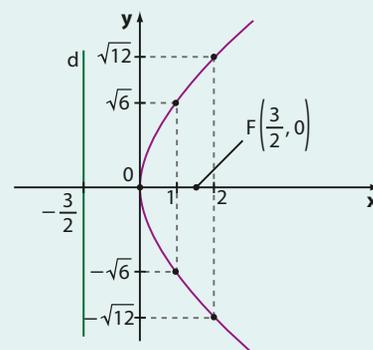
## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Qual é a cônica representada pela equação $y^2 = 6x$? Esboce seu gráfico.

**Solução:**

Temos:

$$y^2 = 6x \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 3 \cdot x$$

Portanto, a cônica é uma parábola com vértice na origem, eixo de simetria horizontal e parâmetro p = 3.

**8** Caracterize a cônica representada pela equação $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$ e esboce seu gráfico.

**Solução:**

A equação representa uma parábola com eixo de simetria horizontal.

Comparando-a com a equação genérica:

$x = \frac{1}{2p} \cdot y^2 - \frac{y_0}{p} \cdot y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$, decorre:

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{4}, \quad \frac{y_0}{p} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} = \frac{5}{4}$$

Daí, obtemos:

$$p = 2, \ y_0 = 1, \ x_0 = 1$$

Assim, a parábola tem vértice (1, 1) e parâmetro p = 2.

A equação reduzida dessa parábola é:

$$(y - 1)^2 = 4 \cdot (x - 1)$$

A equação reduzida pode ser obtida de outro modo:

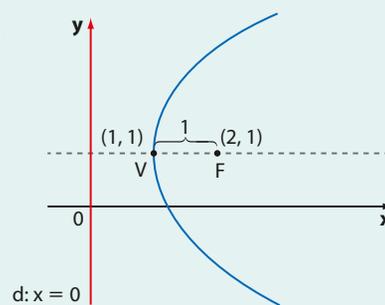
Completando quadrados, temos:

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 2y + \blacksquare) + \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 2y + 1) + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot (y - 1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \cdot (y - 1)^2 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4 \cdot (x - 1)$$

## EXERCÍCIOS

**40** Caracterize a cônica representada pela equação em cada item a seguir.

**a)** $5x^2 + 8y^2 = 10$

**b)** $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

**c)** $5x^2 - 4y^2 + 30x + 16y + 49 = 0$

**d)** $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

**e)** $x^2 - 4x - 12y = 32$

**f)** $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$

## Interseções de cônicas

É regra geral na Geometria Analítica que, dadas duas curvas f(x, y) = 0 e g(x, y) = 0, a interseção delas é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

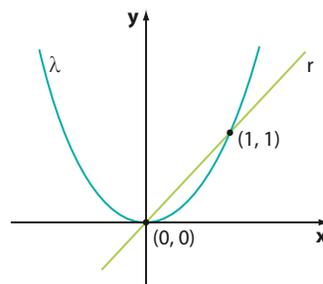
Já aplicamos esse conceito para achar a interseção de duas retas, de uma reta e uma circunferência e de duas circunferências. O mesmo conceito se aplica para obter a interseção de uma reta e uma cônica, de duas cônicas etc.

**EXEMPLO 13**

Vamos determinar os pontos comuns à reta r: $x - y = 0$ e à parábola $\lambda$: $y = x^2$.
Para isso, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), resulta:

$$y = y^2 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Assim, temos: $r \cap \lambda = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

## EXERCÍCIOS

**41** Obtenha a interseção da parábola $\lambda$: $y^2 = x$ com a elipse $\lambda'$: $x^2 + 5y^2 = 6$.

**42** Determine o conjunto dos pontos em que a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 1$ intersecta a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

**43** Quantos pontos comuns têm a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ e a parábola de equação $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$?

**44** Calcule o comprimento da corda que a reta r: $y = x$ define na elipse $\lambda$: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

**45** Calcule a distância entre os pontos de interseção das curvas de equações $x^2 + y = 10$ e $x + y = 10$.

**46** (UFMG) Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos (4, 0) e (0, 8). Sejam **A** e **B** os pontos de interseção entre a reta e a parábola. Determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

**47** Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta de equação $y = x + m$ intersecte a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

**48** Calcule o valor do coeficiente angular $m \in \mathbb{R}$ para que a reta de equação $y = mx + 2$ e a parábola de equação $y^2 = 4x$ tenham interseção não vazia.

**49** Observe a figura a seguir.

Com base nos dados da figura, determine:

**a)** as coordenadas de **A**, **B**, **C** e **D**.

**b)** a ordenada de **P**.

**50** Quantos pontos têm em comum a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ e a parábola de equação $3x^2 - y + 1 = 0$?

## DESAFIO

(Unesp-SP) Suponha que um planeta **P** descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela **O**, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela **O** a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com **x** e **y** em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela **O**, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo $P\hat{O}A$ mede $\frac{\pi}{4}$.

(figura fora de escala)

A distância, em milhões de quilômetros, do planeta **P** à estrela **O**, no instante representado na figura, é:

**a)** $2\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{10}$ **c)** $5\sqrt{2}$ **d)** $10\sqrt{2}$ **e)** $5\sqrt{10}$

# Estatística básica

## Introdução

Neste capítulo, daremos continuidade ao estudo da Estatística por meio da associação de medidas quantitativas que caracterizam e resumem um conjunto de dados. Convém, no início, revisarmos rapidamente alguns conceitos aprendidos.

PHOTOFUSION PICTURE LIBRARY/ALAMY/FOTOARENA

Jovens sendo entrevistados em uma pesquisa.

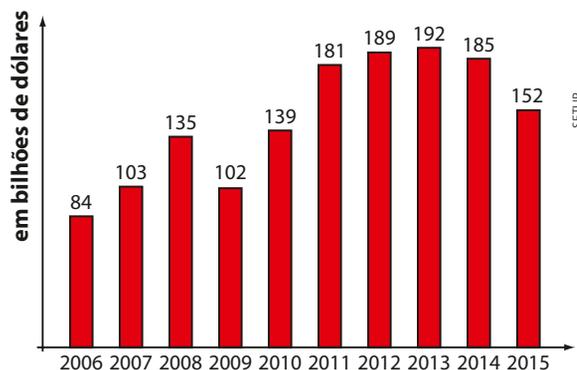
- **População**: conjunto de elementos que têm em comum a característica que está sendo investigada em uma pesquisa.
- **Amostra**: subconjunto da população cujos elementos fornecerão as informações que estão sendo investigadas por meio de uma pesquisa.
- **Variável**: é o objeto de estudo (ou item investigado) de uma pesquisa. As variáveis classificam-se em: **quantitativas** (são aquelas que apresentam números como resposta: quantidade de filhos, altura, renda etc.) ou **qualitativas** (que apresentam como resposta uma característica ou preferência do entrevistado: cor, nome do candidato em que o entrevistado vai votar nas próximas eleições etc.)
- **Tabelas de frequência**: são tabelas que organizam e resumem o conjunto de dados coletados em uma pesquisa. Em uma tabela de frequências geralmente constam a **frequência absoluta (Fa)**, que corresponde ao número de vezes que cada valor da variável aparece nos dados obtidos; a **frequência relativa (Fr)**, que é a razão entre a frequência absoluta e o número total de dados disponíveis; a frequência relativa pode ser expressa também na forma de porcentagem.
- **Classes (ou intervalos) de valores**: são intervalos reais usados para agrupar os valores de uma variável quantitativa, quando estes são demasiadamente diversificados, não havendo praticamente repetição de valores. Por exemplo, nas pesquisas sobre renda mensal, é comum apresentar os resultados em classes de valores. Em geral, usamos a notação a ⊢ b para representar o intervalo real [a, b[, cuja **amplitude** é b − a.
- **Representações gráficas**: o uso de gráficos é um importante recurso usado em diversas mídias (jornais, revistas, internet etc.) para representar um conjunto de dados. Entre as vantagens do uso de gráficos estão a rapidez da absorção de informações por parte do leitor, além de seu forte apelo visual e estético.

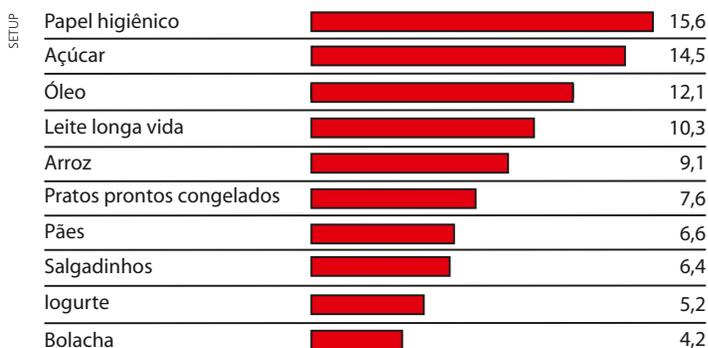
Estudamos as seguintes representações gráficas:

## Gráfico de barras

Podemos ter o gráfico de barras verticais e também o gráfico de barras horizontais.

O gráfico de barras verticais ao lado mostra a evolução da corrente do comércio no Brasil, de 2006 a 2015, considerando os 5 primeiros meses de cada ano. A corrente do comércio é a soma das exportações e importações brasileiras, considerando um dado período.

**Corrente de comércio do Brasil — De janeiro a maio**

**Fonte:** O Estado de S. Paulo. Disponível em: <economia.estadao.com.br/noticias/geral,comercio-exterior-registra-queda-de-18-no-ano-,1700993>. Acesso em: 22 fev. 2016.

**Categorias com maior fatia de marca própria nos supermercados nas vendas do 1º semestre de 2015 (em porcentagem)**

**Fonte:** O Estado de S. Paulo. Disponível em: <economia.estadao.com.br/blogs/marcia-de-chiara/consumidor-resiste-a-marca-propria-mesmo-com-o-orcamento-apertado/>. Acesso em: 15 mar. 2016.

O gráfico de barras horizontais ao lado mostra, para alguns itens, o percentual de vendas (em relação ao total de vendas do item) representado por marcas próprias de grandes supermercados no Brasil.

## Gráfico de linhas

O gráfico de linhas é muito usado para representar valores de uma variável no decorrer de um intervalo de tempo.

No gráfico ao lado está representada a variação do preço do quilograma da carne no período de janeiro de 2010 a fevereiro de 2015.

**Preço da carne bovina no atacado da Grande São Paulo (em reais por quilograma)**

**Fonte:** O Estado de S. Paulo. Disponível em: <economia.estadao.com.br/noticias/geral,alta-no-preco-do-boi-derruba-frigorificos,1668492>. Acesso em: 15 mar. 2016.

## Gráfico de setores

É um tipo de gráfico que apresenta um círculo dividido em setores. No exemplo ao lado, temos o perfil brasileiro (brancos, pretos, amarelos, indígenas e pardos) segundo o último Censo, realizado em 2010.

**Perfil do brasileiro – 2010**

Brancos 47,7%
Pretos 7,6%
Amarelos 1,1%
Indígenas 0,4%
Pardos 43,1%

SETUP

**Fonte:** IBGE. Disponível em: <biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/94/cd_2010_religiao_deficiencia.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

## Pictograma

Nos pictogramas são usadas imagens que guardam relação com o assunto exposto. É uma forma de comunicar informações que desperta a atenção e a curiosidade do leitor.

No gráfico seguinte foram usadas imagens de carros para representar o aumento de vendas em quatro meses consecutivos de um automóvel recém-lançado no mercado.

**Número de vendas de automóveis**

Legenda:

equivale a 2 000 unidades

Dados elaborados pelo autor.

Cada carro representado no gráfico corresponde a 2 000 unidades vendidas. Observe também os fracionamentos do carro nos meses de abril, junho e julho.

## Histograma

É uma representação gráfica semelhante ao gráfico de barras, mas é usada quando se quer representar valores de uma variável agrupados em intervalos.

Você se lembra do significado do IDH?

Ele é o Índice de Desenvolvimento Humano, que mede o bem-estar da população com base em expectativa de vida, escolaridade e PIB *per capita*. O IDH varia entre 0 e 1; quanto maior o seu valor, melhor a qualidade de vida.

Acompanhe, na tabela ao lado, o IDH dos países sul-americanos (dados de 2014).

Podemos representar esse conjunto de dados agrupando-os em três intervalos de mesma amplitude.

Obtemos o histograma seguinte:

**IDH dos países sul-americanos – 2014**

| País | IDH |
|---|---|
| Argentina | 0,836 |
| Bolívia | 0,662 |
| Brasil | 0,755 |
| Chile | 0,832 |
| Colômbia | 0,720 |
| Equador | 0,732 |
| Guiana | 0,636 |
| Paraguai | 0,679 |
| Peru | 0,734 |
| Suriname | 0,714 |
| Uruguai | 0,793 |
| Venezuela | 0,762 |

**Fonte:** *United Nations Development Programme – Human Development Index* (HDI). Disponível em: <hdr.undp.org/en/data>. Acesso em: 15 mar. 2016.

**Distribuição do IDH dos países sul-americanos – 2014**

## EXERCÍCIOS

**1** Em uma pesquisa realizada com 150 trabalhadores, foram levantadas várias informações, como o tempo (em anos) que o trabalhador está em seu emprego atual.
Os resultados estão apresentados na seguinte tabela de frequências:

| Tempo (em anos) | Frequência absoluta | Frequência relativa | Porcentagem (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 45 | d | h |
| 2 | 48 | e | i |
| 3 | a | f | 20 |
| 4 | b | g | j |
| 5 ou mais | c | 0,16 | k |
| **Total** | **150** | **1,00** | **100** |

Dados elaborados pelo autor.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

**a)** Qual é o valor de e + f + g?

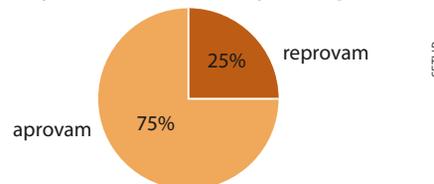
**b)** Quantos funcionários estão há pelo menos 3 anos no atual emprego?

**c)** Qual é o valor de h + k?

**d)** Se esse conjunto de dados fosse representado em um gráfico de setores, qual seria a medida aproximada do ângulo central do setor correspondente aos trabalhadores com 2 anos no emprego atual?

**2** O gráfico ao lado ilustra o resultado de uma pesquisa sobre a aprovação da administração do prefeito de uma cidade um ano após sua posse. Sabe-se que foram ouvidas 480 pessoas.

**Aprovação da administração do prefeito**

SETUP

Dados elaborados pelo autor.

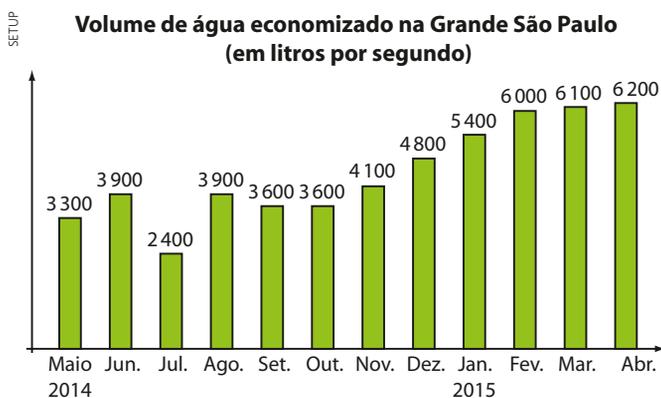
**a)** Quantas pessoas aprovam a administração do prefeito?

**b)** Quais as medidas dos ângulos dos setores desse gráfico?

**c)** Supondo que as mulheres representam 60% entre os que aprovam e 45% entre os que reprovam, determine a diferença entre o número de homens que aprovam e o número de homens que reprovam a administração desse prefeito.

**3** O gráfico abaixo apresenta o volume de água economizado (em L/s) pela população da Grande São Paulo, durante a crise hídrica iniciada em 2014.

SETUP

**Volume de água economizado na Grande São Paulo (em litros por segundo)**

**Fonte:** O Estado de S. Paulo. Disponível em: <sao-paulo.estadao.com.br/noticias/geral,1-ano-de-bonus-da-agua-rende-o-equivalente-a-uma-guarapiranga,1684965>. Acesso em: 15 mar. 2016.

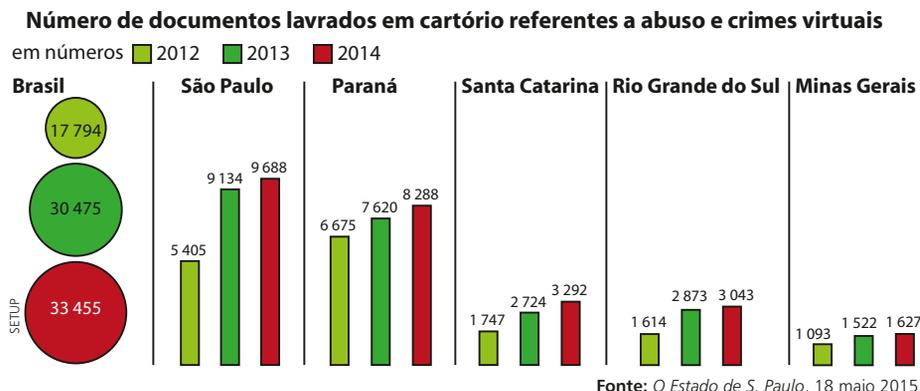
**a)** Qual é a diferença entre o maior e o menor volume de água economizado por mês, em L/s, no período considerado?

**b)** Considerando que o mês de abril tem 30 dias, determine o volume total de água economizado em abril de 2015.

**c)** Se um estudante tivesse que apresentar esse conjunto de dados usando outro gráfico, escolhido entre os gráficos de setores ou de linhas, qual deles melhor o representaria? Por quê?

**4** O gráfico comparativo abaixo mostra o crescimento do número de documentos lavrados em cartório que comprovam abusos e crimes virtuais, tais como vazamento de fotos e vídeos íntimos, perfis falsos, difamação, entre outros.

**Número de documentos lavrados em cartório referentes a abuso e crimes virtuais**

**Fonte:** *O Estado de S. Paulo*, 18 maio 2015.

Com base nos gráficos, analise as afirmações seguintes classificando-as em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justificando as falsas:

**a)** Em 2014, São Paulo registrava mais de $\frac{1}{3}$ do total de ocorrências do país.

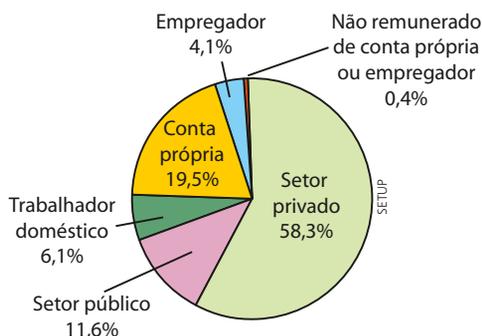
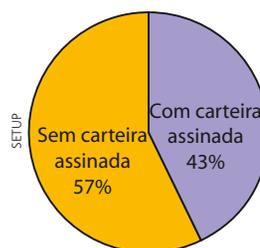
**b)** Entre os Estados listados, Santa Catarina registrou o maior aumento percentual do número de documentos lavrados em 2014, na comparação com 2013.

**c)** O aumento percentual ao qual se refere o item *b*, para Santa Catarina, é maior que 25%.

**d)** Considerando o número total de ocorrências na Região Sul, em 2014, é correto afirmar que o Paraná concentrava mais de 50% desse total.

**e)** Para o Estado de Minas Gerais, é possível dizer que o aumento no número de documentos nos três anos considerados é aproximadamente linear.

**5** De acordo com os resultados da Pesquisa Mensal de Emprego (PME), em setembro de 2015, o número de pessoas potencialmente ativas para exercer alguma atividade de trabalho nas seis regiões metropolitanas onde a pesquisa é realizada — Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre — foi estimado em 43,9 milhões. Destes, 22,7 milhões de pessoas estão ocupadas.

**Distribuição da população ocupada segundo as categorias de posição na ocupação – Set. 2015**

**Trabalhadores domésticos – Set. 2015**

**Fonte:** IBGE. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/Trabalho_e_Rendimento/Pesquisa_Mensal_de_Emprego/fasciculo_indicadores_ibge/2015/pme_201509pubCompleta.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

Considerando os gráficos anteriores, determine:

**a)** o número inteiro mais próximo da medida, em graus, do ângulo do setor correspondente a "conta própria".

**b)** o número de trabalhadores do setor privado nas seis regiões metropolitanas onde a pesquisa foi realizada.

**c)** em relação ao total de pessoas ocupadas, o percentual aproximado dos trabalhadores domésticos que trabalham sem carteira assinada.

**d)** o número de trabalhadores domésticos nas seis regiões metropolitanas.

**e)** a diferença entre as medidas dos ângulos dos setores correspondentes aos trabalhadores domésticos sem e com carteira assinada.

**6** Na tabela abaixo estão registrados os números (arredondados) de operações (pousos e decolagens) realizadas por aviões comerciais, nos cinco principais aeroportos de certo país, em determinado período.

**Número de pousos e decolagens**

| Aeroporto | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de operações | 7 500 | 10 500 | 13 500 | 4 500 | 6 750 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Construa um pictograma para representar os dados, utilizando desenhos da vista superior de aviões (lembre que o avião tem formato simétrico, sendo facilmente possível representar sua metade).

**b)** Se esse conjunto de dados fosse representado em um gráfico de setores, qual seria a medida aproximada do ângulo correspondente ao aeroporto II?

**7** Na tabela seguinte constam os valores da mortalidade infantil nos estados brasileiros em 2013. Tais valores referem-se ao número de crianças entre mil nascidas vivas que morrem durante o primeiro ano de vida.

**Taxa de mortalidade infantil em 2013 nos estados brasileiros**

| Estado | % |
|---|---|
| Acre | 19,2 |
| Alagoas | 24,0 |
| Amapá | 23,9 |
| Amazonas | 20,0 |
| Bahia | 19,9 |
| Ceará | 16,6 |
| Distrito Federal | 11,2 |
| Espírito Santo | 10,1 |
| Goiás | 16,2 |
| Maranhão | 24,7 |
| Mato Grosso | 18,1 |
| Mato Grosso do Sul | 15,4 |
| Minas Gerais | 12,6 |
| Pará | 18,3 |

| Estado | % |
|---|---|
| Paraíba | 19,0 |
| Paraná | 10,6 |
| Pernambuco | 14,9 |
| Piauí | 21,1 |
| Rio de Janeiro | 12,7 |
| Rio Grande do Norte | 17,0 |
| Rio Grande do Sul | 10,5 |
| Rondônia | 21,3 |
| Roraima | 17,8 |
| Santa Catarina | 10,1 |
| São Paulo | 10,8 |
| Sergipe | 18,9 |
| Tocantins | 17,4 |

**Fonte:** Exame. Disponível em: <exame.abril.com.br/brasil/noticias/os-melhores-e-os-piores-estados-em-indicadores-de-saude#1>. Acesso em: 15 mar. 2016.

**a)** Construa uma tabela de frequências, agrupando os dados em cinco classes de amplitude 3, começando pelo valor 10.

**b)** Faça um histograma para representar esses valores, usando o item anterior.

**8** No pictograma ao lado estão representadas as populações das duas maiores regiões metropolitanas de um certo país. Cada (ícone de pessoa) representa 1,5 milhão de habitantes.

**a)** Determine as populações das regiões **P** e **Q**.

**b)** Sabendo que a área de **P** é de 135 000 km², obtenha sua densidade demográfica.

Dados elaborados pelo autor.

**9** Foi realizada uma pesquisa com 1800 consumidores para conhecer o grau de satisfação do cliente em relação aos serviços prestados pela sua companhia de telefonia celular.

Os resultados são mostrados no gráfico de setores seguinte:

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Determine, para cada setor representado, a medida do ângulo central.

**b)** Qual é o número de consumidores entrevistados que estão satisfeitos com os serviços prestados?

**c)** Se $\frac{5}{12}$ do número de consumidores insatisfeitos tivessem respondido "satisfeitos", qual seria o acréscimo, em graus, da medida do ângulo do setor "satisfeitos"? Admita que não haja outras alterações nas respostas.

**10** (Enem-MEC) Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no gráfico 2.

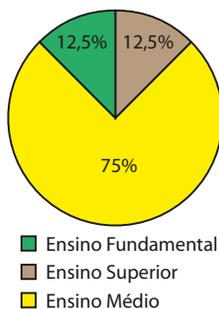
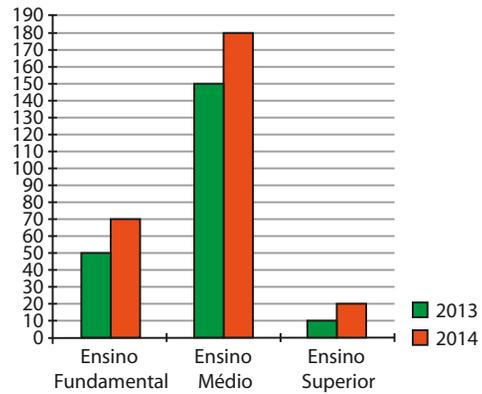



gráfico 1

gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

**a)** R$ 114 285,00
**b)** R$ 130 000,00
**c)** R$ 160 000,00
**d)** R$ 210 000,00
**e)** R$ 213 333,00

**11** Os resultados de uma pesquisa realizada com um certo número de consumidores são mostrados a seguir:

Seu plano de celular é pré-pago ou pós-pago?

Dados elaborados pelo autor.

Para os que responderam "pré-pago" foi feita a seguinte pergunta:

Você acessa a internet pelo seu aparelho?

Dados elaborados pelo autor.

Com base nos gráficos, determine o percentual de consumidores em relação ao total de entrevistados na pesquisa que:

**a)** possuem plano de celular pós-pago.

**b)** possuem plano de celular pré-pago e não acessam a internet por meio do aparelho.

Aplicações

# As pesquisas eleitorais

No Brasil ocorrem eleições a cada dois anos, e, em decorrência dessa regularidade, o brasileiro se habituou a acompanhar pela mídia as pesquisas eleitorais, encomendadas aos institutos especializados, no período de eleições.

Como já sabemos, para colher as informações necessárias, usam-se amostras e, a partir dos resultados obtidos na amostra, características de todos os eleitores são estimadas, fazendo uso dos conceitos de **margem de erro** e do **nível de confiança**.

ALEXANDRE TOKITAKA/PULSAR IMAGENS

Cabina de votação com urna eletrônica, dispositivo que armazena as escolhas dos eleitores e agiliza o processo de apuração dos votos.

O conceito de margem de erro é mais conhecido do brasileiro. Imagine que uma pesquisa eleitoral aponte que a porcentagem de eleitores que irão votar no candidato **X** é de 30%, por exemplo. Considerar uma margem de erro de 2,5 pontos percentuais para mais ou para menos significa dizer que o intervalo [30 − 2,5; 30 + 2,5] = [27,5; 32,5] *provavelmente* contém a verdadeira proporção de eleitores do candidato **X** em toda a população.

O termo "provavelmente" está relacionado a um conceito bem menos divulgado na mídia e praticamente desconhecido da população brasileira: é o nível de confiança da pesquisa, que está associado aos intervalos de confiança. Em pesquisas eleitorais, costuma-se usar um nível de confiança de 95%. O que isso significa?

Imagine que com outra amostra de mesmo tamanho dessa população fosse realizada outra pesquisa nas mesmas condições que a anterior. Suponha que essa outra pesquisa tenha apontado um percentual de 28,5% para o candidato **X**; com a margem de erro da pesquisa, construímos o intervalo $I_2$ = [28,5 − 2,5; 28,5 + 2,5] = [26; 31] que provavelmente contém a verdadeira proporção de eleitores de **X** na população. Com uma terceira amostra, obteríamos, analogamente, um intervalo $I_3$ e assim por diante.

Considerando 100 diferentes amostras de mesmo tamanho dessa população, teríamos 100 intervalos: $I_1, I_2, I_3, ..., I_{100}$.

O nível de confiança de 95% significa que 95 desses 100 intervalos contêm a verdadeira proporção de eleitores que votam no candidato **X**, em toda a população.

Assim, quando dispomos de uma informação como "o candidato **X** atingiu 30% das intenções de voto, em uma pesquisa cuja margem de erro é de 2,5 pontos percentuais, com nível de 95% de confiança", é importante ter em mente que não é 100% certeza que o intervalo [27,5; 32,5] contém o verdadeiro percentual de eleitores do candidato **X** na população. Há 5% de chance de o intervalo não conter o verdadeiro percentual. Abre-se, desse modo, a possibilidade de um erro estatístico, inerente à natureza da pesquisa eleitoral.

**Fontes de pesquisa:** CINTRA, A. O.; AMORIM, M. C. M. *Erro em pesquisa eleitoral*. Disponível em: <bd.camara.leg.br/bitstream/handle/bdcamara/2165/erro_pesquisa_cintraeamorim.pdf?sequence=2>. Acesso em: 15 mar. 2016.; BUSSAB, O. W.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2004; ROCHA, L. C. Malfeitos nas pesquisas políticas. Disponível em: <www.simed.estatistico.com/confe.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

# Medidas de centralidade e dispersão

Considere um levantamento feito, no mês de janeiro, sobre as temperaturas máximas diárias na cidade de Brasília. Já vimos que os dados referentes aos 31 valores medidos da temperatura podem ser representados em uma tabela de frequência ou em alguma representação gráfica.

Vamos, agora, estabelecer para esses dados algumas medidas (números reais) que sejam representativas, isto é, que resumam e caracterizem o conjunto de todas as temperaturas máximas registradas.

ALAMY/FOTOARENA

Vista do Eixo Monumental, uma avenida localizada em Brasília (DF), 2015.

Há dois tipos de medidas:

- **medidas de centralidade** (ou de **tendência central** ou de **posição**): por meio de determinado valor, que revela uma tendência central para as temperaturas máximas, representaremos os 31 valores medidos. Vamos estudar três medidas de centralidade: a **média**, a **mediana** e a **moda**.

- **medidas de dispersão** (ou de **variabilidade**): de modo geral, essas medidas indicam se, em um conjunto de dados, os valores estão concentrados (menos dispersos, menos espalhados) ou não (mais dispersos, mais espalhados) em torno de um valor central (geralmente a média). As medidas de dispersão permitirão comparar dois conjuntos de dados quanto ao grau de homogeneidade, indicando em qual deles há maior (ou menor) variabilidade, isto é, em qual deles os dados variam mais (ou menos).

  Vamos estudar quatro medidas de dispersão: a **amplitude**, a **variância**, o **desvio padrão** e o **desvio médio**.

Para simplificar a notação que será usada neste capítulo, vamos introduzir um importante símbolo da linguagem matemática: o somatório, indicado pela letra grega $\Sigma$ (lê-se: "sigma"). Ele representa aqui a soma de um número finito de parcelas que têm alguma característica comum. Acompanhe os exemplos seguintes:

- O símbolo $\sum_{i=1}^{4} i^2$ (lê-se: "somatório (ou soma) de $i^2$, para **i** variando de 1 até 4") significa que devemos atribuir para **i**, sucessivamente, os valores 1, 2, 3 e 4, calcular os respectivos valores numéricos da expressão $i^2$ e adicionar os valores encontrados, isto é:

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \underbrace{1^2}_{i\,=\,1} + \underbrace{2^2}_{i\,=\,2} + \underbrace{3^2}_{i\,=\,3} + \underbrace{4^2}_{i\,=\,4} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

- Para calcularmos o valor de $\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)$ é preciso atribuir para **n** os valores 0, 1 e 2:

$$n = 0 \Rightarrow \frac{1}{0+1} = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

# Medidas de centralidade

## Média aritmética

Observe a imagem a seguir: nela estão representados seis suportes para copos descartáveis, distribuídos em um centro de convenções, onde será realizado um evento. A quantidade de copos em cada suporte está indicada abaixo.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Se todos os copos fossem retirados dos suportes e distribuídos igualmente entre o número de suportes, qual seria a quantidade de copos descartáveis em cada um?

- Devemos, inicialmente, adicionar a quantidade de copos:

$$73 + 41 + 36 + 19 + 59 + 84 = 312$$

- Dividimos a soma encontrada pela quantidade de suportes (seis):

$$312 : 6 = 52$$

O valor encontrado (52 copos) representa a **média aritmética** entre os números 73, 41, 36, 19, 59 e 84.

### Definição

Sejam $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$ a relação dos valores assumidos por uma determinada variável quantitativa **x**. Definimos **média aritmética** (indica-se por $\bar{x}$) como a razão entre a soma de todos esses valores e o número total de valores:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Usando o símbolo de somatório para representar o numerador dessa expressão, escrevemos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ao calcularmos a média de uma relação de valores assumidos por uma variável, obtemos um número real que pode ou não coincidir com algum dos valores assumidos pela variável.

**EXEMPLO 1**

Os valores seguintes referem-se às notas obtidas por um aluno em oito disciplinas do Ensino Médio em um certo bimestre do ano letivo:

7,5 — 6,0 — 4,2 — 3,9 — 4,8 — 6,2 — 8,0 — 5,4

Vamos calcular a média aritmética desses valores:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{7{,}5 + 6{,}0 + 4{,}2 + 3{,}9 + 4{,}8 + 6{,}2 + 8{,}0 + 5{,}4}{8} = \frac{46}{8} = 5{,}75$$

Qual é o significado desse valor?

Caso o aluno apresentasse a mesma nota (desempenho) em todas as disciplinas, ela deveria ser 5,75 a fim de que fosse obtida a pontuação total de 46 pontos, que é a soma dos pontos efetivamente obtidos nessas oito disciplinas.

Observe que em nenhuma disciplina o aluno obteve a nota média, que é 5,75. Nesse caso, a média aritmética não coincide com qualquer uma das notas obtidas pelo aluno.

Suponhamos agora que, no bimestre seguinte, o aluno tenha obtido as seguintes notas nas mesmas oito disciplinas:

6,6 — 7,2 — 7,8 — 6,4 — 5,9 — 6,0 — 6,5 — 4,8

A média aritmética $\overline{x}$ desses valores é:

$$\overline{x} = \frac{6{,}6 + 7{,}2 + 7{,}8 + 6{,}4 + 5{,}9 + 6{,}0 + 6{,}5 + 4{,}8}{8} = \frac{51{,}2}{8} = 6{,}4$$

Nessa situação, a média obtida coincide com uma das notas obtidas pelo aluno.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1** A média dos salários de quinze funcionários de uma loja de autopeças é R$ 1323,00. Se forem contratados mais dois funcionários, com salários de R$ 1315,00 e R$ 1450,00, qual será a nova média salarial da loja?

**Solução:**

A média inicial ($\overline{x}$) de salários é 1323. Temos:

$1323 = \frac{\Sigma \text{ salários}}{15} \Rightarrow \Sigma \text{ salários} = 1323 \cdot 15 = 19845$. Assim, antes das contratações, a soma de todos os salários dessa loja era de R$ 19 845,00.

A soma dos salários, em reais, após a admissão dos dois funcionários será:

$$\Sigma' = 19845 + 1315 + 1450 = 22\,610$$

e a nova média ($\overline{x'}$) de salários, também em reais, será:

$$\overline{x'} = \frac{\Sigma' \text{ salários}}{17} = \frac{22\,610}{17} = 1330$$

A nova média salarial passará a ser de R$ 1330,00.

## Média aritmética ponderada

Considere o seguinte problema:

Em um espetáculo musical, foram vendidos 1200 ingressos cujos valores dependiam do setor escolhido no teatro, como mostra o quadro abaixo:

| Setor | Números de ingressos vendidos | Preço unitário do ingresso |
|---|---|---|
| Pista | 720 | R$ 50,00 |
| Andar superior | 400 | R$ 150,00 |
| Camarote | 80 | R$ 300,00 |

Qual foi o valor médio do ingresso pago nesse espetáculo?

Consideremos que a variável em estudo é o preço do ingresso. Fazendo a leitura do quadro, notamos que foram vendidos 720 ingressos a R$ 50,00 cada; 400 ingressos a R$ 150,00 cada e 80 ingressos a R$ 300,00 cada.

Assim, o preço médio ($\overline{p}$) do ingresso, em reais, é:

$$\overline{p} = \frac{\overbrace{50 + 50 + \ldots + 50}^{720 \text{ parcelas}} + \overbrace{150 + 150 + \ldots + 150}^{400 \text{ parcelas}} + \overbrace{300 + \ldots + 300}^{80 \text{ parcelas}}}{720 + 400 + 80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{p} = \frac{720 \cdot 50 + 400 \cdot 150 + 80 \cdot 300}{1200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{p} = \frac{36\,000 + 60\,000 + 24\,000}{1200} = \frac{120\,000}{1200} = 100$$

A média obtida para o valor do ingresso, nesse problema, é chamada média aritmética ponderada dos valores R$ 50,00, R$ 150,00 e R$ 300,00, em que o fator de ponderação (também chamado de peso) corresponde à quantidade de ingressos vendidos em cada setor.

Observe, nesse exemplo, que a média obtida não coincide com qualquer um dos preços do ingresso disponíveis para compra. O valor obtido para a média R$ 100,00 é um valor teórico cujo significado é: se todos os 1200 ingressos tivessem sido vendidos pelo mesmo valor, este deveria ser de R$ 100,00, a fim de que fosse obtida a arrecadação de R$ 120 000,00.

**PENSE NISTO:**

Em que condições o preço médio do ingresso, em reais, seria $\frac{50 + 150 + 300}{3} = \frac{500}{3} \simeq 166,67$?

Se a quantidade de ingressos vendidos em cada setor (pista, andar superior e camarote) fosse a mesma.

De modo geral, consideremos uma relação de valores formada pelos elementos $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x_k}$, com frequências absolutas respectivamente iguais a $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, ..., $\mathbf{n_k}$.

A média aritmética ponderada desses valores é:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot n_i)}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Podemos também expressar $\overline{\mathbf{x}}$ em termos da frequência relativa de cada $\mathbf{x_i}$ (com i = 1, 2, ..., k), a saber, $f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$.

Vamos escrever, convenientemente, a expressão obtida para $\bar{x}$:

$$\bar{x} = x_1 \cdot \underbrace{\frac{n_1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_1} + x_2 \cdot \underbrace{\frac{n_2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_2} + \ldots + x_k \cdot \underbrace{\frac{n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}_{= f_k}$$

Assim, obtemos:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_k \cdot f_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i \cdot f_i)$$

**EXEMPLO 2**

Foi realizada uma pesquisa socioeconômica com duzentas pessoas de uma cidade para investigar alguns itens de conforto presentes na residência de cada entrevistado. Na tabela de frequências seguinte, constam os resultados referentes ao número de aparelhos de TV por domicílio:

| Número de aparelhos de TV | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| 0 | 9 | $\frac{9}{200} = 0{,}045$ ou 4,5% |
| 1 | 93 | $\frac{93}{200} = 0{,}465$ ou 46,5% |
| 2 | 60 | $\frac{60}{200} = 0{,}30$ ou 30% |
| 3 | 22 | $\frac{22}{200} = 0{,}11$ ou 11% |
| 4 | 16 | $\frac{16}{200} = 0{,}08$ ou 8% |
| **Total** | **200** | **1,00** ou **100%** |

Qual é o número médio de TVs por domicílio?

A variável em estudo é o "número de TVs por domicílio" e ela assume os seguintes valores: 0, 1, 2, 3 e 4. Devemos, então, calcular a média aritmética ponderada desses valores usando como pesos a frequência absoluta, a frequência relativa na forma decimal ou a frequência relativa na forma percentual.

- frequência absoluta:

Nesse caso, $\bar{x} = \frac{0 \cdot 9 + 1 \cdot 93 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 22 + 4 \cdot 16}{9 + 93 + 60 + 22 + 16} \Rightarrow \bar{x} = \frac{93 + 120 + 66 + 64}{200} = 1{,}715$

- frequência relativa:

Nesse caso, $\bar{x} = \frac{0 \cdot 0{,}045 + 1 \cdot 0{,}465 + 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}11 + 4 \cdot 0{,}08}{\underbrace{0{,}045 + 0{,}465 + 0{,}30 + 0{,}11 + 0{,}08}_{= 1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = 0 + 0{,}465 + 0{,}60 + 0{,}33 + 0{,}32 = 1{,}715$

- frequência relativa (na forma percentual):

Nesse caso, $\bar{x} = \frac{0 \cdot 4{,}5\% + 1 \cdot 46{,}5\% + 2 \cdot 30\% + 3 \cdot 11\% + 4 \cdot 8\%}{\underbrace{4{,}5\% + 46{,}5\% + 30\% + 11\% + 8\%}_{= 100\%}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{46{,}5\% + 60\% + 33\% + 32\%}{100\%} = 1{,}715$

Observe, novamente, que a média aritmética é um valor teórico, não coincidindo, nesse exemplo, com um valor assumido pela variável em estudo.

# EXERCÍCIOS

**12** Em cada caso, calcule a média aritmética dos valores:

**a)** 23 — 20 — 22 — 21 — 28 — 20

**b)** 7 — 9 — 9 — 9 — 7 — 8 — 8 — 9 — 9 — 9

**c)** 0,1 — 0,1 — 0,1 — 0,1 — 0,2 — 0,2

**d)** 4 — 4,5 — 4,5 — 5,0 — 5,0 — 5,5 — 6,5 — 5,0

**e)** 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3

**13** Em um edifício residencial com 54 apartamentos, 36 condôminos pagam taxa de condomínio de R$ 270,00; para os demais, essa taxa é de R$ 360,00. Qual é o valor da taxa média de condomínio nesse edifício?

**14** Seja a ∈ ℝ. A média aritmética entre **a**, 8, 2a, 9 e (a + 1) é 6,8. Qual é o valor de **a**?

**15** Um grupo **A** de 20 recém-nascidos tem massa média de 2,8 kg; um grupo **B** de 30 recém-nascidos tem massa média de 2,6 kg. Juntando os recém-nascidos dos grupos **A** e **B**, qual é o valor esperado para a média de massas?

BSIP/DIOMEDIA

**16** A média aritmética de uma lista formada por vinte números é 12. Qual será a nova média se:

**a)** acrescentarmos o número 33 a essa lista?

**b)** retirarmos o número 50 dessa lista?

**c)** acrescentarmos o número 63 a essa lista e retirarmos o 51?

**17** Em uma fábrica, a média salarial das mulheres é R$ 1408,00; para os homens a média salarial é R$ 1 632,00. Sabe-se, também, que a média geral de salários nessa fábrica é R$ 1475,20.

**a)** Sem fazer cálculos, responda: Há mais homens ou mulheres trabalhando na fábrica?

**b)** Determine as quantidades de homens e de mulheres, sabendo que elas diferem de 32.

**18** A tabela seguinte informa a quantidade de cartões amarelos distribuídos, por um árbitro, em uma partida de futebol nos jogos por ele apitados durante uma temporada:

**Distribuição de cartões amarelos**

| **Número de cartões** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frequência absoluta** | 30 | 18 | 7 | 3 | 2 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Quantos jogos o árbitro apitou na temporada?

**b)** Qual é o número médio de cartões amarelos distribuídos por partida?

**c)** Se esse conjunto de dados fosse representado em um gráfico de setores, qual seria a medida do ângulo do setor correspondente aos jogos nos quais foi distribuído um único cartão?

**19** Em um concurso público foram aprovados 80 candidatos, cuja média de notas foi 74,5 (em 100 pontos possíveis). A média das 40 menores notas dos candidatos aprovados foi 67,0. Qual foi a média das 40 maiores notas dos aprovados?

**20** Um professor calculou a média aritmética das notas dos quarenta alunos que submeteu a uma prova e obteve como resultado o valor de 5,5. Na hora de devolver as provas, verificou que havia cometido erro em duas delas. Na primeira, a nota correta era 9,5 em vez de 6,5 e, na segunda, a nota correta era de 5,5 em vez de 3,5. Feita a correção, de quanto foi acrescida a média das notas?

**21** Em um concurso, para o cálculo da nota final do candidato, adotam-se pesos nas provas, como mostra o quadro abaixo:

| **Prova** | **Peso** |
|---|---|
| Redação | 4 |
| Matemática | 3 |
| Conhecimentos gerais | 2 |

A nota final mínima para aprovação nesse concurso é 8,5.

**a)** Um candidato **X** obteve 7,5, 9,0 e 9,5 nas provas de Redação, Matemática e Conhecimentos gerais, respectivamente. Ele foi aprovado?

**b)** O candidato **Y** obteve 8,3 na Redação e 7,5 em Conhecimentos gerais. Qual é a nota mínima que ele deveria obter em Matemática, a fim de que fosse aprovado no concurso? Sabe-se que as notas do concurso são atribuídas de 0,1 em 0,1.

**22** Em uma padaria trabalham 12 funcionários cujos cargos e salários estão abaixo descritos:

**Cargos e salários**

| Cargo | Salário mensal | Número de funcionário |
|---|---|---|
| Gerente | R$ 2 800,00 | 1 |
| Atendente | R$ 1 050,00 | 5 |
| Padeiro | R$ 1 300,00 | 2 |
| Confeiteiro | R$ 1 000,00 | 1 |
| Caixa | R$ 1 200,00 | 3 |

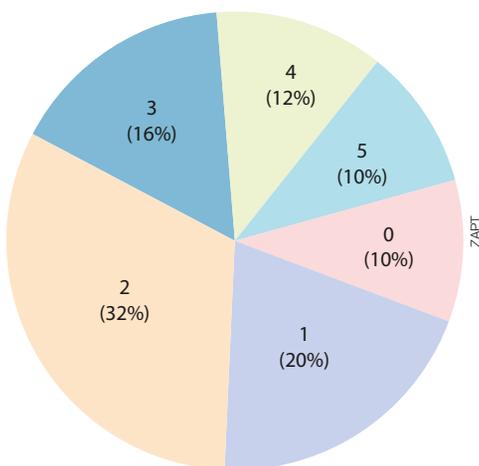
Dados elaborados pelo autor.

**a)** Qual é o valor da folha de pagamento dessa padaria?

**b)** Qual é a média salarial nessa padaria?

**c)** O proprietário da padaria quer contratar dois seguranças especializados, mas sabe que a média salarial da padaria não pode ultrapassar R$ 1300,00. Qual é o maior salário que pode ser oferecido a cada um dos candidatos ao cargo de segurança?

**23** Realizou-se uma pesquisa entre as mulheres de uma cidade para levantar informações sobre o número de filhos. Foram entrevistadas 400 mulheres, e os dados obtidos estão representados no gráfico de setores abaixo.

**Número de filhos**

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Quantas mulheres da amostra têm três ou mais filhos?

**b)** Qual é a média de filhos das mulheres dessa amostra?

**24** Um professor de economia dá aula em 4 turmas: **A**, **B**, **C**, **D**. Na tabela seguinte, encontram-se os resultados obtidos pelas turmas no exame final, bem como a quantidade de alunos por turma:

**Notas**

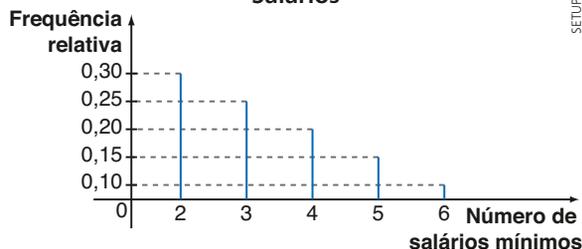
| Turma | Números de alunos | Média das notas |
|---|---|---|
| A | 30 | 6,2 |
| B | 35 | 7,2 |
| C | 55 | 5,4 |
| D | ? | 5,0 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Considerando as turmas **A**, **B** e **C**, determine a média das notas obtidas nesse exame pelos alunos dessas 3 turmas reunidas.

**b)** O professor não se lembra, ao certo, o número de alunos da turma **D**, mas ele sabe que a média geral das notas das 4 turmas reunidas não ultrapassou 5,8. Quantos alunos, no mínimo, podem pertencer à turma **D**?

**25** O gráfico abaixo mostra a frequência relativa dos salários dos 40 funcionários (em salários mínimos) de uma pequena empresa:

**Salários**

Dados elaborados pelo autor.

Sabendo que, no segundo semestre de 2015, o salário mínimo no Brasil era de R$ 788,00, verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, justificando.

**a)** O salário médio nessa empresa era de 3,5 salários mínimos.

**b)** A folha de pagamento dos salários dessa empresa era maior que R$ 105 000,00.

**c)** Se cada funcionário recebesse um aumento de R$ 100,00 no salário, a média de salários dos funcionários dessa empresa ultrapassaria R$ 2 800,00.

**d)** Se todos os funcionários que recebem dois salários mínimos passassem a receber três salários mínimos, o salário médio da empresa passaria a ser maior do que R$ 3 000,00.

**26** Para um torneio de basquete foram convocados 12 jogadores para compor a seleção nacional. O time titular, com 5 jogadores, tinha altura média de 2,04 metros e o time reserva, com os demais, tinha altura média de 2,01 metros. Às vésperas do jogo de estreia um titular se contundiu e foi substituído por um reserva.

Com isso, a altura média do time titular aumentou 2 cm e a do time reserva diminuiu 1,5 cm. A seleção disputou o torneio com 11 jogadores.

**a)** Qual a altura do jogador titular que se contundiu?

**b)** Qual a altura do jogador reserva que substituiu o jogador contundido?

**27** Ao deixar um hotel *resort* na praia, os hóspedes são convidados a responder um questionário de avaliação do hotel. Ao final do questionário, pede-se uma nota de 0 a 5 (5 corresponde ao máximo de satisfação) para o hotel. Durante o 1º mês de uma temporada, os 2 000 questionários recebidos apontavam uma nota média de 3,9 para o hotel.

ALAMY/FOTOARENA

**a)** Qual é o número mínimo de questionários que devem ser respondidos, além dos que já foram, para que a nota média de avaliação do hotel passe a ser 4,6?

**b)** É possível que a média do hotel passe a ser de 5,0 no bimestre, considerando os formulários que serão preenchidos no 2º mês? Em caso afirmativo, determine o número mínimo de questionários a serem preenchidos.

**28** A média aritmética de cinquenta números reais, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, ..., $\mathbf{x}_{49}$, $\mathbf{x}_{50}$, é igual a 120.
Qual é a média aritmética dos números reais $x_1 + 1$, $x_2 + 2$, $x_3 + 3$, ..., $x_{49} + 49$ e $x_{50} + 50$?

## Mediana

Considere o consumo mensal de água, em metros cúbicos, de uma residência nos nove primeiros meses de um ano:

33 — 31 — 34 — 32 — 34 — 32 — 102 — 34 — 30

Calculando a média mensal de consumo, obtemos:

$$\bar{x} = \frac{33 + 31 + 34 + 32 + 34 + 32 + 102 + 34 + 30}{9} =$$

$$= \frac{362}{9} \simeq 40,2$$

ULRICH NIEHOFF/IMAGEBROKER RM/DIOMEDIA

Hidrômetro, aparelho que mede o consumo de água nos imóveis.

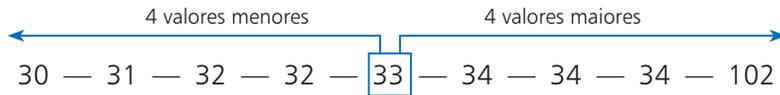
O valor encontrado para a média, 40,2 m³, não representa, com fidelidade, uma medida de tendência central: o consumo mensal dessa residência aponta para um valor entre 30 e 35 metros cúbicos; além disso, dos 9 valores registrados, 8 são menores que a média e "distantes", ao menos, 6 unidades dela e apenas 1 valor é maior que a média, estando muito distante dela.

Nessa situação, a média foi afetada por um valor muito discrepante do consumo, que destoa dos demais: o valor de 102 m³ registrado em um mês pode ser explicado por um vazamento de água em alguma válvula ou torneira ou esse consumo atípico pode ser devido a uma hospedagem temporária na casa (parentes de outra cidade, por exemplo).

Deste modo, é importante conhecermos outra medida de centralidade, além da média, a fim de que façamos uma análise mais completa para interpretar e caracterizar o conjunto de dados. Essa outra medida de centralidade é a **mediana**.

Colocando em ordem crescente os valores de consumo da relação anterior, obtemos:

4 valores menores ← → 4 valores maiores

30 — 31 — 32 — 32 — [33] — 34 — 34 — 34 — 102

O valor destacado, 33, separa o conjunto de dados em duas partes: na primeira {30, 31, 32, 32} todos os valores são menores que 33 e na outra {34, 34, 34, 102} todos os valores são maiores que 33.

O valor 33 $m^3$ é chamado mediana e representa, nesse exemplo, uma medida de centralidade mais fiel ao conjunto de dados.

## Definição

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ os **n** valores ordenados assumidos por uma variável quantitativa **X**, em um conjunto de observações.

Define-se a **mediana** (indicaremos por Me) por meio da relação:

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } \mathbf{n} \text{ for ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } \mathbf{n} \text{ for par} \end{cases}$$

A definição garante que a mediana seja um valor central que divide o conjunto de dados em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos. Em um subconjunto, todos os elementos são menores que a mediana ou iguais a ela; no outro subconjunto, todos os elementos são maiores que a mediana ou iguais a ela.

**EXEMPLO 3**

O controle de qualidade de uma indústria forneceu o seguinte número de peças defeituosas (por lote de 100 unidades):

6 — 4 — 9 — 6 — 3 — 8 — 1 — 4 — 5 — 6

Vamos determinar a mediana do número de peças defeituosas. Para isso, ordenamos esses valores:

1 — 3 — 4 — 4 — [5 — 6] — 6 — 6 — 8 — 9 (*)

Como n = 10 é par, pela definição a mediana será dada pela média aritmética entre o 5º e o 6º valores de (*), isto é:

$$Me = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{5 + 6}{2} = 5{,}5$$

Note que, em (*), temos cinco valores menores que 5,5 (1 — 3 — 4 — 4 — 5) e cinco valores maiores que 5,5 (6 — 6 — 6 — 8 — 9).

## Moda

Após fazer um levantamento das idades dos alunos de uma de suas turmas do 3º ano do Ensino Médio, uma professora construiu a tabela de frequência ao lado:

| Idades | Número de alunos |
|---|---|
| 16 | 4 |
| 17 | 28 |
| 18 | 7 |
| 19 | 5 |

Entre os valores assumidos pela variável "idade": 16, 17, 18 ou 19, constatamos que o valor 17 ocorreu mais vezes: 28 dos 44 alunos têm 17 anos.

Dizemos, então, que a **moda** das idades nesse conjunto de dados é igual a 17.

A moda de uma relação de valores (indica-se Mo) é o valor que ocorre mais vezes na relação, isto é, aquele que possui maior frequência absoluta.

EXEMPLO **4**

Vamos encontrar a moda dos seguintes conjuntos de valores:

a) 5 — 8 — 11 — 8 — 3 — 4 — 8

A moda é Mo = 8, pois há três valores iguais a 8.

b) 2 — 3 — 9 — 3 — 4 — 2 — 6

Há duas modas: 2 e 3. Dizemos, então, que se trata de uma **distribuição de frequências bimodal**.

c) 1 — 3 — 4 — 6 — 9 — 11 — 2

Nesse caso, todos os valores aparecem com a mesma frequência unitária. Assim, não há moda nessa distribuição.

OBSERVAÇÃO

Média, mediana e moda são as três medidas de tendência central mais usuais que podem ser associadas a um conjunto de dados. Cada uma delas possui, como vimos, interpretação e significado próprios. Dependendo da natureza dos dados, uma ou outra dessas medidas pode ser mais adequada para representá-los quantitativamente. Entretanto, a análise dos dados se torna mais completa quando conhecemos os valores das três medidas.

### EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**2** Na tabela seguinte está representada a evolução do agronegócio no Brasil, expresso como porcentagem do Produto Interno Bruto (PIB), no período de 2003 a 2013.

**Agronegócio no Brasil**

| Ano | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Porcentagem de participação em relação ao PIB brasileiro | 26,3% | 25,5% | 23,6% | 22,8% | 23,2% | 23,8% | 22,5% | 22,5% | 23,1% | 22,2% | 22,5% |

**Fonte:** Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada – Esalq/USP. Disponível em: <cepea.esalq.usp.br/pib/>. Acesso em: 15 mar. 2016.

Calcule as três medidas de centralidade associadas a esse conjunto de dados, interpretando-as.

**Solução:**

- Média aritmética:

$$\frac{26{,}3 + 25{,}5 + 23{,}6 + 22{,}8 + 23{,}2 + 23{,}8 + 22{,}5 + 22{,}5 + 23{,}1 + 22{,}2 + 22{,}5}{11} = \frac{258{,}0}{11} \simeq 23{,}45\%$$

O valor encontrado para a média indica o percentual teórico de participação do agronegócio no PIB caso todos os anos apresentassem o mesmo percentual.

- Moda: Mo = 22,5%

O valor encontrado para a moda significa que qualquer outro percentual da relação de valores se repete menos vezes que o valor 22,5%. Note que 22,5% aparece 3 vezes entre os dados.

- Mediana:

É preciso colocar os percentuais em ordem crescente:

22,2 — 22,5 — 22,5 — 22,5 — 22,8 — 23,1 — 23,2 — 23,6 — 23,8 — 25,5 — 26,3

Como o número de valores é ímpar (n = 11), a mediana é igual ao valor da sexta posição da relação acima, isto é, a mediana é 23,1%.

Isso significa que, dos 11 percentuais listados, 5 são inferiores a 23,1% e 5 são superiores a 23,1%.

## EXERCÍCIOS

**29** Calcule a média $(\overline{M})$, a mediana (Me) e a moda (Mo) para cada conjunto de valores:

**a)** 2 — 2 — 3 — 3 — 3 — 4 — 4 — 4 — 4

**b)** 16 — 18 — 18 — 17 — 19 — 18

**c)** 1 — 5 — 3 — 2 — 4

**d)** 11 — 8 — 15 — 19 — 6 — 15 — 13 — 21

**e)** 44 — 43 — 42 — 43 — 45 — 44 — 40 — 41— 49 — 46

**30** Os dados ordenados abaixo referem-se ao tempo de espera (em minutos) de 10 pessoas que foram atendidas em um posto de saúde durante uma manhã:

1 — 5 — 8 — 9 — **x** — 16
18 — **y** — 23 — 26

Sabendo que o tempo médio de espera foi de 14 minutos e o tempo mediano foi de 15 minutos, determine os valores de **x** e de **y**.

**31** Uma pesquisa realizada com 3 000 pessoas de certa região pretende levantar alguns aspectos socioeconômicos. Um dos itens do questionário era: "Qual é o número de banheiros em sua residência?" Os resultados encontram-se a seguir:

| Número de banheiros | Porcentagem |
|---|---|
| 1 | 42% |
| 2 | 37% |
| 3 | 16% |
| 4 | 5% |

**a)** Qual é o número de entrevistados cuja residência possui até dois banheiros?

**b)** Calcule a média, a moda e a mediana para os dados coletados.

**32** Na tabela seguinte constam os valores dos dez maiores PIBs das Américas em 2014.

**PIB nas Américas em 2014**

| País | PIB (em bilhões de dólares) |
|---|---|
| Estados Unidos | 17 420 |
| Brasil | 2 346 |
| Canadá | 1 785 |
| México | 1 295 |
| Argentina | 537,7 |
| Venezuela | 381,3 |
| Colômbia | 377,7 |
| Chile | 258,1 |
| Peru | 202,6 |
| Equador | 100,9 |

**Fonte:** Banco Mundial. Disponível em: <www.worldbank.org/en/country>. Acesso em: 15 mar. 2016.

**a)** Calcule a média e a mediana dos dados apresentados. Por que a média é bem maior que a mediana?

**b)** Em que condição a média ficaria mais próxima da mediana? Faça os cálculos necessários.

**33** Uma empresa paga, todo ano, um bônus de fim de ano para seus funcionários. Neste ano, a empresa já pagou bônus a 40 dos seus 50 funcionários, como mostra a tabela seguinte:

**Bônus de fim de ano**

| Número de funcionários | Valor do bônus (em reais) |
|---|---|
| 8 | 300 |
| 14 | 600 |
| 18 | 1 000 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Qual é a mediana dos valores já pagos de bônus pela empresa?

**b)** Sabe-se que os dez funcionários restantes receberão bônus de 600 ou 1 000 reais. Qual é o número de funcionários que devem receber bônus de R$ 600,00 para que a mediana dos 50 valores seja R$ 800,00?

**34** Um corretor de imóveis relacionou, ao longo de dois anos de trabalho, a quantidade de imóveis comercializados (venda ou locação) mensalmente. Os resultados encontram-se a seguir:

| Imóveis comercializados por mês | Número de meses |
|---|---|
| 0 | 8 |
| 1 | 4 |
| 2 | 11 |
| 3 | 1 |

**a)** Quais são os valores da média, da mediana e da moda da variável em questão?

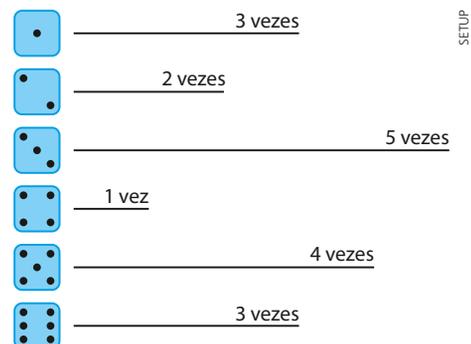
**b)** Se nos cinco meses subsequentes não for comercializado imóvel algum, qual será a mediana dos 29 valores?

**35** Em maio de 2015, uma onda de calor matou mais de mil pessoas na Índia. No gráfico seguinte, constam as temperaturas máximas registradas no mês de maio na capital Nova Délhi, além do recorde registrado em 29 de maio de 1944:

**Fonte:** *O Estado de S. Paulo*, 28 maio 2015.

**a)** Considerando a relação dos valores das temperaturas máximas de 2005 a 2014, determine a média, a moda e a mediana.

**b)** Qual deveria ter sido a temperatura máxima registrada em maio de 2015 a fim de que a média das temperaturas máximas registradas nesses onze anos subisse 0,12 °C em relação à média do item *a*?

**36** Um dado foi lançado 18 vezes consecutivas e os resultados obtidos encontram-se no esquema abaixo:

**a)** Calcule a média, a mediana e a moda da distribuição de frequências das faces obtidas nos lançamentos.

**b)** Decidiu-se lançar o dado mais 7 vezes. Sabendo que o 19º, 20º e o 21º lançamentos do dado resultaram, cada um, na face 4, é possível que a mediana da nova distribuição de frequências, considerando 25 lançamentos, seja 3,5? E 5? Em caso afirmativo, determine as condições para que isso seja possível.

**c)** Nas condições do item *b*, existe a possibilidade de que a mediana da distribuição de frequências dos 25 lançamentos seja igual a 4? Em caso afirmativo, dê um exemplo de uma distribuição de frequências que satisfaz, explicitando as possibilidades para os quatro últimos lançamentos.

# Medidas de dispersão (ou variabilidade)

ANTONIO CUNHA/CB/D.A PRESS

Procurando uma companhia aérea para as viagens de negócios dos funcionários de sua pequena empresa, um empresário obteve, na internet, os percentuais mensais de pontualidade dos voos de duas companhias aéreas, **A** e **B**, no período de sete meses anteriores à data de sua pesquisa. Os resultados encontram-se a seguir:

| Companhia \ Mês | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 86% | 92% | 91% | 95% | 90% | 89% | 94% |
| **B** | 93% | 92% | 90% | 91% | 90% | 93% | 88% |

Inicialmente, ele calculou a média dos percentuais de pontualidade das duas companhias:

- companhia **A**:

$$\frac{86\% + 92\% + 91\% + 95\% + 90\% + 89\% + 94\%}{7} = \frac{637\%}{7} = 91\%$$

- companhia **B**:

$$\frac{93\% + 92\% + 90\% + 91\% + 90\% + 93\% + 88\%}{7} = \frac{637\%}{7} = 91\%$$

Conhecendo apenas o valor das médias das duas companhias, ele sabia que seria difícil optar por alguma. Surgiu, então, a ideia de saber qual companhia aérea apresentava desempenho mais regular, isto é, aquela cujos índices de pontualidade variassem menos.

Observando os valores da tabela, o empresário concluiu, sem muita convicção, que a companhia **B** era a mais regular.

A situação acima descrita mostra a necessidade de conhecermos as **medidas de dispersão** (ou variabilidade), que permitem quantificar a variabilidade de um conjunto de dados.

Vamos estabelecer quatro medidas de dispersão: a **amplitude**, a **variância**, o **desvio padrão** e o **desvio absoluto médio**.

## Amplitude

A **amplitude** de uma relação de valores assumidos por uma variável quantitativa é o número real dado pela diferença entre o maior e o menor valores registrados (nesta ordem).

No exemplo das companhias aéreas, temos:

- companhia **A**: A amplitude é igual a 95% − 86% = 9%
- companhia **B**: A amplitude é igual a 93% − 88% = 5%

Como a amplitude dos dados mensais da companhia **B** é menor que a amplitude dos dados mensais da companhia **A**, conclui-se que a companhia **B** é a mais regular, isto é, seus índices oscilaram menos do que os da outra companhia.

Definiremos agora três medidas de variabilidade que quantificam a dispersão (espalhamento) dos dados em relação à média.

**OBSERVAÇÃO**

A amplitude de um conjunto de dados é uma medida de variabilidade fácil de ser calculada e, em geral, eficaz na análise da dispersão dos dados e na comparação da variabilidade de dois conjuntos de valores.

## Variância

Sejam $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}$ a relação de valores assumidos por uma variável quantitativa **X** e $\bar{\mathbf{x}}$ a média aritmética desses valores.

Para cada $\mathbf{x_i}$ (i = 1, 2, ..., n), calculamos o quadrado da diferença entre esse valor e a média, ou seja, $(x_i - \bar{x})^2$, que é chamado desvio quadrático.

A **variância** – indica-se por Var X ou $\sigma^2$ (lê-se: sigma ao quadrado) – é a média aritmética dos desvios quadráticos, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Usando a notação de somatório, escrevemos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

**Pense nisto:**

A variância seria igual a zero: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x}) = $
$= \underbrace{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}_{\text{soma de todos os valores}} - \underbrace{(\bar{x} + \bar{x} + ... + \bar{x})}_{\text{n parcelas}}$

Como $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, temos que $x_1 + x_2 + ... + x_n = n \cdot \bar{x}$, donde: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = n \cdot \bar{x} - n \cdot \bar{x} = 0$. Desse modo, teríamos $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$.

Observe que, em qualquer situação, $\sigma^2$ é um número real não negativo, pois o numerador da expressão é uma soma de quadrados em $\mathbb{R}$.

Vamos calcular a variância dos dados referentes aos percentuais mensais de pontualidade das duas companhias (para facilitar, omitiremos nos cálculos os símbolos de %):

**Companhia A**

| Mês | $x_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 86 | $(86 - 91)^2$ |
| 2 | 92 | $(92 - 91)^2$ |
| 3 | 91 | $(91 - 91)^2$ |
| 4 | 95 | $(95 - 91)^2$ |
| 5 | 90 | $(90 - 91)^2$ |
| 6 | 89 | $(89 - 91)^2$ |
| 7 | 94 | $(94 - 91)^2$ |

$$\sigma_A^2 = \frac{(86 - 91)^2 + (92 - 91)^2 + ... + (94 - 91)^2}{7}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(-5)^2 + 1^2 + 0^2 + 4^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2}{7} =$$

$$= \frac{25 + 1 + 0 + 16 + 1 + 4 + 9}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

**Companhia B**

| Mês | $x_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 93 | $(93 - 91)^2$ |
| 2 | 92 | $(92 - 91)^2$ |
| 3 | 90 | $(90 - 91)^2$ |
| 4 | 91 | $(91 - 91)^2$ |
| 5 | 90 | $(90 - 91)^2$ |
| 6 | 93 | $(93 - 91)^2$ |
| 7 | 88 | $(88 - 91)^2$ |

$$\sigma_B^2 = \frac{(93 - 91)^2 + (92 - 91)^2 + ... + (88 - 91)^2}{7}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}{7} =$$

$$= \frac{4 + 1 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9}{7} = \frac{20}{7} \simeq 2,86$$

Como a variância em **B** é menor que a variância em **A** ($\sigma_B^2 = 2,86 < \sigma_A^2 = 8$), concluímos que a companhia **B** é mais regular, isto é, os percentuais mensais de pontualidade de **B** estão menos dispersos em relação à média do que os percentuais mensais de **A**.

**PENSE NISTO:**

O que aconteceria com o valor da variância se na definição, no lugar dos desvios quadráticos, usássemos apenas os desvios $(x_i - \bar{x})$, isto é, se tivéssemos $\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x})}{n}$?

**OBSERVAÇÃO**

A variância é definida como uma soma de quadrados (média dos desvios quadráticos), sendo, portanto, uma medida cuja unidade é quadrática. Por exemplo, se estivéssemos estudando a altura dos alunos de uma turma, a altura média seria expressa em metros (m), porém a variância seria expressa em metros ao quadrado ($m^2$), o que geraria uma incompatibilidade em relação às unidades, pois m é a unidade de medida de comprimento e $m^2$ é unidade de área. Para uniformizá-las, definiremos o desvio padrão.

## Desvio padrão

Seja $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ a relação dos valores assumidos por uma variável **X**. Chamamos **desvio padrão** de **X**, indica-se por DP(X) ou $\sigma$, a raiz quadrada da variância de **X**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Vamos calcular o desvio padrão dos percentuais de pontualidade das companhias aéreas:

- companhia **A**: $\sigma_A^2 = 8 \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{8} \simeq 2{,}82$
- companhia **B**: $\sigma_B^2 = 2{,}86 \Rightarrow \sigma_B = \sqrt{2{,}86} \simeq 1{,}69$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**3** Num levantamento realizado em 100 jogos de futebol de um torneio foram colhidos os seguintes dados:

| Gols por partida | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frequência de jogos** | 28 | 26 | 31 | 9 | 4 | 2 |

Calcule o desvio padrão do número de gols marcados por partida.

**Solução:**

É importante lembrar que a variável em estudo é "número de gols marcados por partida", e ela assume os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 5 com frequências absolutas respectivamente iguais a 28, 26, 31, 9, 4 e 2.

Calculemos a média ($\overline{\mathbf{x}}$) desses valores. Temos a seguinte média de gols/partida:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 28 + 1 \cdot 26 + 2 \cdot 31 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{28 + 26 + 31 + 9 + 4 + 2} = \frac{141}{100} = 1{,}41$$

Calculemos, agora, os desvios quadráticos de cada valor que a variável assume com relação à média:

$$\underbrace{(0 - 1{,}41)^2}_{1{,}9881}; \underbrace{(1 - 1{,}41)^2}_{0{,}1681}; \underbrace{(2 - 1{,}41)^2}_{0{,}3481}; \underbrace{(3 - 1{,}41)^2}_{2{,}5281}; \underbrace{(4 - 1{,}41)^2}_{6{,}7081} \text{ e } \underbrace{(5 - 1{,}41)^2}_{12{,}8881}$$

Levando em conta as frequências absolutas, temos que a variância ($\sigma^2$) é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{28 \cdot 1{,}9881 + 26 \cdot 0{,}1681 + 31 \cdot 0{,}3481 + 9 \cdot 2{,}5281 + 4 \cdot 6{,}7081 + 2 \cdot 12{,}8881}{100}$$

$$\sigma^2 \simeq \frac{55{,}67 + 4{,}37 + 10{,}79 + 22{,}75 + 26{,}83 + 25{,}77}{100} = \frac{146{,}18}{100} = 1{,}4618$$

Daí, o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{1{,}4618} \simeq 1{,}21$ gol/partida.

## EXERCÍCIOS

**37** Para cada conjunto de valores, calcule a amplitude (**a**), a variância ($\sigma^2$) e o desvio padrão ($\sigma$):

**a)** 3 — 3 — 4 — 4 — 4 — 6

**b)** 1 — 2 — 3 — 4 — 5

**c)** 15 — 22 — 18 — 20 — 21 — 23 — 14

**d)** 31 — 31 — 31 — 31 — 31 — 31 — 31 — 31

**e)** 5 — 6 — 6 — 7 — 7 — 7 — 8 — 8 — 8 — 8

**38** Um grupo de 12 estudantes passou um dia de verão em um parque aquático. Seus gastos com alimentação são dados a seguir (valores em reais):

24 — 16 — 30 — 20 — 28 — 30 — 20 — 40 — 18 — 16 — 30 — 16

A partir dos valores dados, obtenha:

**a)** a variância;

**b)** o desvio padrão;

**c)** a amplitude.

**39** A quantidade de erros de digitação por página de uma pesquisa escolar com quarenta páginas é dada a seguir:

| Erro por página | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Número de páginas | 28 | 8 | 4 |

**a)** Determine as medidas de centralidade (média, mediana e moda) correspondentes à quantidade de erros.

**b)** Determine as medidas de dispersão (variância e desvio padrão) correspondentes.

**40** Um professor de inglês está interessado em comparar o desempenho de suas quatro turmas de um mesmo curso. Para isso, considerou a média final dos cinco alunos de cada turma:

| Turma A | 3 | 5 | 7 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Turma B | 6 | 6 | 4 | 4 | 5 |
| Turma C | 9 | 1 | 6 | 5 | 4 |
| Turma D | 7 | 8 | 5 | 2 | 3 |

**a)** Calcule a amplitude das notas de cada turma e use esses valores para ordená-las, da mais regular à menos regular.

**b)** Compare os desvios padrões das turmas **C** e **D**, indicando aquela com aproveitamento mais regular dos alunos.

**c)** Use o desvio padrão para comparar as turmas **A** e **B** quanto à regularidade das notas finais dos alunos.

**41** Nas tabelas a seguir estão representadas as taxas de analfabetismo, expressas em porcentagem, dos estados das regiões Centro-Oeste e Sudeste em 2013:

**Taxas de analfabetismo**

| Região Centro-Oeste | |
|---|---|
| Distrito Federal | 3,2% |
| Goiás | 7,1% |
| Mato Grosso | 7,8% |
| Mato Grosso do Sul | 7,2% |

| Região Sudeste | |
|---|---|
| São Paulo | 3,7% |
| Rio de Janeiro | 3,7% |
| Minas Gerais | 7,6% |
| Espírito Santo | 6,6% |

**Fonte:** IBGE, 2013.

Qual região apresenta o conjunto de valores mais homogêneo? Calcule o desvio padrão das taxas de analfabetismo nas duas regiões para comprovar sua resposta.

**42** No quadro seguinte constam as notas que Pedro e Paulo tiraram nas cinco avaliações que fizeram em um curso de informática.

| Pedro | 7,0 | 4,5 | 5,5 | 5,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Paulo | 5,0 | 5,5 | 3,0 | 4,0 | 7,5 |

Calcule a variância das notas de cada aluno, indicando qual deles obteve desempenho mais homogêneo.

**43** Os salários dos 20 funcionários que trabalham em um certo setor de uma indústria estão apresentados na tabela:

**Salários da indústria**

| Salários (em reais) | Número de funcionários |
|---|---|
| 1 200,00 | 10 |
| 1 440,00 | 6 |
| 2 400,00 | 4 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Calcule a média ($\bar{x}$) e o desvio padrão ($\sigma$) dos salários.

**b)** Suponha que sejam contratados cinco funcionários, cada um com salário de R$ 1 500,00. A média salarial dos 25 funcionários que trabalharão neste setor irá aumentar, diminuir ou permanecer constante? Por quê?

**44** Os valores seguintes representam os resultados obtidos por 12 estudantes em um experimento cujo objetivo era calcular, em milímetros, uma determinada distância:

8,7 — 8,5 — 9,2 — 8,8 — 8,9 — 8,6 — 8,7 — 8,6 — 8,4 — 8,7 — 8,6 — 8,7

O professor considerou aceitáveis os resultados pertencentes ao intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$, em que $\bar{x}$ é a média e $\sigma$ o desvio padrão dos dados acima.

Quantos alunos não tiveram seu resultado considerado aceitável?

**45** Para preencher uma vaga de emprego, os 5 candidatos finalistas foram submetidos a 3 provas (Redação, Raciocínio quantitativo e Inglês) e uma dinâmica de grupo. As notas obtidas pelos candidatos encontram-se no quadro seguinte:

| | Redação | Dinâmica | Raciocínio quantitativo | Inglês |
|---|---|---|---|---|
| **Candidato A** | 6,5 | 6,0 | 8,0 | 7,0 |
| **Candidato B** | 7,0 | 7,5 | 5,0 | 7,0 |
| **Candidato C** | 7,0 | 7,0 | 4,5 | 5,0 |
| **Candidato D** | 6,0 | 7,0 | 6,0 | 6,0 |
| **Candidato E** | 7,5 | 7,5 | 4,0 | 8,5 |

A escolha do candidato obedecerá ao seguinte critério:

1º) O candidato deverá apresentar nota média maior ou igual a 6,5, considerando as provas e a dinâmica.

2º) Se houver mais de um candidato com nota média maior ou igual a 6,5, será selecionado o que apresentar melhor desempenho na dinâmica.

3º) Persistindo o empate, será escolhido o candidato que apresentar desempenho mais regular nas três provas.

Qual foi o candidato selecionado para essa vaga?

**46** Na tabela seguinte constam os percentuais de atraso nos voos de uma companhia aérea, no primeiro semestre de certo ano, segundo os destinos:

**Percentual de atraso em voos**

| Voos nacionais | Voos internacionais com até 5 horas de duração | Voos internacionais com mais de 5 horas de duração |
|---|---|---|
| 12% | 8% | 7% |

Dados elaborados pelo autor.

Preocupada com os índices apresentados, a companhia fez uma campanha para diminuir os percentuais de atraso nos voos em cada um dos três destinos. Os índices projetados para o segundo semestre são de 9% para voos nacionais e 4% para voos internacionais com até 5 horas de duração. Qual deverá ser o valor projetado para o percentual de atraso nos voos internacionais com mais de 5 horas de duração a fim de que a redução seja atingida, e o desvio padrão dos três índices do 2º semestre seja igual ao desvio padrão dos 3 índices do 1º semestre?

## Desvio médio

Outra medida de dispersão, geralmente menos usual que a variância (e o desvio padrão), é o **desvio médio absoluto**, ou, simplesmente, **desvio médio**.

Sejam $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ os valores assumidos por uma variável quantitativa **X** e $\mathbf{\bar{x}}$ a média aritmética desses valores. O desvio médio (indicaremos por DM) é definido por:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

Observe que DM representa a média aritmética dos desvios entre $x_i$ (i = 1, 2, ..., n) e $\mathbf{\bar{x}}$, expressos pelo módulo da diferença entre um valor que a variável assume ($\mathbf{x_i}$) e a média ($\mathbf{\bar{x}}$).

**EXEMPLO 5**

As temperaturas mínimas diárias de duas cidades da serra catarinense, em uma mesma semana de inverno, estão representadas abaixo.

| | Segunda | Terça | Quarta | Quinta | Sexta |
|---|---|---|---|---|---|
| **Cidade A** | −1 °C | 0 °C | 2 °C | −1 °C | −3 °C |
| **Cidade B** | −1 °C | −2 °C | 1 °C | 1 °C | −2 °C |

Vamos usar o desvio médio para decidir em qual cidade as temperaturas oscilaram menos em relação à média semanal.

- Para a cidade **A**, temos:

$$\bar{x} = \frac{-1 + 0 + 2 + (-1) + (-3)}{5} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

$$DM = \frac{|-1 - (-0{,}6)| + |0 - (-0{,}6)| + |2 - (-0{,}6)| + |-1 - (-0{,}6)| + |-3 - (-0{,}6)|}{5}$$

$$DM = \frac{|-0{,}4| + |0{,}6| + |2{,}6| + |-0{,}4| + |-2{,}4|}{5} = \frac{0{,}4 + 0{,}6 + 2{,}6 + 0{,}4 + 2{,}4}{5} = 1{,}28$$

- Para a cidade **B**, temos:

$$\bar{x} = \frac{(-1) + (-2) + 1 + 1 + (-2)}{5} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

$$DM = \frac{|-1 - (-0{,}6)| + |-2 - (-0{,}6)| + |1 - (-0{,}6)| + |1 - (-0{,}6)| + |-2 - (-0{,}6)|}{5}$$

$$DM = \frac{|-0{,}4| + |-1{,}4| + |1{,}6| + |1{,}6| + |-1{,}4|}{5} = \frac{0{,}4 + 1{,}4 + 1{,}6 + 1{,}6 + 1{,}4}{5} = 1{,}28$$

Coincidentemente, as duas cidades apresentaram igual temperatura mínima média e igual desvio médio, o que nos mostra que não houve diferença na média das dispersões das temperaturas (em torno da média) para as duas cidades, considerando o desvio médio como medida.

Para "desempatar", poderíamos, por exemplo, calcular a amplitude das temperaturas nas duas cidades: cidade **A**: 2 °C − (−3 °C) = 5 °C; cidade **B**: 1 °C − (−2 °C) = 3 °C. Concluiríamos, desse modo, que em **B** os dados estão menos dispersos (ou variam menos), formando um conjunto mais homogêneo.

## EXERCÍCIOS

**47** Calcule o desvio médio para cada um dos seguintes conjuntos de dados:

**a)** 2 — 4 — 6

**b)** 2 — 3 — 5 — 4 — 8 — 8

**c)** 20 — 25 — 15 — 35 — 30

**48** Um país hipotético é formado por duas regiões, **A** e **B**, cada uma com cinco cidades de mesma população. Foi feito um levantamento para saber o grau de satisfação da população de cada cidade, em relação à respectiva administração regional. No quadro, constam notas de 0 a 10 para medir a satisfação dos habitantes:

| **Região A** | 7,0 | 4,5 | 5,5 | 5,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Região B** | 5,0 | 8,5 | 3,0 | 1,0 | 7,5 |

Calcule o desvio médio absoluto para cada região, determinando em qual delas as opiniões são menos divergentes.

**49** Na tabela seguinte, encontram-se os valores de uma gratificação dada aos funcionários de uma pequena empresa no fim do ano:

**Gratificação de fim de ano**

| Gratificação (em reais) | Número de funcionários |
|---|---|
| 200,00 | 8 |
| 450,00 | 12 |
| 800,00 | 5 |
| 1 500,00 | 3 |
| 2 500,00 | 2 |

Dados elaborados pelo autor.

Calcule o desvio médio das gratificações recebidas, arredondando os valores obtidos para o número inteiro mais próximo.

# Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados

Os salários dos 23 funcionários de um estabelecimento comercial estão representados na tabela seguinte:

**Salários**

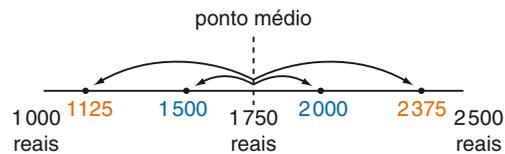
| Salários (em reais) | Número de funcionários |
|---|---|
| 1 000 ⊢ 2 500 | 4 |
| 2 500 ⊢ 4 000 | 12 |
| 4 000 ⊢ 5 500 | 7 |

Dados elaborados pelo autor.

Qual é a média salarial dos funcionários deste estabelecimento?

Quando a variável em estudo apresenta seus valores agrupados em classes ou intervalos, não dispomos de informações para saber como esses valores estão distribuídos em cada faixa.

Para que se possa calcular a média (e outras medidas de centralidade e dispersão) desses valores, costuma-se fazer a suposição de que, em cada intervalo, os valores estão distribuídos de forma simétrica em relação ao **ponto médio** (indicado por $\mathbf{x_i}$) do intervalo. Ao considerar, por exemplo, o primeiro intervalo, 1 000 ⊢ 2 500 $\left(\text{cujo ponto médio é } \frac{1\,000 + 2\,500}{2} = 1\,750\right)$, uma possível distribuição simétrica dos quatro salários é dada a seguir.

Salários: R$ 1 125,00; R$ 1 500,00; R$ 2 000,00 e R$ 2 375,00

Observe que há uma compensação entre valores equidistantes dos extremos do intervalo (1 000 e 2 500), de modo que a média de cada par desses valores coincide com o ponto médio $\mathbf{x_i}$. Vejamos: 1 125 e 2 375 são equidistantes dos extremos do intervalo; a média entre eles é $\frac{1\,125 + 2\,375}{2} = 1\,750 = x_i$.

O mesmo raciocínio se aplica ao par de valores 1 500 e 2 000.

Na prática, essa suposição é equivalente a admitir que todos os quatro salários desse intervalo são iguais a R$ 1 750,00, que é o ponto médio.

Estendendo esse raciocínio aos demais intervalos, é possível calcular a média salarial dos funcionários desse estabelecimento:

| Salários (em reais) | Ponto médio do intervalo | Número de funcionários |
|---|---|---|
| 1 000 ⊢ 2 500 | 1 750 | 4 |
| 2 500 ⊢ 4 000 | 3 250 | 12 |
| 4 000 ⊢ 5 500 | 4 750 | 7 |

$$\bar{x} = \frac{1750 \cdot 4 + 3\,250 \cdot 12 + 4\,750 \cdot 7}{4 + 12 + 7} = \frac{79\,250}{23} \simeq 3\,445{,}65$$

Arredondando para o inteiro mais próximo, temos que a média salarial dos funcionários do estabelecimento é R$ 3 446,00.

## Cálculo do desvio padrão

O cálculo das medidas de dispersão (variância e desvio padrão) em relação à média está apoiado na mesma suposição: dentro de cada intervalo, os valores distribuem-se de forma simétrica em torno do ponto médio ($\mathbf{x_i}$). Na prática, admitimos que todos os valores do intervalo coincidem com $\mathbf{x_i}$.

| Salários (em reais) | Ponto médio do intervalo ($x_i$) | Desvio quadrático $(x_i - \bar{x})^2$ | Número de funcionários |
|---|---|---|---|
| 1 000 ⊢ 2 500 | 1 750 | $(1\,750 - 3\,446)^2$ | 4 |
| 2 500 ⊢ 4 000 | 3 250 | $(3\,250 - 3\,446)^2$ | 12 |
| 4 000 ⊢ 5 500 | 4 750 | $(4\,750 - 3\,446)^2$ | 7 |

A variância ($\sigma^2$), como sabemos, é a média aritmética desses desvios, ponderada pelas respectivas frequências absolutas (número de funcionários) de cada intervalo:

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot (1\,750 - 3\,446)^2 + 12 \cdot (3\,250 - 3\,446)^2 + 7 \cdot (4\,750 - 3\,446)^2}{23}$$

$$\sigma^2 = \frac{11\,505\,664 + 460\,992 + 11\,902\,912}{23} = \frac{23\,869\,568}{23} \simeq 1\,037\,807$$

Desse modo, a variância dos salários é 1 037 807 (reais)$^2$ e o desvio padrão dos salários é:

$$\sigma = \sqrt{1\,037\,807\ (\text{reais})^2} \simeq 1\,018{,}73 \text{ reais}$$

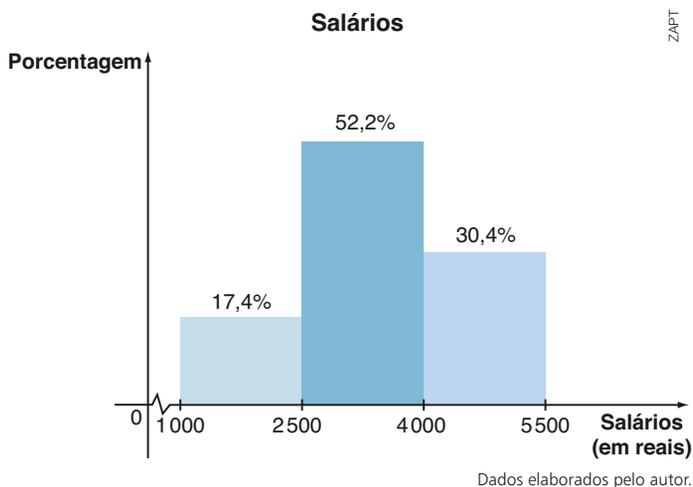
## Determinação da classe modal

Definimos **classe modal** como a classe que apresenta maior frequência absoluta. No exemplo, a classe modal é 2 500 ⊢ 4 000, pois há 12 valores pertencentes a esse intervalo (as outras frequências são menores: 4 e 7).

## Cálculo da mediana

Lembremos, inicialmente, que a mediana de uma relação de valores é um valor que separa essa relação em duas partes com a mesma quantidade de valores, sendo que, em uma das partes, todos os valores são menores ou iguais à mediana e, na outra parte, todos os valores são maiores ou iguais à mediana.

Observe, no histograma seguinte, as porcentagens aproximadas de cada intervalo:

Dados elaborados pelo autor.

Da leitura do gráfico, notamos que:

- ao final do primeiro intervalo encontram-se 17,4% do total de valores;
- ao final dos dois primeiros intervalos, encontram-se acumulados 69,6% do total de valores (17,4% + 52,2% = 69,6%).

Com base nas observações anteriores, concluímos que a mediana se encontra no segundo intervalo. Do limite inferior do primeiro intervalo (1 000) até a mediana concentram-se 50% do total de valores (17,4% + 32,6% = 50%).

Observando que, no segundo intervalo, o retângulo roxo e o retângulo destacado com fio vermelho possuem a mesma altura, temos que a área de cada um desses retângulos (expressa como porcentagem da área total sob o histograma) é diretamente proporcional à medida de sua base, isto é:

$$\frac{Me - 2\,500}{32{,}6\%} = \frac{4\,000 - 2\,500}{52{,}2\%} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Me \simeq 3\,436{,}78$$

Logo, a mediana é aproximadamente 3 436,78 reais.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**4** Durante 60 dias, anotou-se o número de cartas entregues, diariamente, em um edifício residencial. Os resultados são mostrados na tabela e no histograma seguintes.

**Cartas entregues por dia**

| Número de cartas | Frequência absoluta | Porcentagem (%) |
|---|---|---|
| 20 ⊢ 30 | 5 | 8,3 |
| 30 ⊢ 40 | 9 | 15 |
| 40 ⊢ 50 | 20 | 33,3 |
| 50 ⊢ 60 | 18 | 30 |
| 60 ⊢ 70 | 8 | 13,3 |

Dados elaborados pelo autor.

**Cartas entregues por dia**

Dados elaborados pelo autor.

Determine as três medidas de centralidade correspondentes ao número de cartas diariamente entregues no edifício.

**Solução:**

- Média ($\bar{x}$):

Usando os pontos médios de cada intervalo, temos:

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 5 + 35 \cdot 9 + 45 \cdot 20 + 55 \cdot 18 + 65 \cdot 8}{5 + 9 + 20 + 18 + 8} = \frac{2\,850}{60} = 47{,}5$$

- Mediana (Me):

A mediana encontra-se na 3ª classe (de 40 a 50), pois a porcentagem acumulada ao final das três primeiras classes já ultrapassa 50% (8,3% + 15% + 33,3% = 56,6%). Ao final das duas primeiras classes, a porcentagem de observações acumulada é de 8,3% + 15% = 23,3%. Isso mostra que do valor 40 até a mediana estão concentradas 50% − 23,3% = 26,7% das observações. Podemos então estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{50 - 40}{33{,}3\%} = \frac{Me - 40}{26{,}7\%} \Rightarrow Me \simeq 48$$

33,3%: porcentagem referente ao intervalo 40 ⊢ 50

26,7%: porcentagem referente ao intervalo 40 ⊢ Me (retângulo colorido)

- Classe modal:

A classe modal corresponde ao intervalo que reúne a maior porcentagem de valores. Nesse caso, a classe modal é o intervalo [40; 50[.

## EXERCÍCIOS

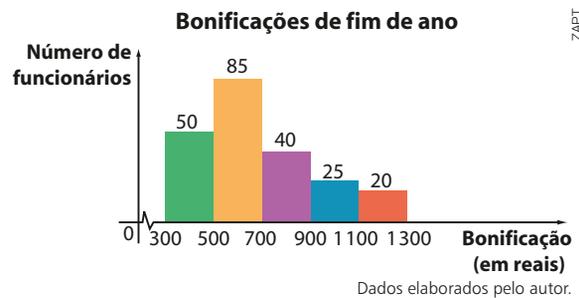
**50** No gráfico ao lado está representada a distribuição de bonificações de fim de ano concedidas aos funcionários de um estabelecimento comercial.

**a)** Qual é o número de funcionários do estabelecimento?

**b)** Qual é o valor médio das bonificações?

**c)** Qual é a classe modal das bonificações?

**d)** Escolhido ao acaso um funcionário desse estabelecimento, qual é a probabilidade de que ele tenha recebido ao menos R$ 700,00 de bonificação?

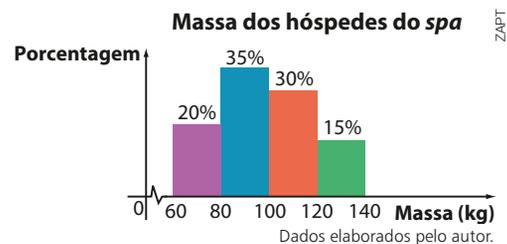
Dados elaborados pelo autor.

**51** No histograma ao lado estão representadas as massas de 200 clientes que se hospedaram durante uma semana em um *spa*:

**a)** Quantos hóspedes tinham menos de 120 kg?

**b)** Qual a massa média desses clientes?

**c)** Qual a massa mediana desses clientes?

**d)** Qual o desvio padrão das massas dessa distribuição?

Dados elaborados pelo autor.

**52** Na tabela seguinte constam os valores doados em um dia, na arrecadação de uma campanha beneficente:

**Campanha beneficente**

| Doações (em reais) | Número de doações |
|---|---|
| 5 a 15 | 1 250 |
| 16 a 26 | 1 083 |
| 27 a 37 | 762 |
| 38 a 48 | 541 |
| 49 a 59 | 509 |
| 60 a 70 | 321 |

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Qual é a menor quantia que pôde ter sido arrecadada nesse dia?

**b)** Qual é a maior quantia que pôde ter sido arrecadada nesse dia?

**53** Uma companhia de ônibus registrou a taxa de ocupação (em %) de suas viagens entre Goiânia e Brasília durante 40 dias. Os resultados são mostrados a seguir:

43 — 66 — 54 — 75 — 78 — 61 — 48 — 50 — 53 — 60 — 60 — 86 — 61 — 60 — 55 — 62 —
45 — 57 — 61 — 40 — 32 — 49 — 52 — 48 — 69 — 70 — 68 — 80 — 82 — 79 — 39 — 48 —
84 — 76 — 36 — 61 — 91 — 81 — 65 — 55

**a)** Considerando classes de amplitude 10 a partir de 32%, construa um histograma correspondente.

**b)** Calcule a taxa média, a taxa mediana e a classe modal de ocupação, considerando os dados agrupados.

**c)** Qual é o desvio padrão da taxa de ocupação, considerando os dados agrupados?

**54** As temperaturas máximas diárias registradas no mês de janeiro em uma cidade estão dadas na tabela seguinte:

**Temperaturas máximas diárias registradas em janeiro**

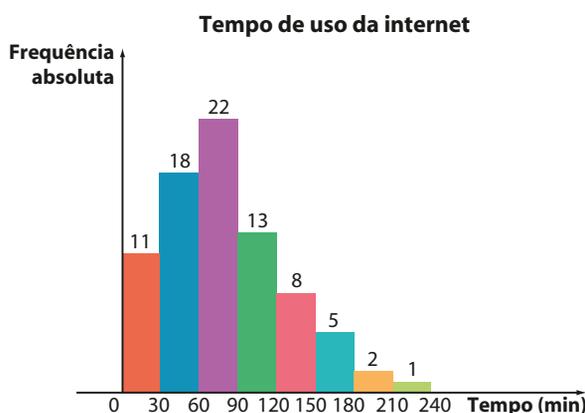
| Temperatura máxima | Número de dias |
|---|---|
| 25 °C ⊢ 28 °C | 9 |
| 28 °C ⊢ 31 °C | 11 |
| 31 °C ⊢ 34 °C | 7 |
| 34 °C ⊢ 37 °C | 4 |
| **Total** | **31** |

Dados elaborados pelo autor.

Determine:

**a)** a média, a mediana e a classe modal das temperaturas;

**b)** a variância e o desvio padrão das temperaturas.

**55** Um provedor de internet mediu o tempo (em minutos) de uso diário da rede por seus assinantes, por meio de uma amostragem. Com os dados obtidos na pesquisa construiu-se o seguinte histograma:

Dados elaborados pelo autor.

**a)** Que porcentagem do total de assinantes fica entre meia hora e uma hora e meia na rede?

**b)** Qual é a média e a mediana do tempo de uso da internet?

**c)** A partir do histograma anterior, faça um outro histograma agrupando os tempos de hora em hora. Calcule média, mediana e desvio padrão.

## DESAFIO

Seja $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ uma relação de dados numéricos correspondentes aos valores assumidos por uma variável quantitativa. Explique o que acontece com a média ($\overline{x}$), a variância ($\sigma^2$) e o desvio padrão ($\sigma$) desses valores se cada $x_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ é:

**a)** aumentado em duas unidades;

**b)** multiplicado por 2;

**c)** reduzido em 20%.

CAPÍTULO

# 6 Matemática Financeira

## Introdução

Considere os seguintes problemas:

- Se um consumidor atrasa o pagamento de uma conta telefônica em 5 dias, que valor ele deverá pagar, considerando a multa e a incidência de juros devido ao atraso?
- Se um trabalhador reservar, mensalmente, uma pequena parcela de seu salário para aplicar em uma caderneta de poupança, é possível estimar o valor dessa reserva financeira depois de um ano?
- Se um poupador deposita certa quantia na caderneta de poupança, como é corrigido, mês a mês, o saldo dessa poupança? É possível saber por quanto tempo o poupador deve manter o seu dinheiro nessa poupança a fim de resgatar o dobro da quantia aplicada?
- Se um consumidor optar por comprar uma geladeira em duas parcelas fixas (uma no ato e a outra em 30 dias) de R$ 600,00 cada uma, quanto por cento pagará de juros, considerando que o preço à vista do aparelho é de R$ 1100,00?

WESLEY SANTOS/FUTURA PRESS

- Se, em um financiamento, um automóvel é vendido em 12 parcelas iguais e mensais (sendo a primeira um mês após a compra) de R$ 4 000,00 e a taxa de juros do financiamento é de 1,8% ao mês, qual seria o valor à vista desse automóvel?

Essas e outras questões são estudadas pela Matemática Financeira, que aborda as diferentes modalidades de juros (simples e compostos), os financiamentos, os mecanismos de correção de valores em investimentos financeiros etc. Neste estudo, é importante retomar alguns conteúdos vistos em anos anteriores, entre eles a porcentagem.

No volume 1 desta coleção resolvemos alguns problemas envolvendo porcentagens.

As porcentagens também podem ser expressas na forma de fração centesimal (fração cujo denominador é igual a 100) ou na forma decimal (divindo-se o numerador pelo denominador na fração).

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Observe as diferentes representações:

- $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$
- $8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$
- $13{,}6\% = \frac{13{,}6}{100} = 0{,}136$
- $120\% = \frac{120}{100} = 1{,}20$

Para se obter, por exemplo, 32% de R$ 800,00, podemos calcular:

$$0{,}32 \cdot 800 = 256, \text{ ou seja, R\$ } 256{,}00$$

Com uma calculadora simples, basta pressionar as seguintes teclas:

   →  →   →  →  → 


Outra possibilidade é usar o cálculo mental. Como 10% de 800 é igual a 80 (lembre que 10% de um certo valor corresponde à décima parte desse valor), temos que 1% de 800 é igual a 8; logo, podemos fazer $32 \cdot 8 = 256$, para obter o valor procurado.

## Aumentos e descontos

Certa loja vende uma máquina de lavar roupas por R$ 900,00. Se a loja promover um aumento de 6% em seus preços, quanto a máquina passará a custar?

MARCIO FEERNANDES/AE

A compra à vista pode ser vantajosa quando é oferecido um desconto em seu preço.

- O aumento será 6% de 900 reais: $0{,}06 \cdot (900 \text{ reais}) = 54$ reais.
- O novo preço da máquina será: 900 reais + 54 reais = 954 reais.

Poderíamos simplesmente efetuar:

$$900 + 0{,}06 \cdot 900 = 900 \cdot (1 + 0{,}06) = 1{,}06 \cdot 900 = 954$$

Observe que o preço inicial da máquina foi multiplicado por 1,06.

Dispondo de uma calculadora simples, é muito rápido obter o resultado acima. Basta pressionar:

   →  →  →  →

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que:

- se o aumento fosse de 30%, multiplicaríamos o preço original por 1,30;
- se o aumento fosse de 16%, multiplicaríamos o preço original por 1,16;

⋮ ⋮ ⋮

- se o aumento fosse de i%, multiplicaríamos o preço original por:

$$1 + \frac{i}{100}$$

**PENSE NISTO:**

Se o aumento fosse de 250%, por qual número multiplicaríamos o preço original para saber seu novo valor?

Seja **p** o preço inicial.
Aumento:
250% de **p** $= \frac{250}{100} \cdot p = 2{,}5p$
Assim, o novo preço será: $p + 2{,}5p = 3{,}5p$, isto é, o preço original é multiplicado por 3,5.
É interessante fazer a analogia com o aumento de 100%: o valor dobra, isto é, multiplicamos o preço inicial **p** por 2; temos:
$p + 1 \cdot p$
↳ 100%

Se, por outro lado, em uma liquidação, fosse anunciado um desconto de 20% no preço da máquina de lavar, quanto ela passaria a custar?

- O desconto seria 20% de 900 reais: $0{,}2 \cdot (900 \text{ reais}) = 180$ reais.
- O novo preço da máquina seria: 900 reais − 180 reais = 720 reais.

Poderíamos efetuar diretamente:

$$900 - 0{,}2 \cdot 900 = 900 \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}8 \cdot 900 = 720$$

Note que o preço original foi multiplicado por 0,8.

Isso significa que, nessa liquidação, pagaremos 80% do valor original da máquina.

Para fazermos os cálculos acima com uma calculadora simples, basta pressionar:

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que:

- se o desconto fosse de 8%, multiplicaríamos o preço original por $1 - 0{,}08 = 0{,}92$;
- se o desconto fosse de 15%, multiplicaríamos o preço original por $1 - 0{,}15 = 0{,}85$;

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- se o desconto fosse de i%, multiplicaríamos o preço original da máquina por:

$$1 - \frac{i}{100}$$

## Variação percentual

No início do mês, o preço do quilograma do salmão, em um mercado municipal, era de R$ 40,00. No final do mês, o mesmo tipo de salmão era vendido a R$ 43,00 o quilograma.

De que maneira podemos expressar esse aumento?

- Em valores absolutos, o aumento foi de R$ 3,00.
- Calculando a razão entre esse aumento e o valor inicial, encontramos $\frac{3}{40} = 0{,}075 = 7{,}5\%$.

Dizemos que 7,5% é a **variação percentual** do preço do quilograma do salmão.

De: $\begin{cases} 40 & — & 100\% \\ 3 & — & x \end{cases}$
temos: $40 \cdot x = 3 \cdot 100\% \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{3}{40} \cdot 100\% = 7{,}5\%$
Assim, a variação percentual é 7,5%.
Outra opção: $\begin{cases} 40 & — & 100\% \\ 43 & — & x \end{cases}$
$x = 107{,}5\%$
O acréscimo é de $107{,}5\% - 100\% = 7{,}5\%$.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Apesar de ser um alimento rico em proteínas, vitaminas e minerais, o peixe ainda é pouco consumido pelos brasileiros.

**PENSE NISTO:**

Calcule o percentual de aumento por meio de uma regra de três.

Outra possibilidade é fazer:

$$\frac{43}{40} = 1{,}075 = 1 + \underbrace{0{,}075}_{\text{aumento de 7,5\%}}$$

Temos, então:

$$p = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} - 1$$

em que:

- $\mathbf{V_0}$ é o valor inicial de um produto;
- $\mathbf{V_1}$ é o valor desse produto em uma data futura;
- **p** é a variação percentual do preço desse produto no período considerado, expressa na forma decimal.
- Se $p > 0$, dizemos que **p** representa a **taxa percentual de aumento** (ou acréscimo), conforme vimos no exemplo do preço do salmão.
- Se $p < 0$, dizemos que **p** representa a **taxa percentual de desconto** (ou decréscimo).

Ao pagarmos R$ 38,00 o quilo, e não R$ 40,00, estamos pagando $\frac{38}{40} = 0{,}95 = 95\%$ do preço normal do quilo do salmão. Isso significa que o desconto oferecido é de 5%.

**EXEMPLO 1**

Se, em um mês, o preço do quilograma do salmão tivesse diminuído de R$ 40,00 para R$ 38,00, teríamos:

$$p = \frac{38 - 40}{40} = \frac{-2}{40} = -0{,}05$$

Isso significa uma redução de 5%, ou ainda, um decréscimo de 5% no valor inicial do quilograma do salmão.

**PENSE NISTO:**

Nesse exemplo, poderíamos efetuar $\frac{38}{40} = 0{,}95$ e chegar à mesma resposta. Explique.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** O Produto Interno Bruto (PIB) de um país aumentou 3% em um ano, passando a ser igual a 412 bilhões de dólares. Qual era o PIB antes deste aumento?

**Solução:**

*1º modo:*

Podemos calcular:

$$p = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \Rightarrow 0{,}03 = \frac{412 - V_0}{V_0} \Rightarrow 0{,}03 \cdot V_0 = 412 - V_0 \Rightarrow 1{,}03 \cdot V_0 = 412 \Rightarrow V_0 = \frac{412}{1{,}03} = 400$$

Logo, antes do aumento, o PIB era igual a 400 bilhões de dólares.

*2º modo:*

Podemos montar a seguinte regra de três:

$$\begin{cases} \text{412 bilhões de dólares} & — & 103\% \\ x & — & 100\% \end{cases} \Rightarrow x = \text{400 bilhões de dólares}$$

**2** Após uma redução de 8% em seu valor, um artigo passou a custar R$ 110,40. Qual era seu preço original?

**Solução:**

*1º modo:*

Temos $V_1 = 110{,}40$, $p = -0{,}08$ e queremos determinar o valor de $\mathbf{V_0}$.

Daí obtemos:

$$-0{,}08 = \frac{110{,}40 - V_0}{V_0} \Rightarrow -0{,}08V_0 = 110{,}40 - V_0 \Rightarrow 0{,}92V_0 = 110{,}40 \Rightarrow V_0 = \frac{110{,}40}{0{,}92} = 120$$

Logo, o preço original era igual a 120 reais.

*2º modo:*

Podemos montar a seguinte regra de três:

$$\begin{cases} R\$\ 110{,}40 & — & 92\% \\ x & — & 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 120 \text{ reais}$$

**3** Um produto sofreu dois aumentos mensais e consecutivos de 5% e 10%, respectivamente.

**a)** Qual será seu preço após os aumentos, se antes custava R$ 400,00?

**b)** Qual será o aumento percentual acumulado?

**Solução:**

**a)** Após o 1º aumento, o preço, em reais, passará a ser: $1{,}05 \cdot 400 = 420$

Após o 2º aumento, o preço, em reais, passará a ser: $1{,}10 \cdot 420 = 462$

**b)** $p = \frac{462 - 400}{400} = \frac{62}{400} = 0{,}155$

Assim, o aumento acumulado foi de 15,5%.

## EXERCÍCIOS

**1** O preço de um par de sapatos era R$ 68,00. Em uma liquidação, ele foi vendido com 15% de desconto. Quanto passou a custar?

**2** Se uma loja aumentar em 12% o preço de todos os seus produtos, quanto passará a custar um artigo cujo preço era:

**a)** R$ 40,00? **b)** R$ 150,00?

**3** O preço de um produto aumentou de R$ 320,00 para R$ 360,00.

**a)** Qual é a taxa percentual de aumento?

**b)** Qual seria o novo preço do produto se o aumento tivesse sido de 35%?

**4** Pesquisando em um *site* de reserva de hotéis, Jurandir encontrou uma promoção na diária de um hotel na praia, de R$ 250,00 por R$ 210,00.

**a)** Qual é o percentual de desconto oferecido?

**b)** Jurandir aproveitou a promoção e fez uma reserva de uma semana no hotel, pelo *site*. Sabendo que serão cobradas taxas de 1,5% sobre o total da reserva e R$ 15,00 pela emissão do *voucher*, qual será o total a ser pago por Jurandir?

**5** Usando uma calculadora simples, responda às perguntas seguintes:

**a)** O preço do quilograma do tomate em um sacolão é R$ 1,28 e sofrerá uma redução de 7,8%. Qual será o novo preço?

**b)** O aluguel de uma sala comercial é R$ 1 480,00 ao mês. Foi autorizado um aumento de 11,3% no aluguel de imóveis comerciais. Qual será o novo valor?

**c)** Sobre o salário bruto de R$ 2 850,00 de um trabalhador incidem 17,5% de impostos. Qual o salário líquido desse trabalhador?

**6** Três produtos, **A**, **B** e **C**, sofreram reajustes em um supermercado, como mostrado a seguir.

| Produto | Preço anterior (R$) | Preço atual (R$) |
|---|---|---|
| A | 0,40 | 0,50 |
| B | 1,50 | 1,80 |
| C | 0,60 | 0,75 |

Compare os aumentos percentuais dos preços dos três produtos.

**7** Após um aumento de 24%, o salário bruto de Raul passou a ser de R$ 4 340,00.

**a)** Qual era o salário bruto de Raul?

**b)** Supondo que sobre o salário bruto incidam impostos de 16%, determine quanto Raul passará a pagar a mais de impostos por mês.

**8** Uma companhia aérea promoveu uma redução de R$ 150,00 no preço de uma passagem, o que corresponde a 12% de desconto. Determine o preço da passagem:

**a)** sem a redução; **b)** com a redução.

**9** Por meio de uma campanha de redução do consumo de água, um edifício residencial, em um certo mês, reduziu o consumo em 14%, passando a gastar 1075 $m^3$ de água.

**a)** Qual foi o consumo de água do condomínio no mês anterior?

**b)** Para o mês seguinte, os moradores comprometeram-se a reduzir o consumo para 1000 $m^3$ de água. Para atingir essa meta, qual deverá ser a nova redução percentual no consumo de água?

**10** Seja **p** o preço de um produto. Determine, em função de **p**, o novo valor desse produto se ele tiver:

**a)** aumento de 38%;

**b)** aumento de 10,5%;

**c)** desconto de 3%;

**d)** desconto de 12,4%;

**e)** dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, respectivamente;

**f)** dois descontos sucessivos de 20% e 15%, respectivamente;

**g)** um aumento de 30% seguido de um desconto de 20%;

**h)** três aumentos sucessivos de 10% cada um.

**11** O preço de um produto é R$ 50,00, e um comerciante decide aumentá-lo em 20%. Diante da insistência de um cliente, o comerciante concede, então, um desconto de 20% sobre o novo preço do produto.

**a)** Ao final dessas "transações", haveria alteração no preço original do produto? Quem "levaria vantagem": o comerciante ou o cliente?

**b)** Que taxa de desconto deveria ser aplicada diretamente sobre o preço original do produto para que fosse obtido o mesmo valor que seria pago pelo cliente, em caso de compra?

**12** Atualmente, o pagamento da prestação do apartamento consome 30% do salário bruto de Cláudio. Se a prestação aumentar 10%, que porcentagem do salário de Cláudio ela passará a representar, caso:

**a)** não haja aumento de salário;

**b)** o salário aumente 5%;

**c)** o salário aumente 30%.

**13** Um supermercado promoveu, em meses distintos, três promoções para certo produto, a saber:

I. Compre 1 e ganhe 50% de desconto na aquisição da 2ª unidade.

II. Compre 2 e leve 3.

III. Compre 4 e leve 5.

Considerando que o preço do produto não sofreu alteração, qual é a opção mais vantajosa para o consumidor? E a menos vantajosa?

**14** Um sabonete, cujo preço normal de venda é R$ 1,40, é vendido em três supermercados distintos, **X**, **Y** e **Z**, com as seguintes promoções:

- supermercado **X**: leve 4, pague 3;
- supermercado **Y**: desconto de 15% sobre o preço de cada unidade;
- supermercado **Z**: leve 6, pague 5.

Determine a opção mais vantajosa para um consumidor que comprar:

**a)** 12 unidades do sabonete;

**b)** 7 unidades do sabonete.

**15** O dono de um restaurante "por quilo" costuma, semanalmente, encomendar de um fornecedor 12 kg de arroz, 8 kg de feijão e 15 kg de batata.

**a)** Sabendo que os preços do quilograma do arroz, do feijão e da batata, em certa semana, são de R$ 4,00, R$ 3,40 e R$ 2,00, respectivamente, determine o gasto correspondente a esse pedido.

**b)** Na semana seguinte, os preços do quilograma do arroz, do feijão e da batata sofreram as seguintes variações, respectivamente: +3%, −5%, +6%. Qual foi a variação percentual do gasto do mesmo pedido?

**16** O reajuste anual autorizado para um certo plano de saúde foi de 28%. Enquanto aguardava o resultado das negociações sobre os reajustes, a seguradora do plano já havia aumentado a mensalidade em 10%.

Determine o percentual que deve ser aplicado ao valor vigente da mensalidade a fim de se cumprir o reajuste autorizado.

**17** Quatro amigos foram a uma lanchonete e fizeram exatamente o mesmo pedido. O valor da conta, a ser dividido igualmente entre eles, foi R$ 70,40, já incluídos os 10% de serviço. Quanto cada um pagaria se não fosse cobrada a taxa de serviço?

**18** Cecília comprou um apartamento por R$ 120 000,00 e o revendeu, dez anos depois, por R$ 450 000,00. Qual o percentual de valorização desse imóvel no período?

**19** Expresse na forma percentual:

**a)** um aumento de R$ 15,00 sobre uma mercadoria que custava R$ 60,00.

**b)** um desconto de R$ 28,00 em uma mercadoria que custava R$ 168,00.

**c)** um desconto de R$ 0,27 em um produto que custava R$ 0,90.

**d)** um aumento de R$ 208,00 em um produto que custava R$ 200,00.

**20** Um usuário recebeu uma conta telefônica com um valor 120% maior que a última conta, já paga. Assustado, recorreu à concessionária, que informou ter havido engano na cobrança, anunciando redução do valor apresentado à metade. Ainda assim, qual foi o acréscimo percentual do valor a pagar em relação ao da conta anterior?

## Juros

A palavra "juros" é bem familiar ao nosso cotidiano e está amplamente difundida nos mais variados veículos de comunicação (rádio, TV, jornal, internet etc.).

Veja a seguir algumas situações em que aparecem juros no nosso dia a dia.

- Ao tomar um empréstimo em um banco, o cliente deverá, ao final do prazo estabelecido, devolver ao banco a quantia emprestada acrescida de juros, devido ao "aluguel" do dinheiro.
- Se uma pessoa atrasa o pagamento de uma conta de consumo (por exemplo, luz, telefone, internet etc.), ela é obrigada a pagar, além do valor da conta, uma multa acrescida de juros diários sobre esse valor.
- Ao abrir uma caderneta de poupança, o poupador deposita uma quantia no banco. A cada mês serão incorporados juros ao saldo dessa poupança.
- Quando um correntista de banco ultrapassa o limite de seu cheque especial, o banco cobra juros diários sobre o valor excedido até o correntista repor o dinheiro para zerar sua conta.

LUIZ CARLOS MURAUSKAS/FOLHAPRESS

Muitas pessoas recorrem ao empréstimo bancário quando querem abrir um negócio próprio, por exemplo.

Normalmente, quando se realiza alguma dessas operações fica estabelecida uma taxa de juros (**x** por cento) por período (dia, mês, ano etc.) que incide sobre o valor da transação.

Veja, a seguir, alguns termos de uso frequente em Matemática Financeira.

UM – Unidade monetária: real, dólar, euro ou qualquer outra moeda.

**C** – Capital. O valor inicial de um empréstimo, dívida ou investimento.

**i** – Taxa de juros. A letra **i** vem do inglês *interest* ("juros"), e a taxa é expressa na forma percentual por período. Por exemplo, 5% ao mês (a.m.); 0,2% ao dia (a.d.); 10% ao ano (a.a.) etc.

**J** – Juros. Os juros correspondem ao valor obtido quando aplicamos a taxa sobre o capital ou sobre algum outro valor da transação. Os juros são expressos em UM.

**M** – Montante. Corresponde ao capital acrescido dos juros auferidos na transação, isto é, $M = C + J$.

Em Matemática Financeira, costuma-se adotar, para o período de um mês, o chamado **mês comercial** com 30 dias.

## Juros simples

Considere a seguinte situação: todo dia 15, Luís Henrique paga a conta mensal do pacote de TV por assinatura e internet de sua residência, a qual vence nesse dia. Em certo mês, porém, ele se esqueceu de pagá-la e lembrou-se apenas no dia 28 do mesmo mês que deixara de fazer o pagamento, dirigindo-se imediatamente ao banco.

Quando pegou a fatura, viu que o valor a ser pago na data de vencimento (dia 15) era de R$ 160,50. Um pouco mais abaixo, leu a seguinte orientação: Após o vencimento serão cobrados juros de mora de 0,033% ao dia (ou 1% ao mês) e multa de 2%, a serem incluídos na próxima fatura.

ILUSTRA CARTOON

O termo "juros de mora", comum no dia a dia, diz respeito à penalização imposta a um consumidor pelo atraso no cumprimento de sua obrigação.

Rapidamente, com uma calculadora, Luís Henrique chegou à conclusão de que, na fatura seguinte, seria cobrado, aproximadamente, um total de R$ 3,90 de encargos provenientes do atraso no pagamento.

Como ele chegou a esse valor?

- Inicialmente, ele calculou 2% de R$ 160,50, que é o valor correspondente à multa e que independe do número de dias de atraso:

$$2\% \cdot R\$\ 160{,}50 = 0{,}02 \cdot R\$\ 160{,}50 = R\$\ 3{,}21 \quad (1)$$

- Em seguida, calculou o juro diário cobrado:

$$0{,}033\% \cdot R\$\ 160{,}50 = \frac{0{,}033}{100} \cdot R\$\ 160{,}50 \simeq R\$\ 0{,}053$$

Aqui vale a pena lembrar que nosso sistema monetário não dispõe de moedas com valores inferiores a R$ 0,01. Desse modo, R$ 0,053 é um valor teórico compreendido entre R$ 0,05 e R$ 0,06 e será arredondado mais adiante.

Multiplicando esse valor por 13 (do dia 15 ao dia 28 foram 13 dias de atraso), ele obteve:

$$13 \cdot R\$\ 0{,}053 \simeq R\$\ 0{,}69 \quad (2)$$

- Somando (1) e (2), chega-se aos encargos de:

$$R\$\ 3{,}21 + R\$\ 0{,}69 = R\$\ 3{,}90$$

De acordo com o Banco Central do Brasil, a produção de moedas de 1 centavo está suspensa desde 2005, pois a quantidade de moedas em circulação foi considerada adequada para atender a demanda. Mas é importante ressaltar que as moedas de 1 centavo devem ser aceitas em todo o território nacional.

### Conceito

Observe que, nessa transação, a taxa de juros sempre incide sobre o mesmo valor (isto é, sobre o valor original da conta), gerando, desse modo, o mesmo juro por período considerado (no exemplo, o juro por dia é o mesmo).

Esse mecanismo de cálculo de juros é conhecido como **regime de juros simples**.

Vamos construir uma tabela para representar o juro total devido em função do número de dias de atraso, considerando os dados do exemplo anterior:

| **Número de dias de atraso** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Juros (R$)** | 0,053 | 0,106 | 0,159 | 0,212 | 0,265 | ... | 0,689 |

Para qualquer par de valores da tabela acima, notamos que a razão $\frac{\text{juros}}{\text{número de dias}}$ é constante:

$$\frac{0,053}{1} = \frac{0,106}{2} = \frac{0,159}{3} = \ldots = \frac{0,689}{13}$$

Desse modo, as grandezas "juros" e "número de dias de atraso" são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade vale 0,053, que é aproximadamente igual a 0,033% de R$ 160,50 — a taxa de juros aplicada sobre o capital (valor da conta).

Vamos generalizar essa ideia: aplicando-se juros simples a um capital **C**, à taxa **i** por período (com **i** expresso na forma decimal), durante **n** períodos, obtemos juros totais **J** tais que:

$$\frac{J}{n} = \text{constante}$$

A constante é dada pelo produto da taxa de juros (**i**) pelo capital (**C**).

$$\frac{J}{n} = i \cdot C \Rightarrow \boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

O montante obtido será:

$$M = C + J \Rightarrow M = C + C \cdot i \cdot n \Rightarrow \boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Como se trata de juros simples, os juros de 0,033% ao dia equivalem a juros de 30 · (0,033%) ao mês, isto é, 0,99% ao mês, que, na conta, aparece arredondado para 1% ao mês.

**PENSE NISTO:**

Por que a conta trazia a informação de que juros diários de 0,033% equivalem a 1% ao mês?

**OBSERVAÇÃO**

A principal aplicação do regime de juros simples é o cálculo de juros cobrados por atraso de pagamento de contas de consumo (telefone, gás, água, luz, TV por assinatura etc.). Como veremos adiante, a maioria das transações comerciais e financeiras (aplicação, financiamento, empréstimos etc.) obedece ao regime de juros compostos.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**4** Um capital de R$ 1 200,00 é aplicado em regime de juros simples, por 3 anos, à taxa de 1% ao mês. Calcule os juros dessa operação.

**Solução:**

*1º modo:*

Como a taxa de 1% incide sempre sobre o capital, os juros, em qualquer mês, são de 1% de 1 200. Para um período de 36 meses, temos:
$36 \cdot (1\% \cdot 1\,200) = 36 \cdot 0,01 \cdot 1\,200 = 0,36 \cdot 1\,200 = 36\% \cdot 1\,200$

- Em um mês, os juros, em reais, serão de $0,01 \cdot 1\,200 = 12,00$.
- Em três anos (ou 36 meses), o total dos juros, em reais, será $36 \cdot 12,00 = 432,00$.

*2º modo:*

Podemos aplicar a fórmula dos juros, lembrando que a taxa deve ser compatível com a unidade de tempo considerada. Assim: $C = 1\,200$; $i = \frac{1}{100} = 0,01$ e $n = 36$ meses

Logo, o total dos juros, em reais é:

$$J = C \cdot i \cdot n = 1\,200 \cdot 0,01 \cdot 36 \Rightarrow J = 432,00$$

**PENSE NISTO:**

Um aluno calculou diretamente 36% de 1200 para saber o total de juros da operação. Explique.

**5** Um capital de R$ 2 100,00, aplicado em regime de juros simples durante quatro meses, gerou um montante de R$ 2 604,00. Calcule a taxa mensal de juros dessa aplicação.

**Solução:**

*1º modo:*

$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow 2\,604 = 2\,100(1 + i \cdot 4) \Rightarrow \frac{2\,604}{2\,100} = 1 + 4i \Rightarrow 1{,}24 = 1 + 4i \Rightarrow 0{,}24 = 4i \Rightarrow i = 0{,}06$

Logo, a taxa de juros é 6% ao mês.

*2º modo:*

Os juros dessa aplicação, em reais, são de $2\,604 - 2\,100 = 504$. Em relação ao capital, eles correspondem a:

$$\frac{504}{2\,100} = 0{,}24 = 24\%$$

Como os juros mensais são iguais, a taxa por mês será $\frac{24\%}{4} = 6\%$.

**6** Um aparelho de TV custa à vista R$ 880,00. A loja também oferece a seguinte opção: R$ 450,00 no ato e uma parcela de R$ 450,00 a ser paga um mês após a compra. Qual é a taxa mensal de juros simples cobrada nesse financiamento?

LAURENI FOCHETTO

**Solução:**

*1º modo:*

O saldo devedor no momento da compra é:

$$C = \underbrace{\text{R\$ } 880{,}00}_{\text{valor da TV à vista}} - \underbrace{\text{R\$ } 450{,}00}_{\text{entrada}} = \text{R\$ } 430{,}00$$

Após um mês, com a incorporação de juros, esse valor se converte num montante **M** tal que:

$$M = \text{R\$ } 450{,}00$$

Desse modo, são cobrados juros de R$ 20,00 (R$ 450,00 − R$ 430,00) em relação ao saldo devedor de R$ 430,00.

Percentualmente temos: $\frac{20}{430} \simeq 0{,}0465 = 4{,}65\%$.

*2º modo:*

Podemos aplicar a fórmula $M = C(1 + i \cdot n)$, com $C = 430$, $M = 450$, $n = 1$ (1 mês); é preciso determinar o valor de **i**:

$$450 = 430(1 + i \cdot 1) \Rightarrow \frac{450}{430} = 1 + i \Rightarrow i \simeq 1{,}0465 - 1 = 0{,}0465 = 4{,}65\%$$

Logo, a taxa de juros é 4,65% ao mês.

## EXERCÍCIOS

**21** Calcule os juros simples obtidos nas seguintes condições:

**a)** Um capital de R$ 220,00, aplicado por três meses, à taxa de 4% a.m.

**b)** Um capital de R$ 540,00, aplicado por um ano, à taxa de 5% a.m.

**c)** Uma dívida de R$ 80,00, paga em oito meses, à taxa de 12% a.m.

**d)** Uma dívida de R$ 490,00, paga em dois anos, à taxa de 2% a.m.

**22** Bira fez um empréstimo de R$ 250,00 com um amigo e combinou de pagá-lo ao final de quatro meses, acrescido de juros simples de 6% a.m. Qual será o total que deverá ser desembolsado por Bira após esse período?

**23** Um capital de R$ 200,00 é empregado em regime de juros simples. Passados quatro meses, o montante era R$ 240,00. Qual é a taxa mensal de juros simples dessa operação?

**24** Obtenha o montante de uma dívida, contraída a juros simples, nas seguintes condições:

**a)** capital: R$ 400,00; taxa: 48% ao ano; prazo: 5 meses;

**b)** capital: R$ 180,00; taxa: 72% ao semestre; prazo: 8 meses;

**c)** capital: R$ 5000,00; taxa: 0,25% ao dia; prazo: 3 meses.

**25** Uma conta de gás, no valor de R$ 48,00, com vencimento para 13 de abril, trazia a seguinte informação: "Se a conta for paga após o vencimento, incidirão sobre o seu valor multa de 2% e juros de 0,033% ao dia, que serão incluídos na conta futura".
Qual será o acréscimo a ser pago sobre o valor da próxima conta por um consumidor que quitou o débito em 17 de abril? E se ele tivesse atrasado o dobro do número de dias para efetuar o pagamento?

**26** Uma conta telefônica trazia a seguinte informação: "Contas pagas após o vencimento terão multa de 2% e juros de mora de 0,04% ao dia, a serem incluídos na próxima conta".

Sabe-se que Elisa se esqueceu de pagar a conta do mês de agosto, no valor de R$ 255,00. Na conta do mês de setembro foram incluídos R$ 7,14 referentes ao atraso de pagamento do mês anterior.

Com quantos dias de atraso Elisa pagou a conta do mês de agosto?

**27** Um capital é aplicado, a juros simples, à taxa de 5% a.m. Quanto tempo, no mínimo, ele deverá ficar aplicado, a fim de que seja possível resgatar:

**a)** o dobro da quantia aplicada?

**b)** o triplo da quantia aplicada?

**c)** dez vezes a quantia aplicada?

**d)** a quantia aplicada acrescida de 80% de juros?

**28** O preço à vista de uma TV é R$ 900,00. Pode-se, entretanto, optar pelo pagamento de R$ 500,00 de entrada e mais R$ 500,00 um mês após a compra.

**a)** Qual é a taxa mensal de juros simples desse financiamento?

**b)** Qual seria a taxa mensal de juros simples do financiamento, se a 2ª parcela fosse paga dois meses após a compra?

**29** Uma loja oferece a seus clientes duas opções de pagamento conforme mostrado abaixo:

ILUSTRA CARTOON

Lia fez compras nessa loja no valor total de R$ 2 400,00.

**a)** Que valor Lia pagará se optar pelo pagamento à vista?

**b)** Qual é a taxa mensal de juros simples embutidos no pagamento parcelado, levando em conta que é oferecido um desconto para pagamento à vista?

**30** Fábio tomou **x** reais emprestados de um amigo e comprometeu-se a devolver essa quantia, acrescida de juros simples, no prazo de dez meses. No prazo combinado, Fábio quitou a dívida com um pagamento de 1,35x. Qual foi a taxa mensal de juros combinada?

**31** Sabe-se que 70% de um capital foi aplicado a juros simples, por 1,5 ano, à taxa de 2% a.m.; o restante foi aplicado no mesmo regime de juros, por 2 anos, à taxa de 18% ao semestre (a.s.). Sabendo que os juros totais recebidos foram de R$ 14 040,00, determine o valor do capital.

**32** Mariana recebeu uma herança de R$ 22 000,00. $\frac{3}{11}$ desse valor foram usados para quitar uma dívida de 2 anos, contraída de um amigo, no regime de juros simples, à taxa de 2,5% a.m. Do valor que sobrou, 75% será usado para a reforma de sua casa e o restante Mariana pretende emprestar a uma prima, em regime de juros simples, à taxa de 10% ao ano (a.a.).

Determine:

**a)** o capital da dívida de Mariana com o amigo;

**b)** o valor que será usado na reforma da casa de Mariana;

**c)** o valor que a prima pagará a Mariana se quitar a dívida em 3 anos.

**33** Ariel dispunha de um capital de R$ 4 000,00. Parte desse valor ele emprestou a Rafael, por um ano, à taxa de juros simples de 1,5% a.m. O restante foi emprestado (na mesma data) a Gabriel, pelo mesmo período, à taxa de 36% a.a. Sabendo que, um ano depois, Ariel recebeu o montante de R$ 5 116,00 referentes aos dois empréstimos, determine o valor emprestado a cada um dos amigos.

## Juros compostos

Considere a seguinte situação:

Depois de muito trabalho, Miguel juntou R$ 500,00 e abriu uma caderneta de poupança para seu filho, como presente pelo 10º aniversário do menino.

Vamos supor que o rendimento dessa caderneta de poupança seja de 0,6% ao mês e que não será feita nenhuma retirada de dinheiro nem depósito nos próximos anos.

Quando o filho de Miguel completar 18 anos, que valor ele terá disponível em sua caderneta?

O mecanismo pelo qual o saldo dessa poupança irá crescer, mês a mês, é conhecido como regime de **capitalização acumulada** ou regime de **juros compostos**.

Qual é o princípio básico desse sistema de capitalização?

- Ao final do 1º mês, os juros de 0,6% incidem sobre os R$ 500,00; os juros obtidos (R$ 3,00) são incorporados ao capital, produzindo o primeiro montante (R$ 3,00 + R$ 500,00 = R$ 503,00).
- Ao final do 2º mês, os juros de 0,6% incidem sobre o primeiro montante (R$ 503,00) e os juros obtidos (R$ 3,02) são incorporados ao primeiro montante, produzindo o segundo montante (R$ 3,02 + R$ 503,00 = R$ 506,02).
- Ao final do 3º mês, os juros de 0,6% incidem sobre o segundo montante (R$ 506,02) e os juros obtidos (R$ 3,04) são incorporados ao segundo montante, produzindo o terceiro montante (R$ 3,04 + R$ 506,02 = = R$ 509,06), e assim sucessivamente.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Pais e filhos podem conversar sobre a importância de poupar, a necessidade de consumir conscientemente e outros temas de educação financeira.

Vamos agora generalizar esse raciocínio.

Consideremos um capital **C**, aplicado a juros compostos, a uma taxa de juros **i** (expressa na forma decimal) fixa por período, durante **n** períodos. O período considerado deve ser compatível com a unidade de tempo da taxa.

Professor, se achar pertinente, faça um levantamento prévio sobre o conhecimento que os estudantes têm da caderneta de poupança, o investimento mais conhecido dos brasileiros. É importante destacar que esse tipo de aplicação financeira é isento de pagamento de imposto. É uma oportunidade de discutir sobre a importância de poupar, planejamento financeiro, rentabilidade e risco de investimentos.

Temos:

- Ao final do primeiro período, o primeiro montante será igual a:

$$M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i) \quad (1)$$

- Ao final do segundo período, o segundo montante será igual a:

$$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1 \cdot (1 + i) \underset{(1)}{\Rightarrow} M_2 = C \cdot (1 + i)^2 \quad (2)$$

- Ao final do terceiro período, o terceiro montante será igual a:

$$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2 \cdot (1 + i) \underset{(2)}{\Rightarrow} M_3 = C \cdot (1 + i)^3 \quad (3)$$

- Ao final do quarto período, o quarto montante será igual a:

$$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3 \cdot (1 + i) \underset{(3)}{\Rightarrow} M_4 = C \cdot (1 + i)^4$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- Ao final do n-ésimo período, o n-ésimo montante será igual a:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

É importante lembrar, mais uma vez, que o regime de juros compostos é utilizado na maioria das transações comerciais e aplicações financeiras.

**EXEMPLO 2**

Um capital de R$ 300,00 é aplicado à taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos. Qual será o montante obtido após três meses?

*1º modo:*

- Ao final do 1º mês, o 1º montante, em reais, será: $300 + 0{,}02 \cdot 300 = 306$
- Ao final do 2º mês, o 2º montante, em reais, será: $306 + 0{,}02 \cdot 306 = 312{,}12$
- Ao final do 3º mês, o montante, em reais, será: $312{,}12 + 0{,}02 \cdot 312{,}12 \simeq 318{,}36$

*2º modo:*

Aplicando a fórmula deduzida, obteremos diretamente o montante após três meses, sem ter de calcular o saldo nos meses anteriores. Basta fazer:

$$M_3 = 300 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M_3 = 300 \cdot 1{,}02^3 \simeq 318{,}36$$

Logo, o montante após 3 meses será de 318,36 reais.

**EXEMPLO 3**

Voltando ao problema da caderneta de poupança do filho de Miguel, vamos determinar o valor que o menino terá ao completar 18 anos.

Com uma calculadora científica, obtemos então:

$$\begin{cases} C = 500 \\ i = 0{,}6\% = \dfrac{0{,}6}{100} = 0{,}006 \\ n = 96 \text{ meses (8 anos)} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} M_{96} &= 500 \cdot (1 + 0{,}006)^{96} \\ M_{96} &= 500 \cdot 1{,}006^{96} \\ M_{96} &\simeq 500 \cdot 1{,}77585 \\ M_{96} &\simeq 887{,}93 \end{aligned}$$

Logo, Miguel terá 887,93 reais na caderneta de poupança.

Basta utilizar a tecla $x^y$ ou  (dependendo do modelo): inicialmente "entramos" com a base (1,006), seguida dessa tecla e depois do expoente (96).

**PENSE NISTO:**

Como podemos obter, com uma calculadora científica, o valor $1{,}006^{96}$?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Um investidor aplicou R$ 10 000,00 em um fundo de investimento que rende 12% ao ano, a juros compostos. Qual é o menor número inteiro de meses necessário para que o montante dessa aplicação seja R$ 50 000,00?

Professor, ao final de 2015, a taxa de juros da economia brasileira era de aproximadamente 14% ao ano. Nessas condições, havia aplicações financeiras (atreladas à taxa de juros) cujo rendimento bruto aproximado era de 12% ao ano.
Se julgar pertinente, compartilhe com os estudantes as taxas (de juros) de rendimento de aplicações financeiras vigentes no período correspondente ao estudo deste capítulo.

**Solução:**

Temos: $\begin{cases} C = 10\,000 \\ M = 50\,000 \\ i = 0{,}12 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow 50\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}12)^n \Rightarrow 5 = 1{,}12^n$

Para resolver a equação $1{,}12^n = 5$, podemos proceder de duas maneiras:

*1º modo:*

$$1{,}12^n = 5 \Rightarrow \log_{1{,}12} 5 = n;$$

Escrevendo esse logaritmo em base 10, temos:

$$n = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 1{,}12}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos os valores desses logaritmos:

$$n \simeq \frac{0{,}69897}{0{,}049218} \Rightarrow n \simeq 14{,}2$$

*2º modo:*

De $1{,}12^n = 5$, podemos obter outra igualdade "aplicando" logaritmo decimal aos dois membros, isto é:

$1{,}12^n = 5 \Rightarrow \log 1{,}12^n = \log 5 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}12 = \log 5 \Rightarrow n = \dfrac{\log 5}{\log 1{,}12} \simeq 14{,}2$

Assim, o menor número inteiro de meses é 15.

**8** Uma dívida de R$ 500,00, contraída a juros compostos e a uma taxa mensal fixa, aumenta para R$ 680,00 após quatro meses. Qual é a taxa mensal aproximada de juros?

**Solução:**

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 680 = 500 \cdot (1 + i)^4 \Rightarrow 1{,}36 = (1 + i)^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1{,}36} \Rightarrow 1 + i \simeq 1{,}0799 \Rightarrow i \simeq 0{,}0799$$

Assim, a taxa mensal aproximada é de 8% ao mês.

**PENSE NISTO:**

Como podemos obter o valor de $\sqrt[4]{1{,}36}$ com uma calculadora científica?

Alguns modelos apresentam a tecla . Nesse, caso, deve-se digitar inicialmente 4, em seguida a tecla  e por fim o valor 1,36. Outra opção é lembrar a definição de potência de expoente racional: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ (para $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$). Assim, $\sqrt[4]{1{,}36} = 1{,}36^{\frac{1}{4}} = 1{,}36^{0{,}25}$. Daí, usa-se a tecla de potência: $x^y$ ou ^.

Relembrando:

- Dados os números reais **a** e **b**, $a > 0$ e $0 < b$ e $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de **a** na base **b** (indica-se $\log_b a$) o número real **x** tal que $b^x = a$:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Assim, por exemplo, $\log_3 9 = 2$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\log_5 1 = 0$; $\log 1\,000 = 3$ (lembre-se de que, quando a base é omitida, convenciona-se que ela é igual a 10, ou seja, é o **logaritmo decimal**).

- Propriedades:

Sejam **a** e **c** números reais positivos, $0 < b$ e $b \neq 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Valem as seguintes propriedades:

- $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- $\log_b a^\alpha = \alpha \cdot \log_b a$

Assim, por exemplo, podemos expressar o valor de log 48 em função de log 2 e de log 3:

$$\log 48 = \log (2^4 \cdot 3) = \log 2^4 + \log 3 = 4 \cdot \log 2 + \log 3$$

Se **b** é um número real positivo, $0 < a$ e $a \neq 1$ e $0 < c$ e $c \neq 1$, temos a fórmula da mudança de base:

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

## Juros compostos com taxa de juros variável

No estudo dos juros compostos deduzimos a fórmula do montante, admitindo a taxa de juros constante em cada um dos períodos. No entanto, muitas vezes, as taxas de rentabilidade de um fundo de investimento, por exemplo, variam de um mês para o outro. Quando isso ocorre, podemos calcular os montantes mês a mês, lembrando que o princípio de capitalização acumulado é o mesmo.

**EXEMPLO 4**

No começo do ano, o lote padrão de ações de uma empresa valia R$ 80,00. Nos meses de janeiro e fevereiro, as ações dessa empresa valorizaram-se 30% e 20%, respectivamente. Qual será o valor desse lote no final de fevereiro?

- No final de janeiro, o lote passará a valer, em reais:

$$80 + 30\% \cdot 80 = 80 + 0{,}3 \cdot 80 = 80 + 24 = 104$$

- No final de fevereiro, com a valorização de 20%, o lote passará a valer, em reais:

$$104 + 20\% \cdot 104 = 104 + 20{,}8 = 124{,}80$$

Observe que:

- O valor do lote, em reais, no final de janeiro é $1{,}3 \cdot 80$.
- O valor do lote, em reais, ao final de fevereiro é:

$$1{,}2 \cdot \underbrace{1{,}3 \cdot 80}_{\text{valor de janeiro}} = 1{,}56 \cdot 80 = 124{,}80$$

Valor inicial: 80
Valor final: $1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 80 = 1{,}56 \cdot 80$
Valorização: $1{,}56 \cdot 80 - 80 = 0{,}56 \cdot 80 = 56\% \cdot 80$. Assim, a valorização foi de 56%.

**PENSE NISTO:**

Qual foi a valorização acumulada nesses dois primeiros meses do ano?

## EXERCÍCIOS

**34** Calcule os juros e o montante de uma transação financeira a juros compostos, nas seguintes condições:

**a)** capital: R$ 300,00; taxa: 2% a.m.; prazo: 4 meses;

**b)** capital: R$ 2 500,00; taxa: 5% a.m.; prazo: 1 ano;

**c)** capital: R$ 100,00; taxa: 16% a.a.; prazo: 3 anos;

**d)** capital: R$ 900; taxa 27% a.a.; prazo: 6 meses.

**35** Bete dispõe de R$ 2 000,00 para investir por três meses. Ela pretende escolher uma das opções seguintes: caderneta de poupança ou um fundo de renda fixa. As condições de cada investimento são apresentadas ao lado.

Qual é a opção mais vantajosa para Bete, levando em conta exclusivamente o critério financeiro? Nas suas contas, considere $1{,}005^3 \simeq 1{,}015$ e $1{,}008^3 \simeq 1{,}024$.

| | Rendimento | Imposto |
|---|---|---|
| **Poupança** | 0,5% a.m. | — |
| **Fundo de renda fixa** | 0,8 % a.m. | 25% sobre o ganho |

**36** Um investimento financeiro rende 1% ao mês, em regime de juros compostos. Décio aplicou R$1 200,00 nesse investimento. No momento do resgate, são cobrados 15% de imposto de renda sobre o **rendimento** obtido.

Considerando $1{,}01^{10} \simeq 1{,}105$, determine o valor líquido (já descontado o imposto de renda) que caberá a Décio, se ele fizer o resgate:

**a)** após 10 meses;

**b)** após 20 meses.

**37** A caderneta de poupança é o investimento mais popular entre os brasileiros. Seu rendimento gira em torno de 0,5% ao mês e não há cobrança de imposto sobre os ganhos. Marlene investiu R$ 2 000,00 na caderneta de poupança.

Neste exercício, admita que, no período considerado, Marlene não fez depósitos nem saques nessa caderneta de poupança e use:

$1{,}005^{12} \simeq 1{,}06$; $1{,}005^{60} \simeq 1{,}35$;
$\log 1{,}005 \simeq 0{,}002$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$.

**a)** Determine o montante obtido por Marlene, se ela deixar o recurso investido por: 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos.

**b)** Qual é o menor número inteiro de meses que o valor investido deverá ficar aplicado a fim de que ela possa resgatar R$ 4 000,00? E R$ 10 000,00?

**38** Um capital foi aplicado a juros compostos à taxa de 20% a.a., durante 3 anos. Se, decorrido esse período, o montante produzido foi de R$ 864,00, qual foi o valor do capital aplicado?

**39** Um capital de R$ 5 000,00 é aplicado à taxa de juros compostos de 10% ao ano.

**a)** Qual é o montante da aplicação após 5 anos? Considere $1{,}1^5 \simeq 1{,}6$.

**b)** Qual é o rendimento percentual dessa aplicação considerando o período de cinco anos?

**c)** Qual é o tempo mínimo necessário para que o montante dessa aplicação seja R$ 20 000,00? Considere $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 11 \simeq 1{,}04$.

**40** Um capital foi aplicado a juros compostos, à taxa de 10% ao ano, durante 3 anos, gerando um montante de R$ 66 550,00.

**a)** Qual foi o capital aplicado?

**b)** Qual seria a diferença entre os juros recebidos por essa aplicação e por uma aplicação com mesmo capital, prazo e taxa, porém no regime de juros simples?

**41** Um capital de R$ 5 000,00, aplicado a uma taxa fixa mensal de juros compostos, gerou, em quatro meses, um montante de R$ 10 368,00. Qual foi a taxa praticada?

**42** Suponha que o valor de um terreno em uma área nobre de uma cidade venha aumentando à taxa de 100% ao ano. Qual é o número mínimo inteiro de anos necessários para que o valor do terreno seja correspondente a cem vezes seu valor atual?

**43** Uma dívida do cartão de crédito passou, no regime de juros compostos, de R$ 2 000,00 para R$ 5 120,00 em dois anos. Sabendo que a administradora do cartão opera com uma taxa percentual de juros fixa por ano, determine:

**a)** o valor dessa taxa ao ano;

**b)** o montante aproximado dessa dívida meio ano após a data na qual ela foi contraída. Considere: $\sqrt{10} \simeq 3{,}16$.

**44** Um terreno adquirido por R$10 000,00 valoriza-se à taxa de 8% ao ano. Determine o tempo mínimo necessário para que o terreno passe a valer R$ 30 000,00.
Considere: $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

**45** No quadro seguinte encontramos a variação (valorização ou desvalorização) percentual mensal do valor da ação de uma empresa comercializada na Bolsa de Valores:

| Mês | Rendimento |
|---|---|
| março | +8% |
| abril | +2,5% |
| maio | −3,0% |

**a)** Sabendo que, no início de março, a ação valia R$ 25,00, determine o seu valor ao final de maio.

**b)** Qual a variação percentual do valor da ação nesse período?

**46** Em seu primeiro ano, um fundo de investimento em ações valorizou-se 25%. No segundo ano, o fundo desvalorizou-se 30% e, no terceiro ano, o fundo recuperou 35% das perdas do ano anterior.

**a)** Quem aplicou R$ 4 800,00 nesse fundo, desde a sua criação, saiu com lucro ou prejuízo ao final dos três anos? Expresse esse valor em reais e em termos percentuais, levando em conta o valor investido.

**b)** Qual o rendimento percentual desse fundo no 3º ano?

**47** Um capital é aplicado a juros compostos à taxa de 20% ao ano. Qual é o menor número inteiro de anos necessários para que o montante dessa operação seja:

**a)** o dobro do capital?

**b)** o triplo do capital?

**c)** o quíntuplo do capital?

**d)** 800% a mais que o capital?

Considere: $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

**48** Marcelo emprestou a Júlio 5 figurinhas da coleção da Copa do Mundo para ajudá-lo a montar seu álbum. Três semanas depois, Júlio, que é craque em "bater figurinhas", quitou sua dívida com Marcelo, devolvendo-lhe 35 figurinhas a mais que a quantia emprestada.

Considerando que o "regime de juros" combinado entre os dois seja o de juros compostos, determine a taxa semanal de juros desse empréstimo.

**49** Fernanda aplicou R$ 200,00 em um fundo de ações. No primeiro ano, as ações valorizaram-se 25% e, no segundo ano, a valorização foi de 8%.

**a)** Qual é o rendimento percentual bruto do fundo nesses dois anos?

**b)** Qual o valor líquido resgatado por Fernanda após esses dois anos, se, nesse fundo, é cobrado imposto de 20% sobre o ganho?

**50** Uma empresa foi multada em R$ 80 000,00 por irregularidades trabalhistas, comprometendo-se a pagar a multa ao final de um período de dez anos, acrescentando a ela juros compostos de 10% ao ano. Passados esses dez anos, a empresa conseguiu pagar apenas o valor da multa, sem os juros devidos, e renegociou a nova dívida, a uma taxa anual de juros compostos de 4% ao ano, com prazo de 5 anos. Qual será o montante a ser pago nessa nova negociação?

| x | $x^5$ |
|---|---|
| 1,01 | 1,05 |
| 1,02 | 1,10 |
| 1,03 | 1,16 |
| 1,04 | 1,2 |
| 1,05 | 1,3 |
| 1,06 | 1,34 |
| 1,07 | 1,4 |
| 1,08 | 1,47 |
| 1,09 | 1,54 |
| 1,1 | 1,6 |

Use os valores aproximados da tabela acima para fazer os cálculos necessários.

**51** Um investimento de risco apresentou uma taxa anual de rendimento fixa, gerando um aumento de 44% do capital investido em 2 anos. Qual foi a taxa anual de juros paga por esse investimento?

**52** Um capital é empregado a uma taxa anual de 11%, no regime de juros compostos. Determine o menor número inteiro de meses necessários para que o montante obtido seja 47% maior que o capital. Use $\log 147 \simeq 2{,}17$ e $\log 111 \simeq 2{,}05$.

**53** Um empresário tomou emprestado R$ 40 000,00 do banco **A** e R$ 60 000,00 do banco **B**, na mesma data, à taxa de juros (compostos) de 20% ao ano e 8% ao ano, respectivamente.

**a)** Qual será sua dívida total ao final de dois anos?

**b)** Daqui a quantos anos as dívidas nos dois bancos serão iguais?

Considere $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

**54** (Enem-MEC) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento **A**: 3% ao mês

Investimento **B**: 36% ao ano

Investimento **C**: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades.

| n | $1{,}03^n$ |
|---|---|
| 3 | 1,093 |
| 6 | 1,194 |
| 9 | 1,305 |
| 12 | 1,426 |

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

**a)** escolher qualquer um dos investimentos **A**, **B** ou **C**, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

**b)** escolher os investimentos **A** ou **C**, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

**c)** escolher o investimento **A**, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.

**d)** escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.

**e)** escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.

## TROQUE IDEIAS

Professor, o objetivo desta atividade é levar o estudante a "vivenciar" uma situação comum no nosso dia a dia: a decisão entre comprar à vista ou a prazo, considerando o caso em que o comprador tem recursos para pagar à vista, mas pode também aplicar esse recurso em um investimento que lhe permita fazer retiradas mensais para pagar as prestações da compra parcelada.

### Compras à vista ou a prazo (I)

Muitas vezes, o consumidor, ao comprar um determinado produto, tem que se decidir pela compra à vista ou a prazo. Para a maioria dos trabalhadores brasileiros, é difícil desembolsar o valor total do produto no ato da compra, restando, assim, a opção da compra parcelada. Essa prática é frequente especialmente em compra de eletrodomésticos, eletroeletrônicos, móveis, automóveis, imóveis etc. Em geral, a compra parcelada embute juros em suas prestações.

Em outras situações, no entanto, o consumidor dispõe de recursos para pagamento à vista. Do ponto de vista financeiro, qual é a melhor opção de pagamento nesse caso?

Vamos considerar o seguinte problema:

Uma agência de turismo, no Rio de Janeiro, vende pacotes turísticos de ano-novo para um *resort* de praia no Nordeste por R$ 2 500,00 por pessoa ou em 5 parcelas mensais de R$ 520,00, sendo a primeira um mês após o fechamento do pacote.

Márcia, ao longo do ano, conseguiu fazer uma reserva de dinheiro que lhe permite pagar a viagem à vista. Ela pode, alternativamente, aplicar esse dinheiro em uma caderneta de poupança e, a cada mês, fazer retiradas (saques) dessa poupança para pagar a prestação da viagem.

Vamos admitir que, em todos os meses, o rendimento da caderneta de poupança seja de 0,6% a.m. Lembre também que não há incidência de impostos sobre esse rendimento.

Vamos simular a situação de uma possível compra a prazo, destacando, em cada mês, o saldo inicial, os juros recebidos pela caderneta de poupança, a retirada para o pagamento da prestação e o saldo final da poupança.

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Copie em seu caderno a tabela seguinte, preenchendo todos os campos. Use uma calculadora comum.

| Tempo | Saldo inicial da poupança | + | Juros recebidos | − | Retirada para pagar a prestação | Saldo final da poupança |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ato da compra | | | | | | |
| 1 mês depois | | | | | | |
| 2 meses depois | | | | | | |
| 3 meses depois | | | | | | |
| 4 meses depois | | | | | | |
| 5 meses depois | | | | | | |

**b)** Analisando a tabela, decida qual é a opção mais vantajosa para Márcia.

É comum, também, encontrarmos, no comércio, situações em que o valor total a ser desembolsado em uma compra a prazo coincide com o seu valor à vista. Nesse caso, se o consumidor aplicar seu recurso e fizer saques mensais para o pagamento das prestações, terá feito a opção que lhe dará um dinheiro extra.

Imagine que a agência vendesse o mesmo pacote por R$ 2 500,00 à vista ou em 5 parcelas mensais de R$ 500,00, sendo a primeira um mês depois do fechamento do pacote.

**c)** Copie novamente em seu caderno a tabela do item *a*, preenchendo seus campos. Determine o dinheiro extra que Márcia poderá usufruir na viagem.

# Compras à vista ou a prazo (II) – Financiamentos

No momento da compra, o consumidor deve analisar com cautela as diferentes formas de pagamento.

Vamos introduzir o conceito de **valor atual** (ou **valor presente**) de um conjunto de pagamentos, que nos permite compreender como funcionam alguns financiamentos.

**1º problema**

Imagine que uma geladeira seja vendida em três prestações mensais de R$ 400,00, sendo a primeira um mês após a compra. Sabendo que a loja cobra juros (compostos) no financiamento de 5% ao mês, como podemos determinar o preço à vista dessa geladeira?

O esquema seguinte mostra os valores das prestações a serem pagas em cada data (mês):

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a um mês (data 1) equivale a um pagamento atual (data 0) de $\mathbf{x_1}$ reais, tal que:

$$x_1 \cdot 1,05 = 400 \Rightarrow x_1 = \frac{400}{1,05}$$

Isto é, aplicando 5% de juros sobre $\mathbf{x_1}$ e somando com $\mathbf{x_1}$, obtemos o valor de R$ 400,00, a ser pago na data 1.

$\mathbf{x_1}$ é o valor atual do pagamento a ser feito na data 1.

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a dois meses (data 2) equivale a um pagamento atual (data 0) de $\mathbf{x_2}$ reais, tal que:

$$x_2 \cdot 1,05^2 = 400 \Rightarrow x_2 = \frac{400}{1,05^2}$$

Ou seja, aplicamos, sobre $\mathbf{x_2}$, juros compostos de 5% ao mês por dois meses seguidos, para obter o valor de R$ 400,00, a ser pago na data 2.

$\mathbf{x_2}$ é o valor atual do pagamento a ser feito na data 2.

- O pagamento de R$ 400,00 daqui a três meses (data 3) equivale a um pagamento atual (data 0) de $\mathbf{x_3}$ reais, tal que:

$$x_3 \cdot 1,05^3 = 400 \Rightarrow x_3 = \frac{400}{1,05^3}$$

Aplicamos, sobre $\mathbf{x_3}$, juros compostos de 5% ao mês por três meses consecutivos para obter o valor de R$ 400,00, que será pago na data 3.

$\mathbf{x_3}$ é o valor atual do pagamento a ser feito na data 3.

Assim, calculamos o valor atual de cada prestação. O preço à vista dessa geladeira é:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{400}{1,05} + \frac{400}{1,05^2} + \frac{400}{1,05^3}$$

$$x \simeq 380,95 + 362,81 + 345,54$$

$$x \simeq 1\,089,30$$

Logo, o preço à vista da geladeira é 1 089,30 reais.

**OBSERVAÇÃO**

A partir do preço à vista da geladeira, podemos compreender, sob outro ponto de vista, o mecanismo do financiamento. Vamos atualizar, mês a mês, o saldo devedor do cliente, considerando a taxa de juros de 5% ao mês:

- Saldo devedor no ato da compra: R$1 089,30.
- Saldo devedor, em reais, um mês após a compra: $1{,}05 \cdot 1\,089{,}30 \simeq 1\,143{,}77$.

  ↑ acréscimo de 5% ao saldo devedor

  Com o pagamento da 1ª parcela, o saldo devedor diminui para: 1 143,77 reais − 400 reais, isto é, 743,77 reais.
- Saldo devedor, em reais, dois meses após a compra: $1{,}05 \cdot 743{,}77 \simeq 780{,}96$. Com o pagamento da 2ª parcela, o saldo devedor diminui para: 780,96 reais − 400 reais, isto é, 380,96 reais.
- Saldo devedor, em reais, três meses após a compra: $1{,}05 \cdot 380{,}96 \simeq 400$ reais, que é igual ao valor da última prestação, a ser paga nessa data.

**PENSE NISTO:**

Considerando o problema anterior, qual deveria ser o preço à vista da geladeira se a primeira parcela de R$ 400,00 fosse paga no ato da compra e a segunda e a terceira parcelas fossem pagas um e dois meses após a data da compra, respectivamente?

Observe o fluxo de pagamentos:

O valor atual desses pagamentos, em reais, é:

$$400 + \frac{400}{1{,}05} + \frac{400}{1{,}05^2} \simeq 1\,143{,}76,$$

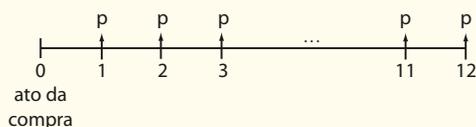
que corresponderia ao preço à vista.

## 2º problema

Um automóvel popular é vendido por R$ 35 000,00 à vista ou em 12 prestações mensais iguais, sem entrada.

ILUSTRA CARTOON

Qual é o valor de cada parcela, se a concessionária opera, no financiamento, com uma taxa de juros compostos de 2% ao mês?

Vamos denominar **p** o valor de cada parcela. No esquema seguinte, estão representados os pagamentos futuros desse financiamento com as respectivas datas (meses) de vencimento:

- O valor atual da prestação a ser paga no mês 1 é:

$$v_1 = \frac{p}{1{,}02}$$

- O valor atual da prestação a ser paga no mês 2 é:

$$v_2 = \frac{p}{1{,}02^2}$$

- O valor atual da prestação a ser paga no mês 3 é:

$$v_3 = \frac{p}{1{,}02^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- O valor atual da prestação a ser paga no mês 12 é:

$$v_{12} = \frac{p}{1{,}02^{12}}$$

Como o preço à vista do automóvel é de R$ 35 000,00, devemos ter:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{12} = 35\,000$$

$$\frac{p}{1{,}02} + \frac{p}{1{,}02^2} + \frac{p}{1{,}02^3} + \dots + \frac{p}{1{,}02^{12}} = 35\,000$$

$$p \cdot \left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \dots + \frac{1}{1{,}02^{12}}\right) = 35\,000 \quad (*)$$

Para fazer a conta em (*) podemos, com auxílio de uma calculadora científica, calcular cada parcela acima separadamente e depois adicioná-las.

Outra opção é observar que a sequência $\left(\frac{1}{1{,}02}; \frac{1}{1{,}02^2}; \frac{1}{1{,}02^3}; \dots; \frac{1}{1{,}02^{12}}\right)$ é uma P.G., em que $a_1 = \frac{1}{1{,}02}$; $q = \frac{1}{1{,}02}$ e $n = 12$.

Assim, como $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ (soma dos **n** primeiros termos de uma P.G.), temos:

$$S_{12} = \frac{\frac{1}{1{,}02} \cdot \left[\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{1}{1{,}02} - 1} = \frac{\frac{1}{\cancel{1{,}02}} \cdot \left(\frac{1}{1{,}02^{12}} - 1\right)}{\frac{-0{,}02}{\cancel{1{,}02}}} = -\frac{1}{0{,}02} \cdot \left(\frac{1 - 1{,}02^{12}}{1{,}02^{12}}\right)$$

Como $1{,}02^{12} \simeq 1{,}2682$, temos:

$$S_{12} = -\frac{1}{0{,}02} \cdot \left(\frac{1 - 1{,}2682}{1{,}2682}\right) = -\frac{1}{0{,}02} \cdot \frac{-0{,}2682}{1{,}2682} \simeq 10{,}574$$

Em (*), temos:

$$p \cdot 10{,}574 = 35\,000 \Rightarrow p \simeq 3\,310$$

Assim, o valor de cada parcela é R$ 3 310,00.

Observe que, ao efetuar a compra financiada, o consumidor pagará pelo carro o valor total de 12 · (3 310 reais) = 39 720 reais. Com relação ao preço à vista do veículo, é uma diferença de 39 720 reais − 35 000 reais = 4 720 reais.

Note que $\frac{39\,720}{35\,000} \simeq 1{,}135 = 1 + 0{,}135$. Isso significa que, na compra financiada, o consumidor pagará “1 carro e mais 13,5% de seu valor de compra”.

É notório que, mesmo sem fazer todas essas contas, na compra financiada, o valor total desembolsado é maior, em relação ao preço à vista.

Para uma grande parcela da população brasileira, no entanto, a compra financiada é a única opção. Desse modo, é importante que o consumidor não veja apenas se a prestação cabe no orçamento mensal. É preciso pesquisar as melhores condições, negociar e procurar por taxas de juros menores até encontrar a opção mais vantajosa.

**PENSE NISTO:**

Suponha que um comprador desse automóvel tenha negociado, com a concessionária, a taxa de juros do financiamento, reduzindo-a a 1% ao mês. Mantidas as demais condições, qual seria o valor de cada parcela desse financiamento?

Pense nisto:
Somando os valores presentes de cada parcela do financiamento, temos:

$$\frac{p}{1{,}01} + \frac{p}{1{,}01^2} + \frac{p}{1{,}01^3} + \dots + \frac{p}{1{,}01^{12}} = 35\,000$$

$$p \cdot \left(\frac{1}{1{,}01} + \frac{1}{1{,}01^2} + \frac{1}{1{,}01^3} + \dots + \frac{1}{1{,}01^{12}}\right) = 35\,000$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. (em que $a_1 = \frac{1}{1{,}01}$; $q = \frac{1}{1{,}01}$ e $n = 12$) ou calculando-se cada uma das parcelas da soma acima, obtemos:

$$p \cdot 11{,}2531 = 35\,000 \Rightarrow p \simeq 3\,110 \text{ reais}$$

Note que 12 · 3 110 = 37 320 reais; haveria uma redução de R$ 2 400,00 na soma das parcelas, quando comparado à soma das parcelas com a taxa de 2% a.m.

# Juros e funções

Uma dívida de R$ 1 000,00 será paga com juros de 50% ao ano. Ela deverá ser quitada após um número inteiro de anos.

Vamos calcular, ano a ano, os montantes dessa dívida nos dois regimes de capitalização (simples e composto) e comparar os valores obtidos.

## Juros simples

Os juros, por ano, são de 50% de 1 000:

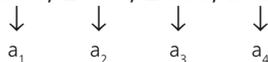
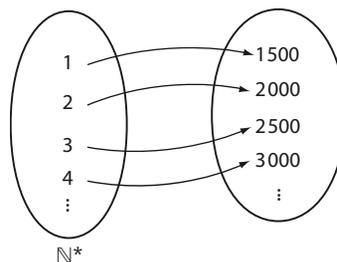
$$0,5 \cdot 1\,000 = 500, \text{ isto é, R\$ } 500,00$$

Dívida: R$ 1 000,00

| Ano | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Montante | 1 500 | 2 000 | 2 500 | 3 000 | 3 500 | 4 000 | ... |

A sequência de montantes (1 500, 2 000, 2 500, 3 000, 3 500, ...) é uma progressão aritmética (P.A.) de razão 500 e cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1\,500 + (n - 1) \cdot 500 \Rightarrow a_n = \underbrace{500}_{\text{acréscimo anual}} \cdot n + \underbrace{1\,000}_{\text{capital}}$$

Lembremos que toda progressão aritmética (P.A.) é uma função **f** de domínio em $\mathbb{N}^*$. Desse modo, a P.A. (1 500, 2 000, 2 500, 3 000, ...) (com $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ indicados sob os termos) é uma função **f** cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$, como sugere a associação seguinte:

Podemos associar essa função **f** à função definida por $y = 500x + 1\,000$ (**função afim** ou **do 1º grau**), restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

## Juros compostos

Para montar a tabela, é preciso lembrar que o montante da dívida em um determinado ano é 50% maior que o montante relativo ao ano anterior (ou 1,5 vez o montante anterior).

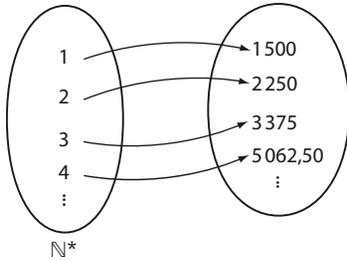
Dívida: R$ 1 000,00

| Ano | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Montante | 1 500 | 2 250 | 3 375 | 5 062,50 | 7 593,75 | 11 390,62 | ... |

A sequência de montantes (1 500; 2 250; 3 375; 5 062,50; ...) é uma progressão geométrica (P.G.) de razão 1,5 cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1\,500 \cdot 1,5^{n-1} \Rightarrow a_n = 1\,500 \cdot \frac{1,5^n}{1,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \underbrace{1\,000}_{\text{capital}} \cdot 1,5^n$$

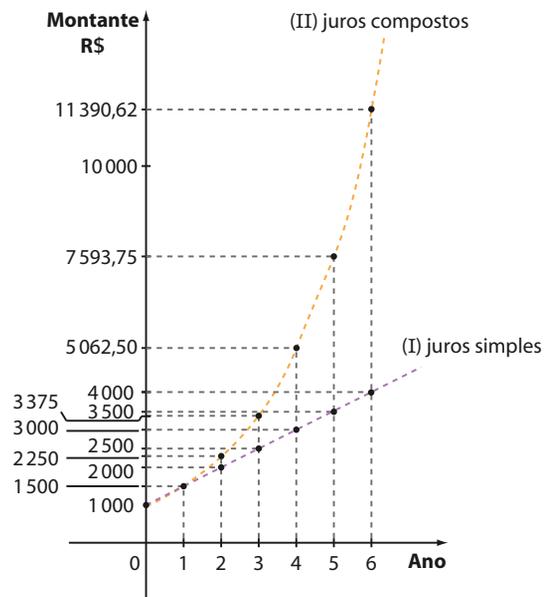
Lembremos que toda progressão geométrica (P.G.) é uma função **f** de domínio em $\mathbb{N}^*$. Desse modo, a P.G. $(\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{1\,500}}; \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{2\,250}}; \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{3\,375}}; \underset{a_4}{\underset{\downarrow}{5\,062{,}50}}; \ldots)$ é uma função **f** cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Veja a associação seguinte:

Observe que essa função **f** pode ser associada à função definida por $y = 1\,000 \cdot 1{,}5^x$ (**função exponencial**), restrita aos valores naturais não nulos que **x** assume.

Representando graficamente as duas sequências, obtemos o gráfico ao lado.

Os pontos do gráfico I correspondem aos pontos da reta que representa a função afim dada por $y = 500 \cdot x + 1\,000$, quando a variável **x** assume valores naturais. Observe que, se $x = 0$, então $y = 1\,000$ corresponde ao capital da dívida.

Os pontos do gráfico II correspondem aos pontos da curva exponencial dada por $y = 1\,000 \cdot 1{,}5^x$, quando a variável **x** assume valores naturais. Se $x = 0$, então $y = 1\,000$ é o capital da dívida.

Observe que no caso I não traçamos uma reta e no caso II não traçamos uma curva exponencial contínua, pois, em ambos os casos, temos funções cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ (e não $\mathbb{R}$).

Os gráficos I e II intersectam-se em (1, 1 500), isto é, decorrido exatamente um ano da aquisição da dívida, os montantes a juros simples e a juros compostos se equivalem. A partir daí, o gráfico II está sempre acima do gráfico I, mostrando que, para qualquer valor de **x** (ano), $x > 1$, o montante da dívida a juros compostos é maior que o montante da dívida de mesmo capital e taxa de juros, calculado a juros simples.

## EXERCÍCIOS

**55** Um capital de R$ 600,00 é aplicado a uma taxa anual de 10% ao ano, por cinco anos.

**a)** Construa as sequências referentes aos montantes anuais dessa aplicação, considerando o regime de juros simples e o de juros compostos.

**b)** Associe cada sequência anterior a uma P.A. ou uma P.G., determinando sua razão.

**c)** Qual é, em reais, a diferença entre os montantes obtidos ao final dos cinco anos, considerando os dois regimes de juros?

**56** Carlos solicitou um empréstimo a um amigo. A sequência $(a_n)$, com $n \in \mathbb{N}^*$, cujo termo geral é dado por $a_n = 400 + 20n$, representa o montante desse empréstimo, em reais, após **n** meses ($n = 1, 2, 3, \ldots$), contados a partir da data em que o empréstimo foi concedido por seu amigo. Determine:

**a)** o capital do empréstimo;

**b)** o regime de juros combinado e a taxa mensal de juros;

**c)** o valor necessário para quitar o empréstimo depois de um ano.

**57** A função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = 6\,000 \cdot 1{,}2^x$, representa o valor de uma dívida, em reais, **x** anos após a data em que ela foi contraída (x = 0).

**a)** Qual é o valor original da dívida?

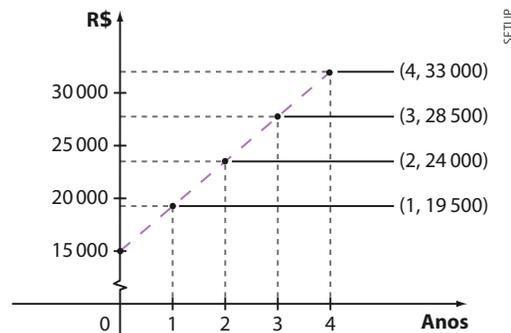
**b)** A dívida cresce segundo o regime de juros simples ou de juros compostos? Qual é a taxa anual de juros dessa dívida?

**c)** Em quatro anos, a dívida já terá dobrado de valor?

**58** O gráfico ao lado mostra, ano a ano, o aumento de um capital aplicado em certo regime de juros.

**a)** O capital cresce segundo o regime de juros simples ou compostos?

**b)** Qual é a taxa anual de juros utilizada?

**c)** Qual o montante obtido após 8 anos?

**59** O gráfico ao lado mostra a evolução, mês a mês, da dívida no cartão de crédito de um cliente, a partir do mês de janeiro de 2018 (alguns valores foram aproximados nos centavos).

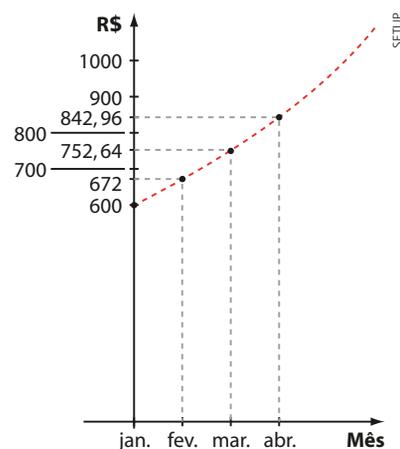
Sabendo que a operadora do cartão de crédito cobra juros mensais cumulativos, a uma taxa percentual fixa por mês, analise cada afirmação seguinte, classificando-a em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**), justificando as falsas:

**a)** A dívida do cliente no mês de maio superava R$ 900,00.

**b)** Os valores mensais da dívida do cliente formam uma progressão geométrica de razão 0,12.

**c)** A taxa mensal de juros desse cartão é de 12%.

**d)** O valor, em reais, dessa dívida, em julho de 2018, era de $600 \cdot 1{,}12^7$.

**e)** Se o cliente só quitou a dívida em dezembro de 2018 com um único pagamento, ele pagou, considerando todo o período, mais de 240% de juros sobre o valor inicial da dívida.

## DESAFIO

Certo investimento financeiro remunera seus cotistas a uma taxa percentual anual fixa, no regime de juros compostos. Roseli aplicou um capital nesse investimento e foi informada de que esse capital geraria um montante de R$ 73 205,00 em 4 anos e R$ 88 578,05 em 6 anos.

**a)** Qual é a taxa percentual anual de juros do investimento?

**b)** Qual é o capital aplicado por Roseli?

**c)** Roseli pretende comprar uma obra de arte que custava, na data da aplicação nesse investimento, R$ 280 000,00, mas que, segundo especialistas do mercado, se desvaloriza à taxa de 12% ao ano.

Qual é o menor número inteiro de anos a partir do qual Roseli poderá adquirir a obra apenas com os recursos provenientes desse investimento?

Considere $\log 2 \simeq 0{,}301$ e $\log 7 \simeq 0{,}845$.

# Trabalhando, poupando e planejando o futuro

Um jovem casal sem filhos, cuja renda mensal conjunta é R$ 4 800,00, decide organizar uma planilha de custos para equilibrar o orçamento doméstico. A análise dessa planilha nos primeiros meses revelou ao casal que, descontados os custos fixos, como pagamento da prestação do apartamento e de contas de consumo, transporte e alimentação, sobram ainda R$ 600,00.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

O controle das despesas é o primeiro passo para o equilíbrio do orçamento doméstico.

O casal tomou, então, uma importante decisão: reservar R$ 250,00 desse excedente para gastos eventuais e aplicar, mensalmente, a quantia de R$ 350,00 em um fundo de investimento pelos próximos dois anos, a fim de construir uma reserva financeira. Vamos admitir que o rendimento mensal líquido desse fundo seja de 0,7% ao mês nesse período.

Professor, no ano de 2015 havia fundos de investimento oferecidos pelos bancos com rentabilidade similar à apresentada neste texto.

Qual será o valor da reserva financeira disponível do casal, imediatamente após o 24º depósito?

Vamos construir uma tabela para acompanhar a evolução dos rendimentos de cada parcela. Note que:

- o 1º depósito renderá juros compostos de 0,7% ao mês por 23 meses;
- o 2º depósito renderá juros compostos de 0,7% ao mês por 22 meses;
- o 3º depósito renderá juros compostos de 0,7% ao mês por 21 meses;

  ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- o 23º depósito renderá juros compostos de 0,7% ao mês por 1 mês;
- o 24º depósito não renderá juros.

No corpo da tabela a seguir, você encontrará valores da forma $350 \cdot 1{,}007^n$, com $n \in \{0,1,..., 23\}$, em que **n** é o número de meses de acúmulo de juros. Tais valores foram obtidos a partir da fórmula $M = C \cdot (1 + i)^n$.

| Mês | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1º depósito** | 350 | $350 \cdot 1{,}007$ | $350 \cdot 1{,}007^2$ | $350 \cdot 1{,}007^3$ | ... | $350 \cdot 1{,}007^{22}$ | $350 \cdot 1{,}007^{23}$ |
| **2º depósito** | – | 350 | $350 \cdot 1{,}007$ | $350 \cdot 1{,}007^2$ | ... | $350 \cdot 1{,}007^{21}$ | $350 \cdot 1{,}007^{22}$ |
| **3º depósito** | – | – | 350 | $350 \cdot 1{,}007$ | ... | $350 \cdot 1{,}007^{20}$ | $350 \cdot 1{,}007^{21}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **23º depósito** | – | – | – | – | ... | 350 | $350 \cdot 1{,}007$ |
| **24º depósito** | – | – | – | – | ... | – | 350 |

Para responder à pergunta sobre o valor da reserva financeira do casal, é preciso somar os valores da última coluna da tabela:

$$350 \cdot 1{,}007^{23} + 350 \cdot 1{,}007^{22} + 350 \cdot 1{,}007^{21} + ... + 350 \cdot 1{,}007 + 350$$

Uma opção é obter, com auxílio da calculadora científica, o valor de cada parcela da adição acima e, em seguida, adicionar os resultados encontrados.

Outra opção é notar que a expressão acima representa a soma dos termos de uma P.G. Invertendo a ordem dos termos, podemos reescrevê-la assim:

$$350 + 350 \cdot 1{,}007 + 350 \cdot 1{,}007^2 + ... + 350 \cdot 1{,}007^{22} + 350 \cdot 1{,}007^{23}$$

Temos:

$$a_1 = 350; q = 1{,}007; n = 24$$

Lembrando que $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, obtemos:

$$S_{24} = \frac{350 \cdot (1{,}007^{24} - 1)}{1{,}007 - 1} \simeq \frac{350 \cdot 0{,}182244}{0{,}007} = 9\,112{,}25$$

Ao final de dois anos, o casal terá construído uma reserva financeira aproximada de R$ 9 100,00. Essa reserva poderá ser útil em diversos contextos: para quitar, abater ou renegociar a dívida do financiamento da casa própria, ou em uma eventual perda de emprego; além disso essa reserva poderá dar ao casal suporte na chegada do primeiro filho.

Observe ainda que, caso o casal optasse por manter esse padrão de poupança por mais um ano, o montante acumulado seria igual a:

$$\frac{350 \cdot (1{,}007^{36} - 1)}{1{,}007 - 1} \simeq 14\,273, \text{ ou seja, R\$ } 14\,273{,}00$$

Se o compromisso assumido for cumprido, o casal poderá usufruir desse montante, com melhores condições de negociação em uma compra, quitar ou abater uma eventual dívida, além de assegurar maior tranquilidade.

CAPÍTULO 7

# Números complexos

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### Introdução aos números complexos

Os números complexos são usualmente apresentados a partir de uma equação do 2º grau. Por exemplo, quando resolvemos a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, utilizando a usual fórmula resolutiva, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de **x** é preciso calcular a raiz quadrada de $-16$, o que, em $\mathbb{R}$, é impossível, pois não existe um número real **m** tal que $m^2 = -16$. Daí a necessidade de um novo conjunto numérico para se obter a solução para esse tipo de problema.

Primeiro objeto de uma construção abstrata, presente nos vários domínios da Matemática, os **números complexos** foram um grande desafio imposto aos matemáticos.

Como justificar sua existência e constituição?

Das tentativas de responder a essa questão nasceram novos conceitos algébricos e novas teorias, produzindo um grande desenvolvimento das pesquisas matemáticas.

Um primeiro avanço importante foi dado por Girolamo Cardano (1501-1576) ao tentar resolver o seguinte problema: “Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40”.

Chamando de **x** e $10 - x$ as partes procuradas, Cardano montou a seguinte equação:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

e, como $\sqrt{-15}$ não é um número real, para Cardano tal problema não teria solução.

Entretanto, ele trabalhou com os resultados obtidos, ou seja, com $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $10 - x = 5 - \sqrt{-15}$, constatando que:

$$\begin{cases} \left(5 + \sqrt{-15}\right) + \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 10 \\ \text{e} \\ \left(5 + \sqrt{-15}\right) \cdot \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 40 \end{cases}$$

Então, mesmo desconhecendo o significado dos números que havia obtido, Cardano pôde concluir que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram soluções da equação.

Anos depois, o matemático Rafael Bombelli (1526-1572), ao aplicar a fórmula de Cardano para a resolução de equações do 3º grau, obteve para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ (*).

Como sabia que 4 era uma raiz dessa equação, pois a sentença $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$ é verdadeira, Bombelli concluiu que essa raiz poderia ser obtida pela fórmula (*), desde que se calculasse $\sqrt{-121}$.

Esse foi o mais importante passo para que fosse admitida a existência de um número da forma $a + \sqrt{-b}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Responsáveis pela legitimação de toda teoria estudada nos dias de hoje, Johan Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1822) foram os primeiros matemáticos a terem uma ideia mais clara sobre os chamados números imaginários e a perceber as vantagens que os matemáticos do século XIX poderiam obter através do aprendizado de sua representação geométrica.

De fato, o reconhecimento desses números, com base nos estudos de Gauss, propiciou o desenvolvimento de várias teorias matemáticas. Eles foram universalmente adotados por volta de 1830.

Em 1835, o matemático irlandês William R. Hamilton (1805-1866) elaborou uma teoria aritmética dos números complexos, a qual consistia em considerá-los como pares ordenados de números reais e em definir a soma e o produto de tais pares da maneira mostrada a seguir.

CARL FRIEDRICH GAUSS, CHRISTIAN ALBRECHT JENSEN, 1840/COLEÇÃO PARTICULAR

O matemático alemão Gauss também trabalhou em áreas como Geometria, Astronomia e Óptica. Pintura de Jensen, 1840.

**Fontes de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010; GARBI, G. *O romance das equações algébricas*. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

## Conjunto dos números complexos

Chama-se **conjunto dos números complexos** o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as seguintes definições:

(I) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

(A) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

(M) Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Assim, $z \in \mathbb{C}$, temos que $z = (a, b)$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

**EXEMPLO 1**

Dados os números complexos $z_1 = (x - 1, y + 2)$ e $z_2 = (-4, 3)$, vamos determinar os números reais **x** e **y** para que se tenha $z_1 = z_2$.

Pela definição (I), temos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x - 1, y + 2) = (-4, 3) \underset{(I)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 1 = -4 \\ \text{e} \\ y + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ e } y = 1$$

**EXEMPLO 2**

Dados os números complexos $z_1 = (2, 4)$ e $z_2 = (3, -1)$, determinemos os complexos **v** e **w**, tais que $v = z_1 + z_2$ e $w = z_1 \cdot z_2$.

$$v = z_1 + z_2 = (2, 4) + (3, -1) \underset{(A)}{=} (2 + 3, 4 + (-1)) \Rightarrow v = (5, 3)$$

$$w = z_1 \cdot z_2 = (2, 4) \cdot (3, -1) \underset{(M)}{=}$$

$$\underset{(M)}{=} (2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3) \Rightarrow w = (10, 10)$$

**EXEMPLO 3**

Dados os números complexos $z_1 = (1, 2)$ e $z_2 = (3, 4)$, em cada caso vamos determinar o complexo **z** que satisfaz a condição indicada:

a) $z_2 + z = z_1$

Fazendo $z = (x, y)$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z_2 + z = z_1 \Rightarrow (3, 4) + (x, y) = (1, 2) \underset{(A)}{\Rightarrow} (3 + x, 4 + y) = (1, 2) \underset{(I)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(I)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3 + x = 1 \\ 4 + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

Como $z = (x, y)$, então $z = (-2, -2)$.

Note que, dados os números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, ao determinarmos o número complexo $z = (x, y)$ que satisfaz a condição $z_2 + z = z_1$, estamos calculando a diferença entre $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$, que é indicada por $z_1 - z_2$.

Assim: $z_1 - z_2 = z \Rightarrow (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

b) $z_2 \cdot z = z_1$

Fazendo $z = (x, y)$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z_2 \cdot z = z_1 \Rightarrow (3, 4) \cdot (x, y) = (1, 2) \underset{(M)}{\Rightarrow} (3x - 4y, 3y + 4x) = (1, 2) \underset{(I)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(I)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 3y + 4x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11}{25} \text{ e } y = \frac{2}{25}$$

Como $z = (x, y)$, então $z = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25}\right)$.

Note que, dados os números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d) \neq (0, 0)$, ao determinarmos o número complexo $z = (x, y)$, que satisfaz a condição $z_2 \cdot z = z_1$, estamos calculando o quociente entre $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$, que é indicado por $\frac{z_1}{z_2}$.

Examinemos o comportamento dos números complexos da forma $z = (x, 0)$, em que $x \in \mathbb{R}$, relativamente às definições de igualdade, adição e multiplicação:

(I) $(x, 0) = (y, 0) \Leftrightarrow x = y$

(A) $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$

(M) $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x \cdot y, 0)$

Notamos que, relativamente às operações de adição e multiplicação, esses números se “comportam“ como números reais, como mostram os exemplos:

$$(3, 0) + (5, 0) = (3 + 5, 0 + 0) = (8, 0) \quad \text{e} \quad 3 + 5 = 8$$

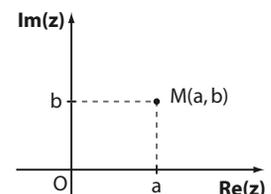
$$(3, 0) \cdot (5, 0) = (3 \cdot 5 - 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5) = (15, 0) \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 15$$

Esse fato permite que se faça a identidade $(x, 0) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, todo número real **x** é um número complexo da forma $(x, 0)$.

Em particular, o número complexo $(1, 0) = 1$ é chamado **unidade real**.

Como um número complexo é um par ordenado de números reais, então podemos dizer que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ e o conjunto dos pontos de um plano, isto é, a cada número complexo $z = (a, b)$ corresponde um único ponto **M**, de coordenadas $(a, b)$, pertencente a um plano e reciprocamente.

Chamaremos esse ponto **M** de **imagem** ou **afixo** do número complexo **z**.

O plano ao qual **M** pertence é chamado **Plano de Argand-Gauss**, ou **Plano de Gauss**, e é determinado por dois eixos perpendiculares, denominados eixo real (Re(z)) e eixo imaginário (Im(z)), conforme é mostrado na figura ao lado.

Assim sendo, as imagens dos números complexos da forma (x, 0) pertencem ao eixo Re(z) e as imagens dos números complexos da forma (0, y) pertencem ao eixo Im(z).

Os números complexos da forma (0, y) são chamados **imaginários puros**.

Em particular, chama-se **unidade imaginária** o número complexo i = (0, 1).

Note que: $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \Rightarrow \mathbf{i^2 = -1}$

Vamos estabelecer uma regra prática para o cálculo de $i^n$, em que $i \in \mathbb{N}$.

Calculemos, por recorrência, o valor de algumas potências naturais de **i**:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $i^0 = 1$ | $i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ |
| $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ | $i^5 = i^{4+1} = i^4 \cdot i^1 = i$ | $i^6 = i^{4+2} = i^4 \cdot i^2 = -1$ | $i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = -i$ |
| $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$ | $i^9 = i^{8+1} = i^8 \cdot i^1 = i$ | $i^{10} = i^{8+2} = i^8 \cdot i^2 = -1$ | $i^{11} = i^{8+3} = i^8 \cdot i^3 = -i$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

De modo geral, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos:

$i^{4k} = i^{4k+0} = 1 \qquad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = i \qquad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1 \qquad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Como sabemos, na divisão de **n** por 4 os possíveis restos são 0, 1, 2 ou 3, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & k \end{array} \Rightarrow n = 4k + r \text{, em que } r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Temos: $i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r \underset{i^{4k}=1}{\Longrightarrow} i^n = i^r$, em que **r** é o resto da divisão de **n** por 4.

Dessa forma, fica estabelecida a seguinte regra para o cálculo das potências naturais de **i**:

> Para calcular $i^n$, em que $n \in \mathbb{N}$, divide-se **n** por 4 e o novo expoente de **i** será o resto dessa divisão.

Note que essa regra pode ser estendida às potências inteiras de **i**, pois $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

**EXEMPLO 4**

Vamos calcular $i^{107}$ e $i^{2050}$ aplicando a regra obtida.

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \hline 27 & 26 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2050 & 4 \\ \hline 05 & 512 \\ 10 & \\ 2 & \end{array}$$

Logo, $i^{107} = i^3 = -i$ e $i^{2050} = i^2 = -1$.

## EXERCÍCIOS

**1** Em cada caso, efetue as operações indicadas:

**a)** (3, 2) + (0, 1)

**b)** (2, 3) · (−1, 4)

**c)** (2x − y, 6x + 2y) + (x − 2y, x); $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

**d)** (−1, −1) · (−4, 2)

**e)** (2, −3) − (−1, −2)

**f)** (1, 0) · (x, −y); $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

**2** Represente no plano de Argand-Gauss os pontos **M**, **N**, **P** e **Q**, respectivas imagens dos números complexos $z_1 = (-2, 1)$, $z_2 = (0, -1)$, $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$.

**3** Dados os números complexos $z_1 = (x, 3)$ e $z_2 = (2 - y, y)$, determine os números reais **x** e **y** de modo que $z_2 - z_1 = (5, -4)$.

**4** Calcule:

**a)** $i^{54}$ **b)** $i^{95}$ **c)** $i^{161}$ **d)** $i^{200}$ **e)** $i^{1221}$ **f)** $i^{2022}$ **g)** $i^{13335}$ **h)** $i^{12784}$

**5** Efetue:

**a)** $i^{25} \cdot i^{18}$ **b)** $(-2i)^{11}$ **c)** $\frac{i^{79}}{i^{32}}$ **d)** $\left[(i^2)^{20}\right]^{32}$ **e)** $\frac{i^{-98}}{i^{-34}}$ **f)** $\frac{i^{132} + i^{61}}{i^{42}}$

**6** Se **i** é a unidade imaginária, determine em cada caso o valor de **A**:

**a)** $A = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{49} + i^{50}$ **b)** $A = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{19} \cdot i^{20}$

## Forma algébrica de z

Dado o complexo $z = (x, y)$, observe que:

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$ (*)

Como já foi visto, $(x, 0) = x \in \mathbb{R}$, $(y, 0) = y \in \mathbb{R}$ e $(0, 1) = i$, então, substituindo em (*), obtemos uma nova expressão para o complexo $z = (x, y)$, que é chamada **forma algébrica de z**:

$$z = x + y \cdot i, \text{ em que } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Temos agora duas expressões para um número complexo, pois $z = (x, y) = x + y \cdot i$, em que **x** e **y** são números reais.

**EXEMPLO 5**

Dados os números complexos $(2, 5)$, $(-1, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$, $(0, 4)$, $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}\right)$, temos:

- $(2, 5) = 2 + 5i$
- $(-1, 1) = -1 + i$
- $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}i$
- $(0, 4) = 0 + 4i = 4i$
- $\left(-\frac{1}{5}, 0\right) = -\frac{1}{5} + 0 \cdot i = -\frac{1}{5}$
- $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

Dado o número complexo $z = x + y \cdot i$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$\begin{cases} \textbf{x} \text{ é chamado } \textbf{parte real} \text{ de } \textbf{z} \text{ e indica-se } x = \text{Re}(z); \\ \textbf{y} \text{ é chamado } \textbf{parte imaginária} \text{ de } \textbf{z} \text{ e indica-se } y = \text{Im}(z). \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}, \text{ isto é, } \textbf{z} \text{ é um número real se, e somente se, } \text{Im}(z) = 0; \\ x = 0 \text{ e } y \neq 0 \Leftrightarrow z = y \cdot i, \text{ isto é, } \textbf{z} \text{ é um imaginário puro se, e somente se, } \text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) \neq 0. \end{cases}$

Para os números complexos $a + bi$ e $c + di$, em que $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, as definições de igualdade, adição e multiplicação, definidas para números complexos dados por pares ordenados de números reais, são expressas como:

(I) $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$

(A) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(M) $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

**EXEMPLO 6**

- $z = 3 + 2i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = 3$ e $Im(z) = 2$
- $z = -1 - 3i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -1$ e $Im(z) = -3$
- $z = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -\frac{2}{3}$ e $Im(z) = 0$
- $z = -i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = 0$ e $Im(z) = -1$
- $z = -1 + i \quad \Rightarrow \quad Re(z) = -1$ e $Im(z) = 1$

**EXEMPLO 7**

Em cada caso, vamos obter o número real **k** que satisfaz a condição determinada:

a) o número complexo $z = (k - 2) + 4i$ deve ser um imaginário puro.

Sabe-se que **z** é um imaginário puro se, e somente se, $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$.

Então, devemos ter: $\begin{cases} Re(z) = k - 2 = 0 \\ Im(z) = 4 \neq 0 \end{cases}$, ou seja, $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

b) o número complexo $z = \left(-3, \frac{2k - 1}{3}\right)$ deve ser um número real.

Sabe-se que **z** é um número real se, e somente se, $Im(z) = 0$.

Então, devemos ter: $\frac{2k - 1}{3} = 0$, ou seja, $2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

**EXEMPLO 8**

Determinemos os números reais **x** e **y** que satisfazem a igualdade $(2x + 1) + (1 - 3y)i = -1 - 2i$.

A igualdade $(2x + 1) + (1 - 3y)i = -1 - 2i$ se verifica quando:

$$\begin{cases} 2x + 1 = -1 & \text{(partes reais iguais)} \\ 1 - 3y = -2 & \text{(partes imaginárias iguais)} \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1$$

**EXEMPLO 9**

Dados os números complexos $v = 1 + 2i$ e $w = 2 - 2i$, vamos calcular $v + w$, $v \cdot w$, $w^2$ e $w - v$.

- $v + w = (1 + 2i) + (2 - 2i) = (1 + 2) + (2 - 2)i = 3$
- $v \cdot w = (1 + 2i) \cdot (2 - 2i) = 2 - 2i + 4i - 4i^2 = 2 + 2i - 4(-1) = 2 + 2i + 4 = 6 + 2i$
- $w^2 = (2 - 2i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2i + (2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = 4 - 8i + 4 \cdot (-1) = 4 - 8i - 4 = -8i$
- $w - v = (2 - 2i) - (1 + 2i) = 2 - 1 - 2i - 2i = 1 - 4i$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Resolva as equações seguintes no universo $\mathbb{C}$:

**a)** $x^2 + 16 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 4 = 0$

**Solução:**

**a)** $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x^2 = 16 \cdot (-1) \Rightarrow x^2 = 16 \cdot i^2 \Rightarrow x = 4i$ ou $x = -4i$

**b)** $x^2 - 2x + 4 = 0$

Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 = 12 \cdot (-1) = 12i^2$, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - i\sqrt{3}$$

**2** Calcule $\sqrt{3 - 4i}$.

**Solução:**

Seja **z** um número complexo tal que $\sqrt{3 - 4i} = z$, ou seja, $z^2 = 3 - 4i$.

Então, fazendo $z = x + yi$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos: $(x + yi)^2 = 3 - 4i$. (*)

Assim, devemos determinar os números reais **x** e **y** que satisfazem a sentença (*), ou seja:

$$x^2 + 2xyi + \underbrace{y^2i^2}_{y^2 \cdot (-1)} = 3 - 4i \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 - 4i \quad (**)$$

Pela definição de igualdade, aplicada em (**), temos: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = -4 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{x} & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1): $x^2 - \left(-\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$

Fazendo $x^2 = a$, obtemos a equação do 2º grau $a^2 - 3a - 4 = 0$, que admite as soluções: $a = 4$ e $a = -1$.

Assim, como $x^2 = a$, temos:

$$a = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} y = -1 \\ x = -2 \underset{(2)}{\Rightarrow} y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - i \text{ ou } z = -2 + i$$

$a = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ não existe solução, pois devemos ter $x \in \mathbb{R}$

Logo, como $\sqrt{3 - 4i} = z$, temos:

$$\sqrt{3 - 4i} = 2 - i \text{ ou } \sqrt{3 - 4i} = -2 + i$$

**PENSE NISTO:**

O método usado para calcular a raiz quadrada de um número complexo na forma algébrica seria facilmente aplicável, caso o índice da raiz fosse um número maior do que dois, como, por exemplo, no cálculo de $\sqrt[4]{3 - 4i}$?

O método só deve ser usado para o cálculo de raízes quadradas, pois, de modo geral, no caso em que o índice da raiz é maior que 2, obtém-se um sistema de equações de difícil resolução, como mostra o exemplo seguinte.

Fazendo $\sqrt[4]{3 - 4i} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$3 - 4i = (x + yi)^4 \Rightarrow 3 - 4i = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 3 \\ 4x^3y - 4xy^3 = -4 \end{cases}$

**OBSERVAÇÕES**

- Sabe-se que, em $\mathbb{R}$, $\sqrt{1} = 1$, pois, por definição: $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.
- Em $\mathbb{C}$, temos: $\sqrt{1} = 1$ ou $-1$, pois, fazendo $\sqrt{1} = a + bi$ (*), em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$(a + bi)^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2 \Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (1) \\ 2ab = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $a = 0$ ou $b = 0$

Assim: $a = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} -b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = -1 \Rightarrow \nexists b \in \mathbb{R}$

$$b = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \underset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{1} = 1 \\ \text{ou} \\ a = -1 \underset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS

**7** Escreva cada um dos números complexos seguintes na correspondente forma algébrica ou como par ordenado:

**a)** $(3, -2)$
**b)** $(-4, 3)$
**c)** $(0, 4)$
**d)** $5i$
**e)** $-5$
**f)** $-3 + i$

**8** Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

**a)** $4 + 5i$
**b)** $3i + 3$
**c)** $\dfrac{-2 + 5i}{3}$
**d)** $-i\sqrt{3}$

**9** Em cada caso, determine o número real **m** de modo que:

**a)** $z = (m - 3) + 4i$ seja imaginário puro;

**b)** $z = -3 + (m + 3)i$ seja real.

**10** Determine os números reais **m** e **n**, para que os números complexos $v = (-2 - m) + 3ni$ e $w = 4 - (m^2 - 4)i$ sejam, respectivamente, imaginário puro e real. Nesse caso, determine **v** e **w**.

**11** Dado o número complexo $z = (3 - x) + (x + 1)i$, em cada caso seguinte determine os valores reais de **x** para que se tenha:

**a)** $Re(z) = 2$
**b)** $Im(z) = -4$
**c)** $Re(z) > Im(z)$
**d)** $Im(z) < 3$

**12** Em cada caso, determine os números reais **m** e **n** para que a igualdade seja verdadeira:

**a)** $m + (n - 1)i = -4 + 3i$
**b)** $(n - 2, m + 5) = (3, -2)$
**c)** $(m - 3) + (n - 2)i = 5i$
**d)** $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

**13** Efetue:

**a)** $(-7 + 5i) - (3 - 2i)$
**b)** $2 + (3 - i) + (-1 + 2i) + i$
**c)** $(-4 + 3i) + 2i - (-3 - i)$
**d)** $-1 - (-2 + i) + (5 - i) - (3 - 7i)$

**14** Determine os complexos **u** e **v** tais que $u + v = 2 - 5i$ e $u - 2v = -4 + 13i$.

**15** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

**a)** $x^2 + 100 = 0$
**b)** $x^2 - 6x + 10 = 0$
**c)** $-x^2 + 4x - 29 = 0$
**d)** $(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 1) = 0$
**e)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
**f)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

**16** Resolva a equação $x^3 - 14x^2 + 58x = 0$, considerando o conjunto universo:

**a)** $\mathbb{R}$
**b)** $\mathbb{C}$

**17** Determine as raízes quadradas dos complexos:

**a)** $-5 + 12i$
**b)** $4i$
**c)** $4 + 3i$
**d)** $1 - i\sqrt{3}$

**18** Em cada caso, efetue as operações indicadas:

**a)** $(2 + 5i) \cdot (1 - i)$
**b)** $(4 + 3i) \cdot (-2 + 2i)$
**c)** $(4 + i) \cdot (2 - i) + 3 - i$
**d)** $(-5i) \cdot (4 - 3i) \cdot (1 + 2i)$
**e)** $(1 + i) \cdot (1 - i)$
**f)** $(2 - 3i)^2$
**g)** $(-3 - 3i)^2$
**h)** $(2 + i)^3$

**19** Dados os complexos $z_1 = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $z_2 = (2, -5)$, determine:

**a)** $z_1 \cdot z_2$
**b)** $z_2^2$

**20** Efetue:

**a)** $(1 + i)^5 \cdot (1 - i)^5$
**b)** $(1 - i)^3$
**c)** $(2 + 2i)^4$

**21** Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o número complexo $z = (x + 3i) \cdot (1 - 2i)$ seja:

**a)** um número real;
**b)** um imaginário puro.

# Conjugado de um número complexo

Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, chama-se **conjugado** de **z**, e indica-se por $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

**EXEMPLO 10**

Vejamos o conjugado de alguns números complexos:

a) $z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$

b) $z = -1 + 4i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 4i$

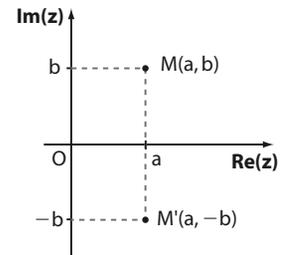
c) $z = -5i \Rightarrow \bar{z} = 5i$

d) $z = 3 \Rightarrow \bar{z} = 3$

## Interpretação geométrica do conjugado

Seja $\bar{z} = a - bi$ o conjugado do número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais.

Como os pontos $M = (a, b)$ e $M' = (a, -b)$, representados na figura ao lado, são as respectivas imagens de **z** e $\bar{z}$, conclui-se que:

A imagem de $\bar{z}$ é o ponto simétrico da imagem de **z**, em relação ao eixo real.

**Propriedades:**

1ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

De fato, se $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, temos:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \Rightarrow a \text{ é um número real qualquer} \\ b = -b \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$$

Professor, algumas dessas propriedades serão usadas na demonstração do teorema das raízes complexas, no capítulo 9.

2ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ \bar{\bar{z}} = z$

3ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

De fato, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Logo:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

4ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

De fato, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

I. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

II. $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Logo, de I e II, conclui-se que: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

**OBSERVAÇÃO**

Essa propriedade pode ser generalizada para um produto de **n** números complexos, ou seja:

$$\forall z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot ... \cdot \bar{z}_n$$

5ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ (\bar{z})^n = \overline{z^n}$, em que $n \in \mathbb{N}$

De fato, fazendo $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ na expressão $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot ... \cdot \bar{z}_n$, temos:

$$\underbrace{\overline{z \cdot z \cdot ... \cdot z}}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{\bar{z} \cdot \bar{z} \cdot ... \cdot \bar{z}}_{n \text{ fatores}} \Rightarrow \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

6ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$

7ª) $\forall z \in \mathbb{C},\ z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i$

**PENSE NISTO:**

Considerando $z = a + bi$, em que **a** e **b** são números reais,como seriam demonstradas a 2ª, a 6ª e a 7ª propriedades?

2ª: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$
Daí, $\bar{\bar{z}} = a + bi = z$
6ª: $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \cdot \text{Re}(z)$
7ª: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$
Daí, $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**3** Determine os números complexos **z**, tais que $z \cdot \bar{z} = 13 + 6i + \bar{z} - z$.

**Solução:**

Fazendo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, na equação $z \cdot \bar{z} = 13 + 6i + \bar{z} - z$, temos:

$(a + bi) \cdot (a - bi) = 13 + 6i + (a - bi) - (a + bi) \Rightarrow a^2 - b^2i^2 = 13 + 6i + \cancel{a} - bi - \cancel{a} - bi \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 13 + (6 - 2b)i \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13 & (1) \\ 0 = 6 - 2b \Rightarrow b = 3 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$a^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2$$

Assim, como $z = a + bi$, temos:

- $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow z = 2 + 3i$
- $a = -2$ e $b = 3 \Rightarrow z = -2 + 3i$

**4** Determine os complexos **z**, tais que $z^2 = \bar{z}$.

**Solução:**

Na equação $z^2 = \bar{z}$, fazendo $z = x + yi$, em que **x** e **y** são números reais, temos:

$$(x + yi)^2 = x - yi \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x - yi \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = x - yi \quad (*)$$

Da definição de igualdade de números complexos, aplicada em (*), temos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x & (**) \\ 2xy = -y \Rightarrow y(2x + 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, fazendo em (**):

- $y = 0$, temos:

  $x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1 \quad (1)$

- $x = -\frac{1}{2}$, temos:

  $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Como $z = x + yi$, então obtemos:

de (1): $\begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow z = 0 \\ x = 1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$ e de (2): $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

Logo, satisfazem a equação dada os complexos: $z = 0$, $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

## EXERCÍCIOS

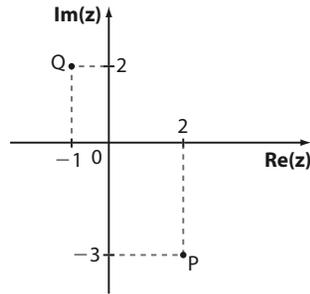
**22** Dados os complexos $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 2i$ e $z_3 = 1 - i$, determine:

**a)** $z_1 + \bar{z}_2$

**b)** $z_2 \cdot \bar{z}_3$

**c)** $\overline{\bar{z}_1 + z_3}$

**d)** $\overline{z_2 \cdot \bar{z}_3}$

**23** Na figura, **P** é o afixo de $\mathbf{z_1}$ e **Q** é o afixo de $\mathbf{z_2}$.
Determine o afixo de:
**a)** $\overline{z_1}$
**b)** $z_1 \cdot \overline{z_2}$
**c)** $(\overline{z_1} \cdot z_2)^2$

**24** Determine $z \in \mathbb{C}$ que verifica a igualdade $z - \overline{z} = 6i$.

**25** Determine $z \in \mathbb{C}$ de modo que a igualdade a seguir seja verdadeira: $2\overline{z} \cdot i + 3 = 2z - \overline{z} + 2i$.

**26** Em cada caso, determine os complexos **z** que verificam a igualdade:
**a)** $(\overline{z})^2 = z^2$
**b)** $z^2 = 2 \cdot \overline{z} \cdot i$
**c)** $(\overline{z})^2 = -2i$

## Quociente de dois números complexos na forma algébrica

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, vamos obter o número complexo **z** tal que $z_2 \cdot z = z_1$.

Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$$z_2 \cdot z = z_1 \Rightarrow (c + di) \cdot (x + yi) = a + bi \Rightarrow (cx - dy) + (cy + dx)i = a + bi \quad (*)$$

Da definição de igualdade aplicada em (*), obtém-se o sistema seguinte, nas incógnitas **x** e **y**:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtêm-se: $x = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ e $y = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

Logo: $z = x + yi$, isto é, $z = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

O número complexo **z** obtido é chamado **quociente** de $\mathbf{z_1}$ por $\mathbf{z_2}$, ou seja, se $z_2 \cdot z = z_1$, com $z_2 \neq 0$, então $\dfrac{z_1}{z_2} = z$.

Mas o cálculo do quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ pode ser feito de maneira mais simples.

Note que: $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} =$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Assim:

Para se obter o quociente de dois números complexos $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

**EXEMPLO 11**

Em cada caso, determinemos a forma algébrica dos seguintes quocientes:

a) $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} = \dfrac{3 - 2i}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i} = \dfrac{6 - 3i - 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \dfrac{4 - 7i}{4 - (-1)} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}i$

b) $\dfrac{-1 + 5i}{i} = \dfrac{(-1 + 5i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \dfrac{i - 5i^2}{-i^2} = \dfrac{i - 5(-1)}{-(-1)} = 5 + i$

**EXEMPLO 12**

Determinemos o quociente de 5i por 3 − 4i:

$$\frac{5i}{3-4i} = \frac{5i\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \frac{15i+20i^2}{9-16i^2} =$$

$$= \frac{15i+20(-1)}{9-16(-1)} = \frac{-20+15i}{25} = -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Determine o número real **x** de modo que $z = \frac{2-i}{1+xi}$ seja imaginário puro. Nesse caso, qual é o complexo **z**?

**Solução:**

Expressando **z** na forma algébrica, temos:

$$z = \frac{2-i}{1+xi} = \frac{(2-i)\cdot(1-xi)}{(1+xi)\cdot(1-xi)} = \frac{2-2xi-i+xi^2}{1-(xi)^2} = \frac{(2-x)-(2x+1)i}{1-x^2\cdot i^2} = \frac{2-x}{1+x^2} - \frac{2x+1}{1+x^2}\cdot i$$

Como **z** é um imaginário puro se, e somente se, Re(z) = 0 e Im(z) ≠ 0, então devemos ter:

$$\frac{2-x}{1+x^2} = 0 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad -\frac{2x+1}{1+x^2} \neq 0 \quad (2)$$

De (1), temos: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x = 2 em (2): $-\frac{2\cdot2+1}{1+2^2} = -1 \neq 0$, isto é, x = 2 satisfaz a condição (2).

Logo, **z** é imaginário puro se x = 2.

Se x = 2, então, como $z = \frac{2-x}{1+x^2} - \frac{2x+1}{1+x^2}\cdot i$, temos:

$$z = \frac{2-2}{1+2^2} - \frac{2\cdot2+1}{1+2^2}\cdot i \Rightarrow z = 0 - \frac{5}{5}i \Rightarrow z = -i$$

**6** Calcule $\frac{(1-i)^{322}}{i^{-105}}$.

Os complexos $(x + xi)^n$, em que $x \in \mathbb{R}^*$ e **n** é um número natural par, são sempre imaginários puros ou reais, pois, fazendo $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, temos:
$(x+xi)^n = (x+xi)^{2p} = x^{2p}\cdot(1+i)^{2p} = x^{2p}\cdot[(1+i)^2]^p = x^{2p}(2i)^p = 2^p\cdot x^{2p}\cdot i^p$ (1)
em (1): **p** ímpar $\Rightarrow i^p = i$ ou $i^p = -i \Rightarrow (x+xi)^n$: imaginário puro; **p** par $\Rightarrow i^p = 1$ ou $i^p = -1 \Rightarrow (x+xi)^n$: número real

**Solução:**

$$\frac{(1-i)^{322}}{i^{-105}} = \frac{[(1-i)^2]^{161}}{\frac{1}{i^{105}}} = [1-2i+i^2]^{161}\cdot i^{105} = (-2i)^{161}\cdot i^{105} =$$

$$= (-2)^{161}\cdot i^{161}\cdot i^{105} \underset{*}{=} -2^{161}\cdot i^{266} \underset{*}{=} -2^{161}\cdot i^2 = -2^{161}\cdot(-1) = 2^{161}$$

Observe que, na passagem (*), foi usada a regra prática para o cálculo de potências naturais de **i**, estudada anteriormente.

**PENSE NISTO:**

Qual é a particularidade dos complexos $(x + xi)^n$ em que **x** é um número real não nulo e **n** é um número natural par?

## EXERCÍCIOS

**27** Escreva as seguintes expressões na forma algébrica:

a) $\frac{6}{5i}$

b) $\frac{2i}{1-i}$

c) $\frac{3-7i}{3+4i}$

d) $\frac{1-2i}{2+i}$

e) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i}$

f) $\frac{(1+i)^2}{1-i}$

g) $\frac{3}{2+3i}-\frac{2i}{3-2i}$

h) $\frac{\overline{1+i}}{i}-\frac{i}{1+i}$

**28** Dado o complexo $z = 3 - 4i$, determine:

**a)** o inverso de **z**; **b)** o conjugado do inverso de $z^2$; **c)** o inverso de $z \cdot i$.

**29** Se o quociente de $3 + 2i$ pelo complexo **z** é igual a $1 - i$, determine **z**.

**30** Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $z = \frac{2 + i}{3 - ai}$ seja imaginário puro.

**31** Se $z = \frac{2 + mi}{1 - i}$, determine o número real **m** para que **z** seja um número real. Nesse caso, qual é o valor de **z**?

**32** Mostre que $\frac{(1 + i)^{53}}{(1 - i)^{51}}$ é um número real.

## Módulo

Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, chama-se **módulo** de **z**, e indica-se por $|z|$ ou pela letra grega $\rho$ (lê-se: "rô"), o número real não negativo dado por:

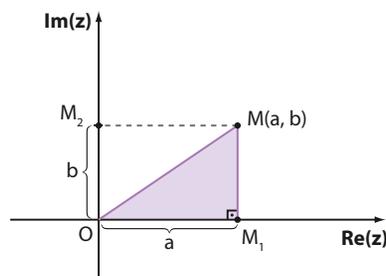
$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**EXEMPLO 13**

Vamos calcular o módulo de alguns números complexos:

- $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $z_2 = 3i = 0 + 3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$
- $z_3 = 2 + 2i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $z_4 = 4 = 4 + 0 \cdot i \Rightarrow \rho_4 = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$
- $z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \rho_5 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- $z_6 = -5 - 5i \Rightarrow \rho_6 = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$

### Interpretação geométrica do módulo

No plano de Argand-Gauss, seja $M = (a, b)$ a imagem do número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, conforme mostrado na figura abaixo.

Note que o triângulo $OM_1M$ é retângulo em $\mathbf{M_1}$.
Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(OM)^2 = (OM_1)^2 + (M_1M)^2$$

Como $\begin{cases} OM_1 = a \\ M_1M = OM_2 = b \end{cases}$, então:

$(OM)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Portanto, conclui-se que:

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância de sua imagem à origem do plano de Argand-Gauss.

1ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2ª) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Determine um número complexo **z** tal que $Im(z) - Re(z) = 17$ e $|z| = 13$.

**Solução:**

Fazendo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, devemos determinar os números reais **a** e **b** que satisfazem as condições dadas, ou seja: $\begin{cases} Im(z) - Re(z) = 17 \Rightarrow b - a = 17 \Rightarrow b = a + 17 & (1) \\ |z| = 13 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 = 169 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$a^2 + (a + 17)^2 = 169 \Rightarrow a^2 + a^2 + 34a + 289 = 169 \Rightarrow a^2 + 17a + 60 = 0 \Rightarrow a = -5 \text{ ou } a = -12$$

Logo: $\begin{cases} a = -5 \underset{(1)}{\Rightarrow} b = 12 \Rightarrow z = -5 + 12i \\ a = -12 \underset{(1)}{\Rightarrow} b = 5 \Rightarrow z = -12 + 5i \end{cases}$

**8** Represente geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

**a)** $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 4\}$

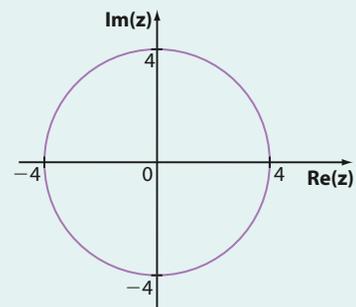
**b)** $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z + 2i| = 1\}$

**c)** $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 1| \leq 3\}$

**Solução:**

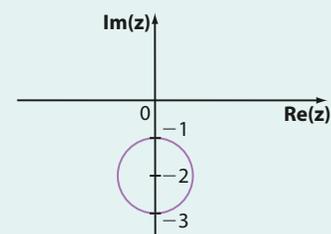
**a)** Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$|z| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

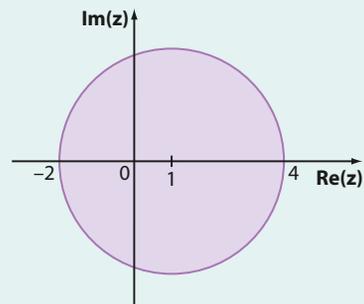
Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z| = 4$ pertencem à circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio de medida 4, representada na figura ao lado.

**b)** Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$|z + 2i| = 1 \Rightarrow |x + yi + 2i| = 1 \Rightarrow |x + (y + 2)i| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z + 2i| = 1$ pertencem à circunferência de centro $(0, -2)$ e raio de medida 1, representada na figura ao lado.

**c)** Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$$|z - 1| \leqslant 3 \Rightarrow |x + yi - 1| \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(x - 1) + yi| \leqslant 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 9$$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z - 1| \leqslant 3$ pertencem ao círculo de centro (1, 0) e raio de medida 3, representado na figura ao lado.

## EXERCÍCIOS

**33** Calcule o módulo de cada um dos números complexos:

**a)** $z = 2 + i$

**b)** $z = 5i$

**c)** $z = -4 + 3i$

**d)** $z = -4$

**e)** $z = -2\sqrt{3} - 2i$

**f)** $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

**34** Entre os números complexos $2 + 3i$, $3 + i$, $1$, $-2$, $4i$ e $-\frac{1}{2}i$, qual possui o maior módulo?

**35** Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

**a)** $z = (2 - 3i) \cdot (4 + 6i)$

**b)** $z = \frac{3i}{1 + i}$

**c)** $z = 2 \cdot i^{119}$

**d)** $z = 2i(-1 + 2i)$

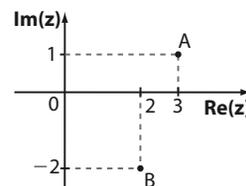
**36** São dados os números complexos $z_1 = x + 3i$ e $z_2 = 2 + (x - 1)i$, nos quais **x** é um número real. Determine **x** para que se tenha $|z_1| = |z_2|$.

**37** No plano de Argand-Gauss representado ao lado, **A** e **B** são as respectivas imagens dos números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$.

Determine o módulo de:

**a)** $z_1 + z_2$

**b)** $z_1 - z_2$

**c)** $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

**38** Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

**a)** $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 0\}$

**b)** $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 10\}$

**c)** $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - \bar{z}| = 4\}$

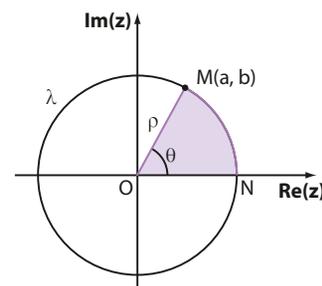
**d)** $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 4\}$

**e)** $E = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geqslant 2\}$

**f)** $F = \{z \in \mathbb{C};\ |z + i| = 2\}$

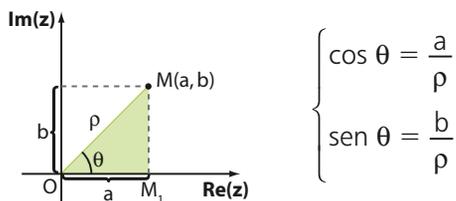
## Argumento

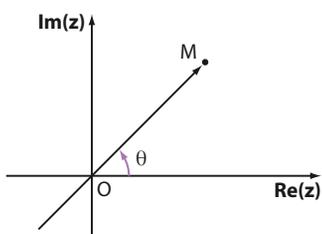
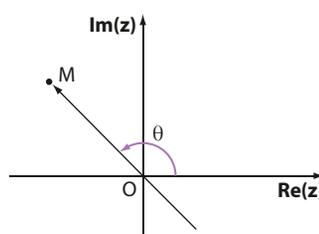
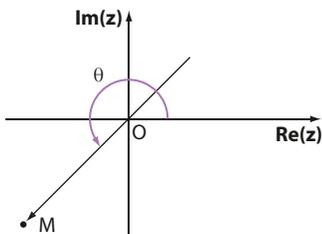
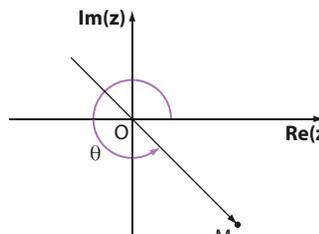
No plano complexo, sejam **M** a imagem de um complexo $z = a + bi$, não nulo, e **N** a interseção da circunferência $\lambda$, de centro na origem **O** do plano e raio $\overline{OM}$, em que $OM = \rho = |z|$, com o semieixo real positivo.

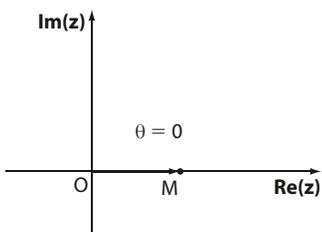
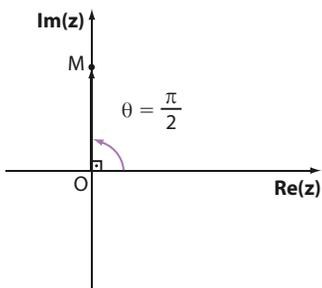
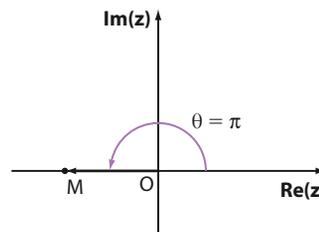
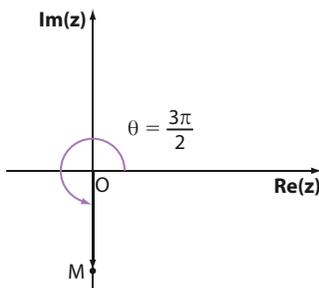
Chama-se **argumento** de **z** qualquer ângulo $\theta$ que corresponde a um arco de $\lambda$, de origem **N** e extremidade **M**, conforme mostrado na figura ao lado.

Indica-se: $\theta = \arg z$

Em particular, se $0 \leqslant \theta < 2\pi$, diz-se que $\theta$ é o **argumento principal** de **z**.

Observe na figura abaixo que o triângulo $OM_1M$ é retângulo.

$$\begin{cases} \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

## Representações geométricas do argumento principal

Observe a seguir as representações geométricas do argumento principal $\theta$, em que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

$M \in 1^{\underline{o}}$ quadrante

$M \in 2^{\underline{o}}$ quadrante

$M \in 3^{\underline{o}}$ quadrante

$M \in 4^{\underline{o}}$ quadrante

**M** pertence ao eixo real

**M** pertence ao eixo imaginário

**OBSERVAÇÕES**

- Se **z** é um número complexo não nulo cujo argumento principal é $\theta_0$, então todos os ângulos congruentes a ele são argumentos de **z**, ou seja:

  $\theta = \arg z \Rightarrow \theta = \theta_0 + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$

  Assim, a notação $\arg z = \theta$ pode ser usada para indicar o argumento principal de **z** (quando $k = 0$) ou para indicar qualquer outro argumento de **z** (quando $k \neq 0$).

- Dado o número complexo $z = a + bi$, com **a** e **b** reais:
  - se $z = 0$, então $M = (0, 0)$ é a imagem de **z** no plano complexo, ou seja, não fica definida a circunferência $\lambda$, já que $\rho = OM = 0$. Nesse caso, não se define o argumento de **z**.
  - **z** é um número real positivo $\Leftrightarrow$ $\arg z = k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um número real negativo $\Leftrightarrow$ $\arg z = \pi + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um imaginário puro e $Im(z) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\arg z = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$
  - **z** é um imaginário puro e $Im(z) < 0$ $\Leftrightarrow$ $\arg z = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$

**EXEMPLO 14**

Em cada caso, determinemos o argumento principal dos números complexos dados:

a) $z_1 = 4 + 4i$

Como $a = 4$, $b = 4$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos:

$$\rho = \sqrt{4^2 + 4^2} \Rightarrow \rho = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta \in 1^{\underline{o}} \text{ quadrante} \Rightarrow \theta = 45° \text{ ou } \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) $z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

Outro modo de calcular $\theta$, argumento principal de um número complexo **z**, pode ser o seguinte:

Primeiramente vamos determinar a medida ($\alpha$) do ângulo mostrado na figura. Para isso, temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Usando trigonometria no triângulo retângulo, temos:

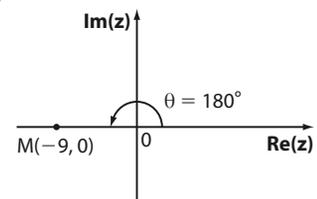
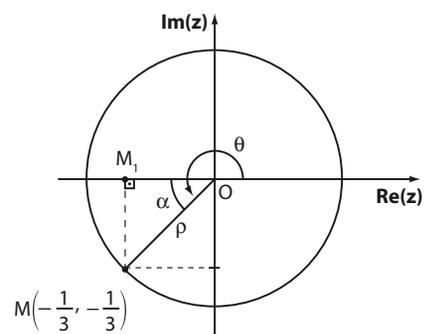
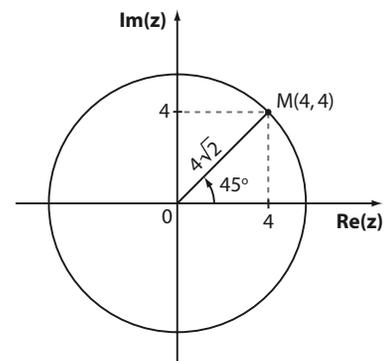
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45° \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Como o afixo de $\mathbf{z_2}$ é $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, ou seja, $M \in 3^{\underline{o}}$ quadrante, então:

$$\theta = \alpha + 180° \Rightarrow \theta = 45° + 180° \Rightarrow \theta = 225° \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

c) $z_3 = -9$

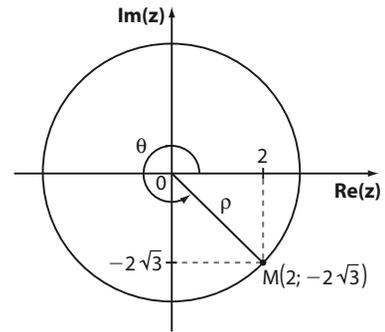
Como $\mathbf{z_3}$ é um número real negativo, então:

$\theta = 180°$ ou $\theta = \pi$ rad

d) $z_4 = 2 - 2i\sqrt{3}$

Como $a = 2$, $b = -2\sqrt{3}$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos:

$\rho = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} \Rightarrow \rho = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = 300°$ ou $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**9** Os pontos **A**, **B** e **C**, representados na figura ao lado, são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio de medida 2 cm. Determine a forma algébrica dos números complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ e $\mathbf{z_3}$ cujos afixos são **A**, **B** e **C**, respectivamente.

**Solução:**

Observe na figura ao lado que:

- como **A**, **B** e **C** são vértices de um triângulo equilátero, temos:

  med(AÔB) = med(BÔC) = med(CÔA) = 120° ⇒

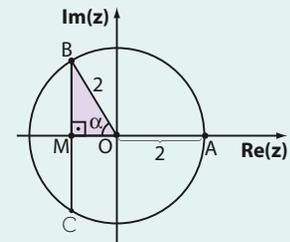
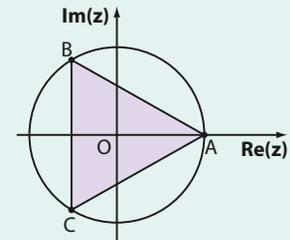
  ⇒ $\alpha$ = med(BÔM) = 180° − 120° = 60°

- △BMO é retângulo ⇒ $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{|OM|}{2} \Rightarrow |OM| = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 \\ \text{sen}\, 60° = \dfrac{|BM|}{2} \Rightarrow |BM| = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$

Assim, temos:

**A** pertence ao eixo real ⇒ A = (2, 0) ⇒ $z_1 = 2$

$B(x_2, y_2)$ ∈ 2º quadrante ($x_2 < 0$ e $y_2 > 0$) ⇒ $x_2 = -|OM| = -1$ e $y_2 = |BM| = \sqrt{3} \Rightarrow z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$C(x_3, y_3)$ ∈ 3º quadrante ($x_3 < 0$ e $y_3 < 0$) ⇒ $x_3 = -|OM| = -1$ e $y_3 = -|BM| = -\sqrt{3} \Rightarrow z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

## EXERCÍCIOS

**39** Determine o argumento principal de cada um dos seguintes números complexos:

**a)** $z = \sqrt{3} + i$

**b)** $z = 4\sqrt{3} - 4i$

**c)** $z = -2 + 2i$

**d)** $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

**e)** $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

**f)** $z = 2i$

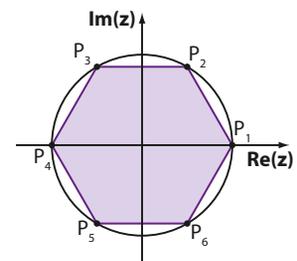
**g)** $z = -3 - 3i\sqrt{3}$

**h)** $z = -6$

**i)** $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

**j)** $z = -\dfrac{i}{4}$

**40** A figura apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4.

Determine o argumento principal dos complexos $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $\mathbf{z_3}$, $\mathbf{z_4}$, $\mathbf{z_5}$ e $\mathbf{z_6}$, cujas respectivas imagens são os vértices $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_5}$ e $\mathbf{P_6}$.

# Forma trigonométrica ou polar

Se $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, é um número complexo não nulo, sabemos que $\theta = \arg z$ satisfaz as condições:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta & (1) \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta & (2) \end{cases}$$

Assim, substituindo (1) e (2) em $z = a + bi$, temos: $z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \text{sen}\,\theta)i$

Obtemos então uma nova expressão para um número complexo, que é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** de **z**:

$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Vejamos agora a igualdade de números complexos dados na forma trigonométrica.

Dados $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, dois números complexos, podemos concluir que:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

De fato: $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) = \rho_1 \cdot \cos\theta_1 + \rho_1 \cdot i\,\text{sen}\,\theta_1$ (1)

$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 + \rho_2 \cdot i\,\text{sen}\,\theta_2$ (2)

Assim:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 \cdot \cos\theta_1 = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 \\ \rho_1 \cdot \text{sen}\,\theta_1 = \rho_2 \cdot \text{sen}\,\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1^2 \cdot \cos^2\theta_1 = \rho_2^2 \cdot \cos^2\theta_2 & (3) \\ \rho_1^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta_1 = \rho_2^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta_2 & (4) \end{cases}$$

Adicionando membro a membro (3) e (4), temos:

$$\rho_1^2 \cdot (\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\,\theta_1) = \rho_2^2 \cdot (\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2) \Rightarrow \rho_1^2 = \rho_2^2 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2$$

De (1) e (2), temos: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \text{sen}\,\theta_1 = \text{sen}\,\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em outras palavras:

Dois números complexos são iguais se, e somente se, seus módulos são iguais e seus argumentos são congruentes.

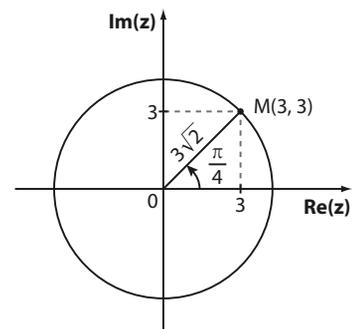
**EXEMPLO 15**

Vamos escrever os números complexos seguintes na forma trigonométrica:

a) $z = 3 + 3i$

Se $z = 3 + 3i$, temos:

- $\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \in 1^{\text{o}}$ quadrante $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \Rightarrow z = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 4 - 4i\sqrt{3}$

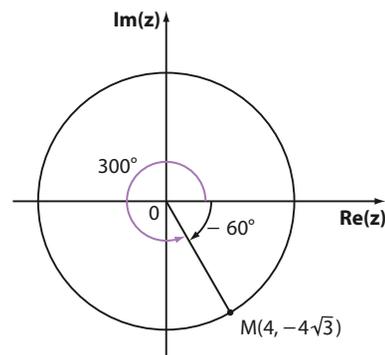
Se $z = 4 - 4i\sqrt{3}$, temos:

- $\rho = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta \in 4^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow \theta = 300°$

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow$

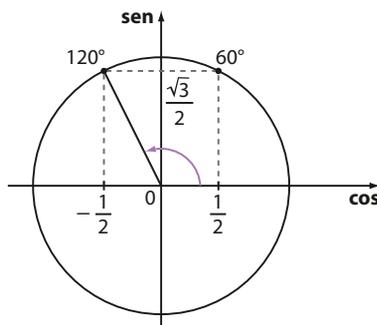
$\Rightarrow z = 8(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

Note que, como $\theta \in 4^{\circ}$ quadrante, poderíamos usar qualquer arco congruente a 300° (argumento principal) para escrever **z** na forma trigonométrica, ou seja, **z** poderia ser expresso, por exemplo, como: $z = 8[\cos(-60°) + i \operatorname{sen}(-60°)]$.

EXEMPLO **16**

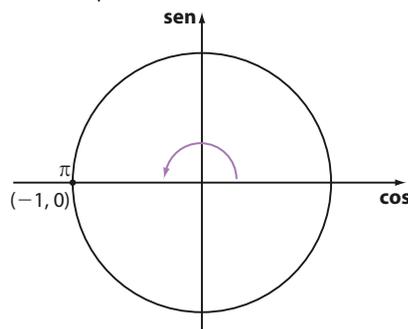
Dados os números complexos na forma polar, vamos expressá-los na forma algébrica:

a) $z = 4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

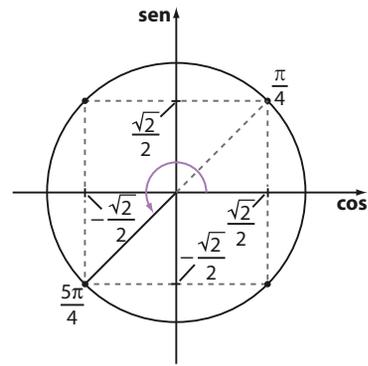
Como $\begin{cases} \cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2} \\ \text{e} \\ \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, temos:

$z = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, isto é, $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

b) $z = \dfrac{1}{4}(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$

Como $\cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$, temos:

$z = \dfrac{1}{4}(-1 + i \cdot 0)$, isto é, $z = -\dfrac{1}{4}$

c) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{4}\right)$

$$\text{Como}\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{e}\\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{4} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}, \text{ temos:}$$

$$z = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

**PENSE NISTO:**

Dado um número complexo na forma algébrica, como você procederia para escrevê-lo na forma polar, no caso de o argumento não ser um arco notável?

Como exemplo, seja $z = -1 + 5i$.
Temos: $\rho = \sqrt{26}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{26}}{26}$ e $\text{sen}\ \theta = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \theta \in 2^{\text{o}}$ quadrante
Podemos escrever: $z = \sqrt{26}\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\ \theta)$, em que $\theta$ é o arco cujo cosseno vale $\left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$ e $\theta \in 2^{\text{o}}$ quadrante.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**10** Determine a forma polar dos números complexos **x** e **y** que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases}2xi + y = -3 + i\\ x + yi = -1\end{cases}$$

**Solução:**

$$\begin{cases}2xi + y = -3 + i & (1)\\ x + yi = -1 \Rightarrow x = -1 - yi & (2)\end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$2i(-1 - yi) + y = -3 + i \Rightarrow -2i - 2yi^2 + y = -3 + i \Rightarrow 3y = -3 + 3i \Rightarrow y = -1 + i$$

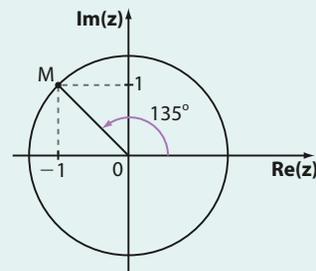
Como $x = -1 - yi$, então: $x = -1 - (-1 + i)i = -1 + i - i^2 \Rightarrow x = i$

Determinemos a forma polar de **x** e **y**:

- $x = i$ é imaginário puro e sua imagem pertence ao eixo imaginário. A forma trigonométrica de **x** é:

$$x = \cos 90° + i\ \text{sen}\ 90°$$

- $y = -1 + i$ e sua imagem é o ponto $M(-1, 1) \Rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$

$$\text{Assim, temos:}\begin{cases}\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{e}\\ \text{sen}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta = 135°$$

Logo, $y = \sqrt{2}(\cos 135° + i\ \text{sen}\ 135°)$.

Portanto, na forma polar, as soluções do sistema são:

$$x = \cos 90° + i\ \text{sen}\ 90° \text{ e } y = \sqrt{2}(\cos 135° + i\ \text{sen}\ 135°)$$

## EXERCÍCIOS

**41** Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

**a)** $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

**b)** $z = 2i$

**c)** $z = 1 - i\sqrt{3}$

**d)** $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

**e)** $z = -4$

**f)** $z = 3 - 3i$

**g)** $z = (-5, 5)$

**h)** $z = -i$

**i)** $z = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

**j)** $z = (1 - i)^2$

**42** Dado o número complexo $z = \frac{i}{1 + i} + \frac{1}{i}$, pede-se:

**a)** as formas algébricas de **z** e $z^2$;

**b)** as formas trigonométricas de **z** e $z^2$.

**43** Obtenha a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos:

**a)** $z = 4(\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$

**b)** $z = 6\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3}\right)$

**c)** $z = 3(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

**d)** $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}$

**e)** $z = \cos 210° + i \text{ sen } 210°$

**f)** $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{6}\right)$

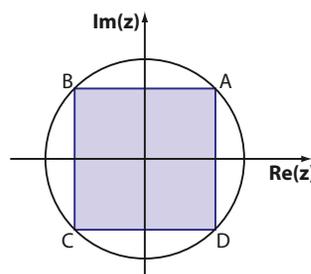
**g)** $z = \sqrt{2}(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

**h)** $z = 3\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{4}\right)$

**44** Se **x** e **y** são números complexos, escreva as soluções dos sistemas seguintes na forma polar.

**a)** $\begin{cases} x + yi = -1 - 2i \\ 2xi + y = 1 + i \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x + yi = 0 \\ xi + y = 3 - 3i\sqrt{3} \end{cases}$

**45** Sabe-se que a medida do lado do quadrado ABCD é 10. Obtenha a forma polar dos números complexos cujos afixos são os vértices desse quadrado. Expresse as medidas dos respectivos argumentos, em radianos.

## DESAFIO

Seja **z** um número complexo cuja forma polar é $z = p \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$.
Determine o conjunto solução da equação $z^2 + |z| = 0$.

# Polinômios

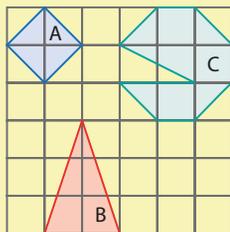
## Introdução aos polinômios

TROQUE **IDEIAS**

### Problemas com polinômios

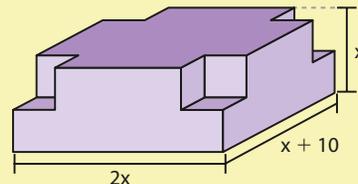
Professor, o objetivo desta atividade é levar o estudante a reconhecer polinômios por meio da expressão da área de superfícies planas e do volume e da área de poliedros. É também uma oportunidade de integrar e revisar conceitos já estudados.

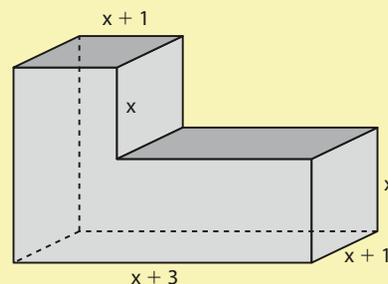
Resolva os seguintes problemas. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** No quadriculado abaixo, o lado de cada quadradinho mede **x** (unidades de medida de comprimento). Calcule, em função de **x**, a área dos polígonos **A**, **B** e **C**.

**b)** Responda:

i) De uma folha de cartolina retangular de dimensões 30 cm × 22 cm é recortado, em cada um de seus vértices, um quadrado cujo lado mede **x** centímetros, em que $0 < x < 11$. Determine, em função de **x**, a expressão que representa a área da superfície remanescente.

ii) Após a retirada dos quadrados, é possível construir, a partir da superfície obtida, uma caixa sem tampa, na forma de paralelepípedo retângulo, dobrando-se convenientemente seus lados. Determine o volume do paralelepípedo obtido.

**c)** De um paralelepípedo retângulo de dimensões **x**, 2x e x + 10, com $x > 1$, são retirados quatro cubos unitários, como mostra a figura:

Determine o volume do poliedro obtido.

**d)** Observe o poliedro seguinte.

Escreva a expressão algébrica que representa:

i) seu volume;

ii) sua área total.

## Definição

Um **polinômio** na variável complexa **x** é uma expressão dada por:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

- $\mathbf{a_n}, \mathbf{a_{n-1}}, \ldots, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_0}$ são números complexos chamados **coeficientes** do polinômio; $\mathbf{a_0}$ é o **coeficiente independente** do polinômio;
- todos os expoentes de **x**: n, n − 1, ..., 2, 1, 0 são números naturais;
- cada uma das parcelas, $a_n \cdot x^n, a_{n-1} \cdot x^{n-1}, \ldots, a_1 \cdot x, a_0$, corresponde a um termo do polinômio;
- o **grau** do polinômio é o número natural igual ao maior expoente de **x**, cujo termo apresenta coeficiente não nulo;
- **x** pode assumir qualquer valor complexo.

EXEMPLO **1**

- $4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ é um polinômio de grau 3.
- $-\frac{1}{6}x^5 + x^2 - 3x + 1$ é um polinômio de grau 5.
- $2ix^2 + x - 2$ é um polinômio de grau 2.
- $x^6 - ix^3 + 4x^2 - 3i$ é um polinômio de grau 6.
- $x + 4$ é um polinômio de grau 1.
- $5x$ é um polinômio de grau 1.
- $-7$ é um polinômio de grau 0, pois podemos escrevê-lo na forma $-7 \cdot x^0$.
- Em cada item da atividade proposta na seção *Troque ideias* desenvolvido na introdução do capítulo, as expressões obtidas são exemplos de polinômios.

OBSERVAÇÕES

- A expressão $2x + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = 2x + 3x^{-2} + 4x^{-1}$ não é um polinômio, pois os expoentes de **x** não podem ser negativos.
- A expressão $3x^2 - 5\sqrt{x} + 2 = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} + 2$ não é um polinômio, pois os expoentes de **x** não podem ser fracionários.

## Coeficiente dominante

Seja $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau **n**. O coeficiente $\mathbf{a_n}$ é chamado **coeficiente dominante** do polinômio.

EXEMPLO **2**

- $-x^3 + 15x^2 - 7x + 3$ possui coeficiente dominante igual a $-1$.
- $\frac{4}{3}x^5 + 2x - 1$ tem coeficiente dominante igual a $\frac{4}{3}$.
- $2ix^2 + 4x^3 + ix^4$ tem coeficiente dominante igual a **i**.
- $x^2 - 3x + 5$ tem coeficiente dominante igual a 1.

# Função polinomial

Vamos considerar uma função f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que a cada $x \in \mathbb{C}$ associa o polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, isto é, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

A função **f** recebe o nome de **função polinomial**.

Por exemplo, as funções **f**, **g** e **h**, definidas, respectivamente, por $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = 2x^2 - x + 1$ e $h(x) = ix^3 - 2x + 4$, são funções polinomiais. Em particular, as funções de variável real ($x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) afim (1º grau), definidas por $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$, e quadráticas (2º grau), definidas por $y = ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, estudadas em anos anteriores, são exemplos de funções polinomiais.

Como a cada polinômio está associada uma única função e, reciprocamente, a cada função está associado um único polinômio, podemos, daqui em diante, usar indistintamente os termos polinômio ou função polinomial.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1** Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o grau do polinômio $(m + 2)x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ seja igual a 4.

**Solução:**

Para que o polinômio tenha grau 4, basta que o coeficiente de $x^4$ não se anule, isto é: $m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.

**2** Discuta, em função de **m**, em que **m** varia em $\mathbb{R}$, o grau do polinômio:

$$p(x) = (m^2 - 25)x^7 + (m + 5)x^4 + 6x^3 - 2x + 5$$

**Solução:**

Devemos considerar todas as possibilidades para o grau de p(x), de acordo com os valores que **m** assume.

Há três casos:

- 1º caso:
  O grau de p(x) será 7 se $m^2 - 25 \neq 0$, isto é, se:
  $m \neq -5$ e $m \neq 5$
- 2º caso:
  O grau de p(x) será 4 se o coeficiente de $x^7$ for nulo e o coeficiente de $x^4$ não for nulo, isto é, se:
  $m^2 - 25 = 0$ e $m + 5 \neq 0 \Rightarrow m = \pm 5$ e $m \neq -5 \Rightarrow m = 5$
- 3º caso:
  O grau de p(x) será 3 se os coeficientes de $x^7$ e de $x^4$ se anularem simultaneamente, isto é, se:
  $m^2 - 25 = 0$ e $m + 5 = 0 \Rightarrow m = -5$

## EXERCÍCIOS

**1** Indique os itens cujas expressões representam polinômios:

**a)** $-2x^{10} + x^5 - 1$

**b)** $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 3x + 5$

**c)** $(x + 4)^2$

**d)** $2x + 3^x - 1$

**e)** $\sqrt{x + 5}$

**f)** $\frac{1}{i}x^3 - 2x + 4i$

**g)** $2ix^2 - 1$

**2** Determine o grau de cada polinômio seguinte:

**a)** $3x^4 - 6x^2 + 5x - 1$

**b)** $2x - x^3$

**c)** $x^7 + x^2 + 1$

**d)** $(3x^2 + 10x)^7$

**e)** $(4x - 1) \cdot (x^2 - x - 3)$

**f)** $-3$

**g)** $x$

**h)** $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot ... \cdot x^{15}$

**3** Identifique o coeficiente dominante de cada um dos polinômios seguintes:

**a)** $10x^5 - x^3 + 100x - 99$

**b)** $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + 2$

**c)** $-x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

**d)** $x + x^2 + 2ix^3 + ix^4$

**e)** $(x + 5)^3$

**4** Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio $p(x) = (m^2 - 2)x^4 + 6x^3 - 4x + 2$ tenha grau 4.

**5** Para que valores reais de **k** a expressão polinomial $(2k^2 - 8)x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ tem grau 2?

**6** Discuta, em função do parâmetro real **m**, o grau de $p(x) = (m^2 - 16)x^8 + (m + 4)x^5 - x^4 + 3x - 1$.

**7** Responda: é possível que o grau do polinômio $p(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^4 - 3x + 1$ seja:

**a)** 5? **b)** 4? **c)** 3?

Em caso afirmativo, dê, para cada item, as condições em que isso ocorre.

# Polinômio nulo

**Polinômio nulo** (ou polinômio identicamente nulo) é aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Assim, o polinômio $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ é nulo se $a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

Pelo fato de possuir todos os coeficientes iguais a zero, não se define o grau de um polinômio nulo.

**EXEMPLO 3**

A condição para que o polinômio $ax^2 + bx + (c + 1)$ seja nulo é que todos os seus coeficientes sejam iguais a zero, isto é:

$$a = 0;\ b = 0 \text{ e } c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

# Valor numérico

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ e **p** o polinômio definido por $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

O **valor numérico de p em α** é igual ao número complexo obtido quando substituímos **x** por **α** e efetuamos as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + ... + a_1 \cdot \alpha + a_0$$

**EXEMPLO 4**

Seja o polinômio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Vamos calcular seus valores numéricos para $x = 2$ e para $x = i$.

- Substituímos **x** por 2:

$$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 16 + 4 - 8 + 1 \Rightarrow p(2) = 13$$

- Substituímos **x** por **i**:

$$p(i) = 2 \cdot i^3 + i^2 - 4i + 1 = -2i - \cancel{1} - 4i + \cancel{1} \Rightarrow p(i) = -6i$$

**OBSERVAÇÕES**

Considerando o polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, temos que:

- $p(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + ... + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$, isto é, p(1) é igual à soma dos coeficientes do polinômio.
- $p(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0^1 + a_0 = a_0$, isto é, p(0) é igual ao coeficiente independente do polinômio.

# Raiz

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dizemos que $\boldsymbol{\alpha}$ é raiz do polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ se $p(\alpha) = 0$, isto é:

$$a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$$

**EXEMPLO 5**

O número 2i é uma raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$, pois $p(2i) = 0$, isto é:

$p(2i) = (2i)^3 + 3(2i)^2 + 4 \cdot 2i + 12 \Rightarrow p(2i) = 8i^3 + 12i^2 + 8i + 12 \Rightarrow p(2i) = -8i - 12 + 8i + 12 = 0$

Já o número $-2$ não é raiz desse polinômio, pois:

$$p(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 12 = 8 \neq 0$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**3** Sabendo que $x = -4$ é uma raiz do polinômio $p(x) = x^2 + mx - 3$, em que $m \in \mathbb{R}$, determine o valor de **m**.

**Solução:**

Como $-4$ é raiz, devemos ter $p(-4) = 0$, isto é:

$$(-4)^2 + m(-4) - 3 = 0 \Rightarrow 16 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{13}{4}$$

## EXERCÍCIOS

**8** O polinômio $p(x) = ax + (b - 2)$ é nulo. Quais são os valores de **a** e **b**?

**9** Determine os valores de **a**, **b**, **c** e **d**, a fim de que $p(x) = (a - 1)x^3 + (2a - b + 3)x^2 + (b - c)x + (c - 2d)$ seja o polinômio nulo.

**10** Sendo $p(x) = x^2 - 5x + 3$, obtenha o valor numérico de **p** para:

**a)** $x = 0$  **c)** $x = 2$  **e)** $x = i$

**b)** $x = 1$  **d)** $x = 1 + i$  **f)** $x = \frac{3}{2}$

**11** Verifique quais dos números complexos **i**, 1, 3, $1 + 2i$ e 0 são raízes de $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$.

**12** Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $-1$ seja raiz do polinômio $x^2 - 4x + (m + 4)$.

**13** Determine **a** e **b** reais em $p(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que $p(2) = 3$.

**14** Determine o polinômio **p** de grau 1, tal que $p(2) = 5$ e $p(-1) = 2$.

**PENSE NISTO:**

$p(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$.

Como se escreve genericamente um polinômio de grau 1?

**15** O número **i** é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 3x + k$, em que **k** é uma constante complexa. Determine:

**a)** **k**;

**b)** $p(2 + i)$, usando o item *a*.

**16** Seja o polinômio:

$p(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + 49x^{49} + 50x^{50}$

**a)** Verifique se 0 é raiz de $p(x)$.

**b)** Determine a soma dos coeficientes de $p(x)$.

**17** Obtenha o polinômio do 2º grau que tem 2i como uma de suas raízes e cuja soma dos coeficientes é igual a 5.

## Polinômios iguais (ou idênticos)

Sejam **f** e **g** dois polinômios respectivamente definidos por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ e}$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Dizemos que **f** e **g** são iguais (ou idênticos) se assumem o mesmo valor numérico para qualquer valor de **x**, isto é:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$$

Vamos mostrar que dois polinômios, **f** e **g**, são iguais se e somente se os coeficientes de **f** e de **g** são ordenadamente iguais, isto é, os coeficientes dos termos de mesmo expoente de **x** são iguais:

$$a_n = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ \ldots;\ a_1 = b_1 \text{ e } a_0 = b_0$$

- Se os coeficientes dos termos de mesmo expoente de **x** são ordenadamente iguais, isto é: $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$; ...; $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, temos, para todo $x \in \mathbb{C}$:

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = g(x)$$

  e, desse modo, **f** e **g** são iguais.

- Se $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$, temos que $f(x) - g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}$, isto é:

  $$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) - (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = 0$$

  $$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

Lembrando que um polinômio é nulo se todos os seus coeficientes são iguais a zero, temos:

$$\begin{cases} a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_n = b_n \\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 \\ a_0 - b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = b_0 \end{cases}$$

Isso mostra que os coeficientes de **f** e de **g** são ordenadamente iguais.

**EXEMPLO 6**

- Para que os polinômios $ax^2 + bx + c$ e $-3x^2 + 5x - 1$ sejam iguais, devemos ter: $a = -3$, $b = 5$ e $c = -1$.
- O polinômio $mx^3 + nx^2 + px + q$ é idêntico ao polinômio $4x^2 - x + 2$ se $m = 0$, $n = 4$, $p = -1$ e $q = 2$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**4** Determine os valores de **a** e **b** reais para os quais ocorre a igualdade: $\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2}$; $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

**Solução:**

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{a(x-2)+b(x+2)}{\underbrace{(x+2)\cdot(x-2)}_{x^2-4}} \Rightarrow a(x-2)+b(x+2) = x+3 \Rightarrow ax - 2a + bx + 2b = x + 3$$

Agrupamos os termos semelhantes:

$$(a+b)x + (-2a+2b) = x + 3$$

Da igualdade de polinômios segue:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + 2b = 3 \end{cases}$$

cuja solução é: $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{5}{4}$.

## EXERCÍCIOS

**18** Calcule os valores de **a** e **b** reais de modo que seja satisfeita a igualdade $(a+3)x + (b-1) = 2x - 3$.

**19** Para que valores de **m**, **n** e **p**, com $\{m, n, p\} \subset \mathbb{C}$, ocorre a igualdade $mx^2 + (2n+3)x - p = 5x + i$?

**20** Determine **m** e **n** reais de modo que: $\frac{m}{x} + \frac{n}{x-1} = \frac{-3x+4}{x(x-1)}$.

**21** Obtenha os valores das constantes reais **a** e **b** para que se tenha: $\frac{a}{x-2} + \frac{bx}{x+2} = \frac{-x^2+3x+2}{x^2-4}$.

**22** Seja o polinômio do 1º grau $p(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são coeficientes reais tais que:

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-x-2}$$

Qual é o valor de $p(i) + p(-i)$?

## Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Vamos revisar, por meio de exemplos, as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios, estudadas no Ensino Fundamental.

**EXEMPLO 7**

Dados os polinômios $f(x) = -7x^3 + 5x^2 - x + 4$ e $g(x) = -2x^2 + 8x - 7$, vamos obter $f(x) + g(x)$:

$$(-7x^3 + 5x^2 - x + 4) + (-2x^2 + 8x - 7) = -7x^3 + 5x^2 - 2x^2 - x + 8x + 4 - 7 =$$
$$= -7x^3 + 3x^2 + 7x - 3$$

Lembre que a soma de dois polinômios **f** e **g** é o polinômio obtido quando adicionamos os coeficientes dos termos semelhantes de **f** e de **g**.

**EXEMPLO 8**

Dados os polinômios $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 3x - 8$, vamos obter $f(x) - g(x)$:

$$(4x^2 - 5x + 6) - (3x - 8) = 4x^2 - 5x + 6 - 3x + 8 = 4x^2 - 8x + 14$$

Note que a diferença entre os polinômios **f** e **g** é o polinômio obtido quando adicionamos **f** ao oposto de **g**, isto é, $f - g = f + (-g)$.

**EXEMPLO 9**

Dados os polinômios $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $g(x) = -2x + 1$, vamos determinar $f(x) \cdot g(x)$:

$$(3x^2 - 5x + 8) \cdot (-2x + 1) = -6x^3 + 3x^2 + 10x^2 - 5x - 16x + 8 =$$
$$= -6x^3 + 13x^2 - 21x + 8$$

Lembre que o produto dos polinômios **f** e **g** corresponde ao polinômio obtido quando multiplicamos cada um dos termos de **f** por todos os termos de **g** e adicionamos os produtos obtidos.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Os polinômios $f(x) = -2x + a$ e $g(x) = x + b$, com **a** e **b** constantes reais, são tais que $f(x) \cdot g(x) = -2x^2 - 3x - 1$. Determine **a** e **b**.

**Solução:**

Temos:

$$f(x) \cdot g(x) = (-2x + a) \cdot (x + b) = -2x^2 - 2bx + ax + ab = -2x^2 + x(-2b + a) + ab$$

Daí:

$$-2x^2 + x \cdot (-2b + a) + ab = -2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow \begin{cases} -2b + a = -3 & (1) \\ ab = -1 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos $a = -\frac{1}{b}$ e, substituindo em (1), obtemos:

$$-2b - \frac{1}{b} = -3 \Rightarrow 2b^2 - 3b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2 \\ \text{ou} \\ b = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Assim, podemos ter $\left(a = -2 \text{ e } b = \frac{1}{2}\right)$ ou $(a = -1 \text{ e } b = 1)$.

**6** Considerando que f(x) é um polinômio de grau 4 e g(x) é um polinômio de grau 3, determine o grau de:

**a)** $f(x) + g(x)$

**b)** $f(x) \cdot g(x)$

**Solução:**

Como g(x) tem grau 3, $x \cdot g(x)$ tem grau 4 e f(x) tem grau 4, então $f(x) + x \cdot g(x)$ tem grau menor ou igual a 4. Por exemplo, $f(x) = x^4$ e $g(x) = -x^3 + 2 \Rightarrow f(x) + x \cdot g(x) = x^4 + x \cdot (-x^3 + 2) = x^4 - x^4 + 2x = 2x$ (grau 1).
Peça aos estudantes que encontrem outros exemplos nos quais o grau de $f(x) + x \cdot g(x)$ é menor ou igual a 4.

**a)** Na adição de polinômios, só podemos adicionar os termos semelhantes, isto é, aqueles cujas potências de **x** têm o mesmo expoente.

Como somente o polinômio f(x) apresenta termo em $x^4$, então o grau de $f(x) + g(x)$ é 4.

**b)** Quando multiplicamos polinômios, devemos lembrar a propriedade de potências: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha + \beta}$. Assim, o grau de $f(x) \cdot g(x)$ é $4 + 3 = 7$.

**PENSE NISTO:**

Neste exercício, qual seria o grau do polinômio $f(x) + x \cdot g(x)$?

## EXERCÍCIOS

**23** Dadas as expressões polinomiais $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^3 - x + 1$ e $h(x) = -x^2 + x - 4$, determine:

**a)** $f(x) + g(x)$
**b)** $g(x) - h(x)$
**c)** $f(x) - g(x) - h(x)$
**d)** $f(x) \cdot h(x)$
**e)** $x \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)$

**24** Sejam $p_1(x) = ax^2 + bx + c$ e $p_2(x) = bx^2 + 4x - 3$. Sabendo que $p_1(x) + p_2(x)$ é o polinômio nulo, determine os valores de **a**, **b** e **c**.

**25** Sejam os polinômios $f(x) = 3x + 2i$ e $g(x) = ix$ e **i** a unidade imaginária em $\mathbb{C}$. Obtenha os polinômios:

**a)** $f(x) - g(x)$
**b)** $i \cdot g(x) + f(x)$
**c)** $g(x) \cdot f(x)$

**26** Determine os valores das constantes reais **a** e **b** que satisfazem:

$$(ax + 5)^2 + (b - 2x)^2 = 13x^2 + 42x + 34$$

**27** Sejam f(x) e g(x) dois polinômios de grau 4. O que se pode afirmar em relação ao grau do polinômio:

**a)** $f(x) \cdot g(x)$?
**b)** $f(x) + g(x)$?
**c)** $f(x) - g(x)$?
**d)** $x^2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)$?

**28** Os polinômios f(x), g(x) e h(x) têm graus 2, 3 e 5, respectivamente. Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes:

**a)** $f(x) + g(x) + h(x)$ é um polinômio de grau 5.
**b)** $f(x) - g(x)$ pode ter grau 2.
**c)** $f(x) \cdot g(x) + h(x)$ pode ser polinômio nulo.
**d)** $f(x) \cdot g(x) + h(x)$ pode ter grau 3.

# Divisão de polinômios

Sejam dois polinômios f(x) e g(x), com $g(x) \neq 0$.

Dividir o dividendo f(x) pelo divisor g(x) é determinar dois outros polinômios, o quociente q(x) e o resto r(x), que verifiquem as seguintes condições:

- $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$
- grau de r(x) < grau de g(x) ou $r(x) = 0$ (isto é, r(x) é o polinômio nulo)

Vamos apresentar o processo mais geral usado para dividir polinômios, baseado na divisão entre números naturais e conhecido como **método da chave**.

Acompanhe, inicialmente, a divisão de 195 por 8:

$$\begin{array}{r|l} 195 & 8 \\ \cline{2-2} -16\phantom{0} & 24 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -32 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Observe que a divisão inteira está encerrada, pois 3 < 8. Note que $195 = 8 \cdot 24 + 3$.

Vamos agora dividir dois polinômios:

$$f(x) = 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \text{ por } g(x) = 2x^2 + x - 3$$

Dispomos o dividendo (f(x)) e o divisor (g(x)), conforme o esquema usado na divisão de números naturais.

- 1º passo: Dividimos o termo de maior grau de f(x) pelo termo de maior grau de g(x):

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

obtendo, assim, o 1º termo do quociente q(x).

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2} & 3x^2 \end{array}$$

- 2º passo: Multiplicamos o quociente obtido ($3x^2$) por g(x) e subtraímos de f(x), isto é, adicionamos f(x) com o oposto do produto obtido. Obtemos um resto parcial.

$$3x^2 \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{6x^4} & - x^3 & + 3x^2 & - x & + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \oplus\ \cancel{-6x^4} & - 3x^3 & + 9x^2 & & & 3x^2 \\ \hline & - 4x^3 & + 12x^2 & - x & + 1 & \leftarrow \text{resto parcial} \end{array}$$

- 3º passo: Repetimos o procedimento anterior com o resto parcial obtido até que o grau do resto se torne menor que o grau do divisor (ou o resto seja o polinômio nulo):

$$\frac{-4x^3}{2x^2} = -2x; \quad -2x \cdot (2x^2 + x - 3) = -4x^3 - 2x^2 + 6x$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{6x^4} & - x^3 & + 3x^2 & - x & + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \oplus\ \cancel{-6x^4} & - 3x^3 & + 9x^2 & & & 3x^2 - 2x \\ \hline & - \cancel{4x^3} & + 12x^2 & - x & + 1 & \\ & + \cancel{4x^3} & + 2x^2 & - 6x & & \\ \hline & & 14x^2 & - 7x & + 1 & \leftarrow \text{novo resto parcial} \end{array}$$

$$\frac{14x^2}{2x^2} = 7; \quad 7 \cdot (2x^2 + x - 3) = 14x^2 + 7x - 21$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{6x^4} & - x^3 & + 3x^2 & - x & + 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \oplus\ \cancel{-6x^4} & - 3x^3 & + 9x^2 & & & 3x^2 - 2x + 7 \\ \hline & - \cancel{4x^3} & + 12x^2 & - x & + 1 & \\ & + \cancel{4x^3} & + 2x^2 & - 6x & & \\ \hline & & \cancel{14x^2} & - 7x & + 1 & \\ & + & - \cancel{14x^2} & - 7x & + 21 & \\ \hline & & & - 14x & + 22 & \leftarrow \text{O grau do resto é menor que o grau do divisor. A divisão está encerrada.} \end{array}$$

Daí: $q(x) = 3x^2 - 2x + 7$ e $r(x) = -14x + 22$.

Observe que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$. De fato:

$$\underbrace{(2x^2 + x - 3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 - 2x + 7)}_{q(x)} + \underbrace{(-14x + 22)}_{r(x)} =$$

$$= 6x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 9x^2 + 6x - 21 - 14x + 22 =$$

$$= 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = f(x)$$

**PENSE NISTO:**

Se **f** é um polinômio de grau **n** e **g** é um polinômio de grau **m**, com $n \geqslant m$, na divisão de **f** por **g**, qual é o grau do quociente obtido?

O grau é $n - m$; basta lembrar que $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

**EXEMPLO 10**

Vamos efetuar a divisão de $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 23x - 10$ por $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$\begin{array}{rrrr|l} \not{3x^3} & -14x^2 & +23x & -10 & x^2 - 4x + 5 \\ \not{-3x^3} & +12x^2 & -15x & & \overline{3x - 2} \\ \hline & \not{-2x^2} & +\not{8x} & -\not{10} & \\ & +\not{2x^2} & -\not{8x} & +\not{10} & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Assim, $q(x) = 3x - 2$ e $r(x) = 0$, ou seja, $r(x)$ é o polinômio nulo.

**OBSERVAÇÃO**

Se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, com $g(x) \neq 0$, é exata, isto é, $r(x) = 0$, dizemos que $f(x)$ é divisível por $g(x)$, ou ainda, $g(x)$ divide $f(x)$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Para que valores de **a** e **b**, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, o polinômio $-2x^3 + ax + b$ é divisível pelo polinômio $-x^2 + 6x - 1$?

**Solução:**

Devemos efetuar a divisão e impor que o resto seja o polinômio nulo. Temos:

$$\begin{array}{rrrrr|l} \not{-2x^3} & + & ax & + & b & -x^2 + 6x - 1 \\ \not{+2x^3} & -12x^2 & +2x & & & \overline{2x + 12} \\ \hline & \not{-12x^2} & +(a+2)x & + & b & \\ & \not{+12x^2} & -72x & + & 12 & \\ \hline & \text{resto} \rightarrow & (a - 70)x & + & (b + 12) & \end{array}$$

O polinômio $(a - 70)x + (b + 12)$ é nulo se todos os seus coeficientes forem iguais a zero, isto é, se:

$$\begin{cases} a - 70 = 0 \Rightarrow a = 70 \\ b + 12 = 0 \Rightarrow b = -12 \end{cases}$$

**8** Dividindo-se o polinômio $-x^3 - 4x^2 + 3$ por um polinômio **p**, obtêm-se $-x - 6$ como quociente e $-12x + 3$ como resto. Determine o polinômio **p**.

**Solução:**

Do enunciado, podemos escrever:

$$\underbrace{(-x^3 - 4x^2 + 3)}_{f(x)} = p(x) \cdot \underbrace{(-x - 6)}_{q(x)} + \underbrace{(-12x + 3)}_{r(x)}$$

Se $f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow f(x) - r(x) = p(x) \cdot q(x) \overset{q(x) \neq 0}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow p(x) = \frac{f(x) - r(x)}{q(x)}$, isto é, $p(x)$ é o quociente obtido na divisão de $-x^3 - 4x^2 + 12x$ por $-x - 6$.

**PENSE NISTO:**

Proponha outro modo de resolver este exercício.

Como o grau de $f(x)$ é 3 e o grau de $q(x)$ é 1, o grau de $p(x)$ deve ser igual a 2 para que a igualdade acima seja válida.

Façamos $p(x) = ax^2 + bx + c$; devemos determinar os valores das constantes **a**, **b** e **c**:

$$-x^3 - 4x^2 + 3 = (ax^2 + bx + c) \cdot (-x - 6) + (-12x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 - 4x^2 + 3 = -ax^3 - 6ax^2 - bx^2 - 6bx - cx - 6c - 12x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 - 4x^2 + 3 = -ax^3 + x^2(-6a - b) + x(-6b - c - 12) + (3 - 6c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = -a \Rightarrow a = 1 \\ -4 = -6a - b; \text{ como } a = 1, \text{ temos: } -4 = -6 - b \Rightarrow b = -2 \\ 0 = -6b - c - 12; \text{ como } b = -2, \text{ temos: } 0 = 12 - c - 12 \Rightarrow c = 0 \\ 3 = 3 - 6c \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $p(x) = 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 0 = x^2 - 2x$

**PENSE NISTO:**

- Se $g(x) = 0$ e $h(x) \neq 0$, qual é o resto e qual é o quociente da divisão de $g(x)$ por $h(x)$?
- E se $g(x)$ tem grau **n** e $h(x)$ tem grau **m** (com $m > n$), qual é o resto e qual é o quociente da divisão de $g(x)$ por $h(x)$?

Quociente: é o polinômio nulo. Resto: $g(x)$, isto é, o polinômio nulo.

Quociente: é o polinômio nulo, isto é, $q(x) = 0$. Resto: $g(x)$

## EXERCÍCIOS

**29** Determine o quociente q(x) e o resto r(x) da divisão de f(x) por g(x) em cada caso:

**a)** $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ e $g(x) = 3x - 1$

**b)** $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$

**c)** $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 4$

**d)** $f(x) = 3x^5 - x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

**e)** $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 3$

**f)** $f(x) = -5x^3 + 4x^2 + 7x - 11$ e $g(x) = x$

**g)** $f(x) = x^2 + 2ix - 3$ e $q(x) = x - i$, em que **i** é a unidade imaginária dos números complexos.

**30** Verifique, em cada caso, se o polinômio f(x) é divisível por g(x), exibindo o quociente dessa divisão:

**a)** $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = x + 2$

**b)** $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$

**c)** $f(x) = 4x^3 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - x + 1$

**d)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$

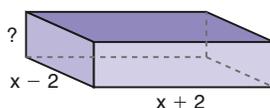
**31** Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $x^2 + 2mx - 5$ seja divisível por $x - 1$.

**32** Dividindo o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por g(x), obtemos o quociente $q(x) = 1 + x$ e o resto $r(x) = x + 1$. Determine g(x).

**33** Dividindo-se um polinômio de grau 7 por um de grau 3, obtêm-se um polinômio quociente (**q**) e um polinômio resto (**r**). O que se pode afirmar em relação ao grau de **q**? E ao grau de **r**?

**34** Determine **m** e **n** reais, de modo que o polinômio $-2x^3 + mx^2 + n$ seja divisível por $x^2 + x + 1$.

**35** Em um retângulo, o comprimento é expresso por $x + 2$, e sua área é expressa por $3x^2 + 5x - 2$. Como se expressa a largura desse retângulo?

**36** Observe as dimensões do paralelepípedo seguinte:

Sabe-se que o volume desse paralelepípedo é expresso por $2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

**a)** Expresse, em função de **x**, a medida da altura do paralelepípedo.

**b)** Existe algum polinômio que represente a medida da diagonal desse sólido? Determine-o, em caso afirmativo.

**c)** Existe algum polinômio que represente a área total desse sólido? Determine-o, em caso afirmativo.

**37** Dividindo um polinômio f(x) pelo polinômio $x^2 + x + 1$, obtemos o quociente $q(x) = x^2 - x$ e o resto $r(x) = -x + 13$. Determine f(x).

## Divisões por x – a

Um caso particular importante na divisão de polinômios é aquele em que o divisor é um polinômio do 1º grau, com coeficiente dominante unitário, isto é, um polinômio do tipo $x - a$ ou $x + a$, sendo $a \in \mathbb{C}$. Esse caso de divisão será frequentemente usado no capítulo seguinte.

Considerando como dividendo um polinômio **f** de grau **n** (com $n \geqslant 1$), temos:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x - a \\ \cline{2-2} \downarrow & \quad q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

O grau de q(x) é $n - 1$.

Como o grau do resto deve ser menor que o grau do divisor, temos:

$$\text{grau } r(x) < 1 \Rightarrow \underbrace{\text{grau } r(x) = 0}_{\substack{r(x) = k \\ (k \in \mathbb{C},\ k \neq 0)}} \text{ ou } \underbrace{r(x) = 0}_{\substack{r(x) \text{ é o} \\ \text{polinômio nulo}}}$$

## Teorema do resto

Vamos efetuar a divisão de $f(x) = 4x^3 + x^2 - 5x + 8$ por $g(x) = x - 2$ usando o método da chave:

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{4x^3} & + x^2 & - 5x & + 8 & x - 2 \\ \cline{5-5} -\cancel{4x^3} & + 8x^2 & & & 4x^2 + 9x + 13 \\ \hline & \cancel{9x^2} & - 5x & + 8 & \\ & -\cancel{9x^2} & + 18x & & \\ \cline{2-3} & & \cancel{13x} & + 8 & \\ & & -\cancel{13x} & + 26 & \\ \cline{3-4} & & & 34 & \end{array}$$

$$\begin{cases} q(x) = 4x^2 + 9x + 13 \\ r(x) = 34 \end{cases}$$

Observe que o resto também pode ser obtido calculando-se o valor numérico do polinômio dividendo (**f**) para $x = 2$:

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 8 \Rightarrow f(2) = 32 + 4 - 10 + 8 \Rightarrow f(2) = 34$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o teorema do resto:

O resto da divisão de um polinômio f(x) por $x - a$ é igual a f(a).

**Demonstração:**

Da divisão de f(x) por $x - a$, podemos escrever:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$$

em que $r(x) = r \neq 0$ é um polinômio constante (pois r(x) tem grau zero) ou r(x) é o polinômio nulo.

Calculando os valores desses polinômios para $x = a$, temos:

$$f(a) = \underbrace{(a - a) \cdot q(a)}_{= 0} + r, \text{ isto é, } r = f(a).$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**9** Qual é o resto da divisão de $p(x) = 3x^2 - 17x + 15$ por $x - 2$? E por $x + 1$?

**Solução:**

Não é necessário efetuar a divisão para sabermos o valor do resto.

Então, vejamos:

- Na divisão de p(x) por $x - 2$ temos:
  A raiz do divisor é: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
  Pelo teorema do resto, sabemos que:
  $$r = p(2) = 3 \cdot 2^2 - 17 \cdot 2 + 15 = 12 - 34 + 15 = -7$$
- Na divisão de p(x) por $x + 1$, o resto é $r = p(-1)$, isto é, $r = 3 \cdot (-1)^2 - 17 \cdot (-1) + 15 = 35$.

**10** Sejam 5 e 2, respectivamente, os restos da divisão de um polinômio **f** por $x - 3$ e por $x + 1$. Qual é o resto da divisão de **f** por $(x - 3) \cdot (x + 1)$?

**Solução:**

Pelo teorema do resto, temos:

$$f(3) = 5 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 2 \quad (2)$$

Quando dividimos **f** por $g(x) = (x - 3) \cdot (x + 1) = x^2 - 2x - 3$, temos grau $r \leqslant 1$ (pois grau $r <$ grau g e grau g $= 2$). Assim, escrevemos $r(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais.

Devemos determinar **a** e **b**. Temos, $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$f(x) = \underbrace{(x + 1) \cdot (x - 3)}_{g(x)} \cdot q(x) + \underbrace{ax + b}_{r(x)}$$

Calculando o valor numérico desse polinômio em $x = 3$ e em $x = -1$, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \underbrace{(3 + 1) \cdot (3 - 3) \cdot q(3)}_{= 0} + a \cdot 3 + b \overset{(1)}{\Rightarrow} 3a + b = 5 \\ f(-1) = \underbrace{(-1 + 1) \cdot (-1 - 3) \cdot q(-1)}_{= 0} + a(-1) + b \overset{(2)}{\Rightarrow} -a + b = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{11}{4}$. Dessa forma, o resto é $r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

Uma consequência importante do teorema do resto é o **teorema de D'Alembert**, cujo enunciado é:

Um polinômio **f** é divisível por $x - a$ se, e somente se, **a** for raiz de **f**.

**Demonstração:**

Há duas implicações a provar:

1ª) **f** é divisível por $x - a \Rightarrow$ **a** é raiz de **f**.

Se **f** é divisível por $x - a$, temos $r = 0$ e, pelo teorema do resto, $r = f(a) = 0$, do que concluímos que **a** é raiz de **f**.

2ª) **a** é raiz de **f** $\Rightarrow$ **f** é divisível por $x - a$.

Como **a** é raiz de **f**, temos que $f(a) = 0$; pelo teorema do resto, o resto **r** da divisão de **f** por $x - a$ é igual a $f(a)$. Assim, $r = f(a) = 0$, o que mostra que **f** é divisível por $x - a$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**11** Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = -2x^3 + x^2 + mx + 5$ seja divisível por $x - 2$.

**Solução:**

Pelo teorema de D'Alembert, $x = 2$ deve ser raiz de **f**, isto é, $f(2) = 0$:

$$-2 \cdot 2^3 + 2^2 + m \cdot 2 + 5 = 0 \Rightarrow 2m - 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

## EXERCÍCIOS

**38** Aplicando o teorema do resto, determine o resto da divisão de f(x) por g(x) em cada caso:

**a)** $f(x) = 3x^2 - x + 4$ e $g(x) = x - 2$

**b)** $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x + 2$

**c)** $f(x) = (4 - x)^{10} + 3x$ e $g(x) = x - 4$

**d)** $f(x) = 2x^5 + x^3 - x^2 + 1$ e $g(x) = x$

**e)** $f(x) = x^{19} + x^{11} + 7x^4 + 3$ e $g(x) = x - 1$

**f)** $f(x) = 4x^2 - x - 1$ e $g(x) = x - 2i$, em que **i** é a unidade imaginária em $\mathbb{C}$.

**39** Em cada caso, p(x) é divisível por q(x). Obtenha o valor real de **m**:

**a)** $p(x) = -3x^2 + 4x + m$ e $q(x) = x - 2$

**b)** $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + mx + 3$ e $q(x) = x + 3$

**c)** $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + mx - 1$ e $q(x) = x - 1$

**40** Qual é o resto da divisão de $(x^8 + 1) \cdot (3 - x^{29} - 2x^{17})$ por $x - 1$?

**41** Sabendo que o polinômio $2x^2 + mx + n$, com $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, é divisível por $x - 1$ e que, quando dividido por $x + 2$, deixa resto igual a 6, determine **m** e **n**.

**42** Um polinômio p(x), dividido por $x + 2$, dá resto 3 e, dividido por $x - 5$, dá resto $-2$. Qual é o resto da divisão de p(x) por $x^2 - 3x - 10$?

**43** Um polinômio p(x) é tal que $p(1) = 4$. O quociente da divisão de p(x) por $(x - 1)$ é dividido por $(x - 2)$ e obtém-se resto 3. Determine o resto da divisão de p(x) por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

## Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Sejam $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0 \neq 0$, um polinômio de grau **n**, e $g(x) = x - a$.

Quando dividimos f(x) por g(x), obtemos, como quociente, um polinômio **q** de grau $n - 1$, dado por $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}$.

Vamos determinar os coeficientes $\mathbf{q_0}$, $\mathbf{q_1}$, ..., $\mathbf{q_{n-2}}$, $\mathbf{q_{n-1}}$ de **q**, bem como o resto **r** dessa divisão.

Como $f = g \cdot q + r$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{C}$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - a) \cdot (q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$$

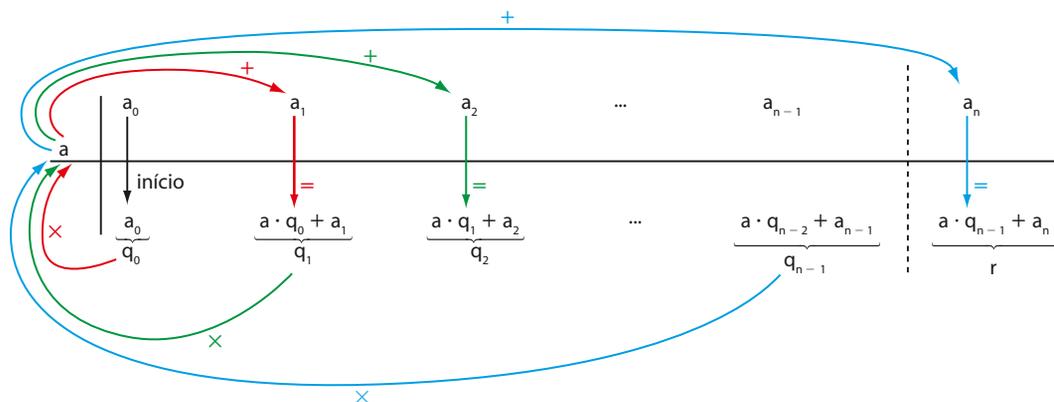
Multiplicando os polinômios e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= q_0x^n + (q_1 - aq_0) \cdot x^{n-1} + (q_2 - aq_1) \cdot x^{n-2} + \ldots + (q_{n-1} - a \cdot q_{n-2}) \cdot x + (r - a \cdot q_{n-1})$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

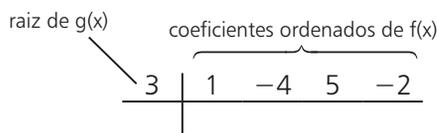
- $q_0 = a_0$
- $q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = a_1 + aq_0$
- $q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_2 = a_2 + aq_1$

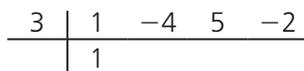
  $\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$
- $q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = a_{n-1} + aq_{n-2}$
- $r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n$

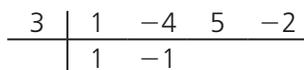
Observe, a seguir, um método mais rápido e simples, chamado dispositivo prático de Briot-Ruffini, para a determinação dos coeficientes $\mathbf{q_0}$, $\mathbf{q_1}$, ..., $\mathbf{q_{n-1}}$ e do resto **r** da divisão:

Vamos agora acompanhar a “montagem” do dispositivo usando um exemplo numérico.

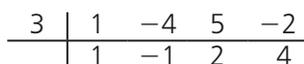
Seja a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(x) = x - 3$.

- 1º passo: Calculamos a raiz do divisor g(x) e, ao seu lado, colocamos os coeficientes ordenados do dividendo f(x), segundo potências de expoentes decrescentes de **x**:

  Raiz de g(x): $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

- 2º passo: Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo (1) e o multiplicamos pela raiz do divisor ($1 \cdot 3 = 3$).

| 3 | 1 | −4 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |

- 3º passo: Adicionamos o produto obtido (3) ao coeficiente seguinte (−4). A soma ($3 + (-4) = -1$) é colocada abaixo desse coeficiente.

| 3 | 1 | −4 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | | |

- 4º passo: Com a soma obtida (−1), repetimos as operações (multiplicamos pela raiz e adicionamos o coeficiente seguinte), e assim por diante.

| 3 | 1 | −4 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | 2 | 4 |

O último dos números obtidos no dispositivo ou algoritmo de Briot-Ruffini é o resto da divisão. Assim, $r(x) = 4$.

Os demais números obtidos nesse algoritmo correspondem aos coeficientes ordenados (segundo potências de expoentes decrescentes de **x**) do quociente da divisão. Assim:

$$q(x) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2 = x^2 - x + 2$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**12** Obtenha o quociente **q** e o resto **r** da divisão de $-2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ por $x + 2$.

**Solução:**

Temos:

| −2 | −2 | 1 | −5 | −1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | −2 | 5 | −15 | 29 | −57 |

$q = -2x^3 + 5x^2 - 15x + 29$ e $r = -57$

**13** Faça a divisão de $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ por $x - 3$.

**Solução:**

Convém, inicialmente, notar que $f(x) = 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1$.

Temos:

| 3 | 2 | 0 | −5 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | 13 | 40 |

O quociente **q** é $2x^2 + 6x + 13$, e o resto **r** é 40.

**14** Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $2x^3 - 4x^2 - 5x + a$ seja divisível por $x - 3$.

**Solução:**

Construímos o dispositivo de Briot-Ruffini:

| 3 | 2 | −4 | −5 | a |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | 1 | a + 3 |

Devemos ter resto igual a 0, isto é:

$$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

## EXERCÍCIOS

**44** Em cada caso, obtenha o quociente e o resto da divisão de f(x) por g(x), utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

**a)** $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x - 3$

**b)** $f(x) = (3x + 2)^2$ e $g(x) = x + 2$

**c)** $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ e $g(x) = x + 1$

**d)** $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x$

**45** Dividindo-se $x^3 - 2x^2 + mx + 4$ (com $m \in \mathbb{R}$) por $x + 2$, obtém-se o quociente $x^2 - 4x + 5$. Qual é o resto dessa divisão?

**46** O polinômio $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 2x + m$ (com $m \in \mathbb{R}$) é divisível por $x - 2$.

**a)** Qual é o valor de **m**?

**b)** Qual é o quociente e o resto da divisão de f(x) por $x + 3$?

**47** Qual é o quociente e o resto da divisão de $(x^4 + 1)^2$ por $x + 1$?

**48** O polinômio $f(x) = 2x^3 + mx + n$, em que $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, é divisível por $x + 1$; dividindo f(x) por $x + \frac{1}{2}$, obtemos resto igual a 2. Determine o valor de $m + n$.

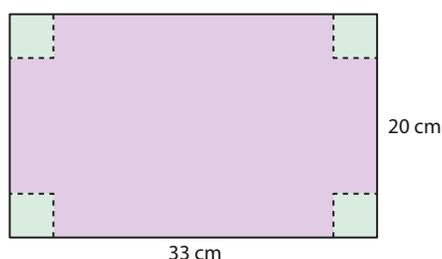
**49** Determine o valor da constante real **k** a fim de que a divisão de $2x^3 - 3x^2 + x + 6k$ por $x - 3$ seja exata.

## DESAFIO

O polinômio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 15$ é divisível por $x^2 - 2x + 5$.
Para que valores reais de **x** tem-se $p(x) \geqslant 0$?

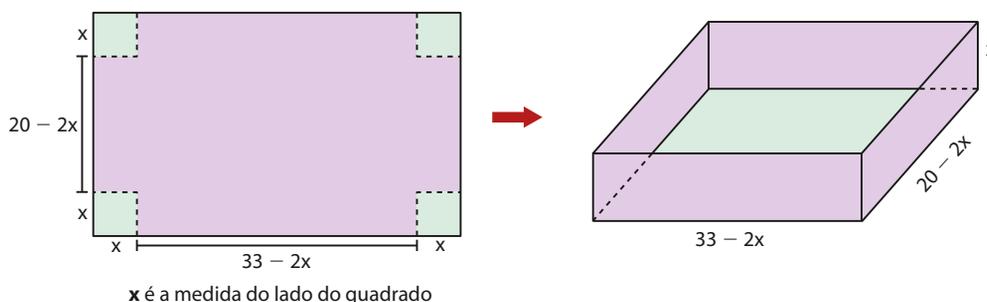
# Equações algébricas

## Introdução

Eduardo construiu uma caixa em forma de bloco retangular, sem tampa, a partir de uma folha retangular de cartolina que media 33 cm por 20 cm, recortando um quadrado em cada vértice do retângulo, conforme mostra a figura.

Pronta a caixa, seu colega Toninho perguntou qual era a medida do lado do quadrado recortado. Eduardo respondeu: "Vou lhe dar uma pista: a caixa fica completamente cheia se você despejar um saco de 1,05 litro (1 050 $cm^3$) de areia".

Como Toninho deverá proceder para descobrir a medida do lado do quadrado?

Inicialmente, ele deverá identificar as dimensões da caixa:

**x** é a medida do lado do quadrado

O volume de um bloco retangular (paralelepípedo retângulo) é dado por:

$$V = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura}) \cdot (\text{altura})$$

Logo,

$$V = (33 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 106x^2 + 660x$$

Assim, a condição do problema é:

$$4x^3 - 106x^2 + 660x = 1\,050$$

e o valor de **x** procurado é uma solução da equação:

$$2x^3 - 53x^2 + 330x - 525 = 0$$

Essa equação é um exemplo de **equação algébrica** ou **polinomial**, objeto de estudo deste capítulo.

## Definição

**Equação polinomial** ou **algébrica** é toda equação redutível à forma p(x) = 0, em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0,$$

é um polinômio de grau **n**, sendo $n \geq 1$, com coeficientes em $\mathbb{C}$, e cuja incógnita **x** pode assumir um valor qualquer em $\mathbb{C}$.

**EXEMPLO 1**

São exemplos de equações polinomiais:

- $4x + 5 = 0$
- $3x^2 + ix - 1 = 0$
- $x^4 - x^2 + x + 3 = 0$
- $x^2 - 2x + 8 = 0$
- $x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$
- $x^6 - 2i = 0$

## Raiz

Seja a equação polinomial p(x) = 0, em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Um número complexo **r** é raiz dessa equação se, substituindo **x** por **r** na equação e efetuando os cálculos, obtemos:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Em outras palavras, **r** é raiz de uma equação p(x) = 0 se **r** for raiz do polinômio p(x).

**EXEMPLO 2**

O número 4 é uma raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$, pois:

$$4^3 - 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 - 8 = 64 - 96 + 40 - 8 = 0$$

Já o número complexo **i** não é raiz dessa equação, pois:

$$i^3 - 6i^2 + 10i - 8 = -i + 6 + 10i - 8 = -2 + 9i \neq 0$$

## Conjunto solução

Conjunto solução de uma equação polinomial é o conjunto de todas as raízes dessa equação, considerando $\mathbb{C}$ o conjunto universo. Neste capítulo, vamos considerar $U = \mathbb{C}$ nos exemplos e exercícios.

Vejamos:

- Se o grau do polinômio é 1, para encontrar o conjunto solução da equação $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$) basta fazer: $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ e $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Se o grau do polinômio é 2, é preciso resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$). Usando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, temos:
  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$
- Se o grau do polinômio é 3 ou 4, é possível determinar as raízes da equação por meio de fórmulas que envolvem as quatro operações fundamentais e a extração de raízes. No entanto, essas fórmulas não são estudadas nos cursos de Ensino Médio.
- Se o grau do polinômio é maior ou igual a 5, não existe uma fórmula resolutiva (envolvendo as quatro operações e a extração de raízes) que se aplique a qualquer equação.

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### A resolução de equações

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Estátua de Al-Khowarizmi em Khiva, no Uzbequistão.

Os primeiros registros encontrados sobre a resolução de algumas equações do 2º grau datam de, aproximadamente, 1700 a.C. e pertencem a civilizações antigas, como a dos sumérios, egípcios e babilônios.

Os gregos usaram a Geometria para aperfeiçoar as técnicas de resolução das equações do 2º grau.

A civilização islâmica também deixou um legado importante: a obra *Al-jabr W'al-Mugabala*, do matemático e astrônomo Al-Khowarizmi, datada do século VIII, inclui, entre outros, uma exposição completa da resolução das equações do 1º e 2º graus. A palavra "álgebra" deriva desse nome.

No século XVI, com o Renascimento italiano, ocorreu um progresso significativo: a resolução de equações do 3º grau e, como decorrência, de 4º grau. A história da resolução dessas equações envolve segredos, batalhas, desafios e traições, culminando, em 1545, na publicação de *Ars Magna*, de Girolamo Cardano. Essa obra contém o processo de resolução e a devida demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 3º grau, além da explicação de como resolver uma equação do 4º grau, transformando-a em outra do 3º grau.

Durante dois séculos e meio tentou-se encontrar uma fórmula resolutiva para a equação do 5º grau. Somente em 1824 o norueguês Niels Abel (1802-1829) provou, de maneira consistente, a impossibilidade de resolução dessa equação por meio das quatro operações aritméticas e de radiciações.

Poucos anos depois, o francês Évariste Galois (1811-1832) — cujos trabalhos deram início à chamada Álgebra Moderna — generalizou as condições de resolubilidade de uma equação algébrica qualquer.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

## Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

O teorema seguinte, enunciado e provado por Carl Gauss (1777-1855), constitui um elemento central para o estudo das equações algébricas.

Todo polinômio de grau **n**, $n \geqslant 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema exige conhecimentos de Matemática do Ensino Superior e que, portanto, não são abordados no Ensino Médio.

# Teorema da decomposição

Seja p(x) um polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, dado por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Então, p(x) pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$$

em que $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, ..., $\mathbf{r_n}$ são as raízes de p(x) e $\mathbf{a_n}$ é o coeficiente dominante de p(x).

**Demonstração:**

Como p(x) é um polinômio de grau $n \geq 1$, o TFA garante-nos que p(x) tem ao menos uma raiz complexa $\mathbf{r_1}$. Assim, $p(r_1) = 0$ e, pelo teorema de D'Alembert, p(x) é divisível por $x - r_1$. Então:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad (1)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante $\mathbf{a_n}$ (pois o divisor $x - r_1$ tem coeficiente dominante unitário).

Temos:

- Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1 - 1 = 0$, ou seja, $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em (1), temos $p(x) = a_n(x - r_1)$, e o teorema fica demonstrado.
- Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Assim, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$, isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa $\mathbf{r_2}$. Assim, $q_1(r_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (2)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante $\mathbf{a_n}$. Substituindo (2) em (1), resulta:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad (3)$$

- Se $n = 2$, $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. De (3), segue que $p(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2)$, e o teorema fica demonstrado.
- Aplicando sucessivamente **n** vezes o TFA, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x)$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$.

Assim:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$$

**OBSERVAÇÕES**

- Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau, $x - r_1$, $x - r_2$, ..., $x - r_n$, é um fator de p(x).
- Pode-se mostrar que, com exceção da ordem dos fatores da multiplicação, a decomposição de p(x) em termos de suas raízes é única.
- p(x) é divisível por cada um de seus fatores, individualmente, e também por qualquer produto desses fatores.

## Consequência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau **n**, $n \geq 1$, admite exatamente **n** raízes complexas.

Vejamos alguns exemplos:

- O polinômio do 1º grau dado por $p(x) = 4x - 8$ admite 2 como raiz; podemos escrever $p(x) = 4 \cdot (x - 2)$.
- O polinômio do 2º grau dado por $p(x) = x^2 - x - 2$ admite como raízes $-1$ e 2. Podemos decompor p(x) fazendo: $p(x) = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$.

$(x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i) =$
$= (x - 2)^2 - i^2 =$
$= x^2 - 4x + 4 - (-1) =$
$= x^2 - 4x + 5$

Professor, é importante destacar essa multiplicação, pois aparecerão várias outras semelhantes no decorrer do capítulo.

- O polinômio do 2º grau $p(x) = x^2 - 4x + 5$ admite como raízes os números $2 + i$ e $2 - i$; sua decomposição em fatores do 1º grau é: $p(x) = 1 \cdot (x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i)$. *
- O polinômio do 3º grau $x^3 + 4x$ pode ser escrito como $x \cdot (x^2 + 4) = x(x - 2i) \cdot (x + 2i)$; suas raízes são, portanto, 0, $2i$ e $-2i$.
- As três raízes do polinômio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ são 2, $-3$ e 5. Pelo teorema da decomposição, é possível escrever $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$.

**PENSE NISTO:**

Faça a multiplicação indicada em *, usando produtos notáveis, para chegar a $x^2 - 4x + 5$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4.

**Solução:**

Seja $p(x)$ o polinômio dado e 4, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ suas raízes. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 4) \cdot \underbrace{(x - r_2) \cdot (x - r_3)}_{q(x)}$$

isto é:

$$p(x) = (x - 4) \cdot q(x)$$

Assim, $p(x)$ é divisível por $(x - 4)$ e o quociente dessa divisão é $q(x)$. Usando Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -8 & 29 & -52 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -4 \quad 13}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & 0 \end{array}$$

Desse modo, as demais raízes são obtidas de $q(x) = 0$, isto é, $x^2 - 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = 2 - 3i$ ou $x = 2 + 3i$ e o conjunto solução da equação $p(x) = 0$ é:

$$S = \{4,\ 2 - 3i,\ 2 + 3i\}$$

**2** Escrever uma equação algébrica de 3º grau cujas raízes sejam 1, $-2$ e 5.

**Solução:**

Seja $p(x)$ o polinômio de grau 3 procurado. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$$p(x) = a_n \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \quad *$$

em que $\mathbf{a_n}$ é o coeficiente dominante de $p(x)$. Assim:

$$p(x) = a_n \cdot (x^2 + x - 2) \cdot (x - 5) \Rightarrow p(x) = a_n \cdot (x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$$

Escolhendo, por exemplo, $a_n = 1$, segue a equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$.

E se tivéssemos escolhido outro valor para $\mathbf{a_n}$?

Caso tivéssemos escolhido $a_n = 2$, teríamos em *:

$$p(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$$

e a equação obtida é $2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$, que equivale a $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$, e suas raízes também são: 1, $-2$ e 5.

De fato, $\forall a_n \neq 0$ a equação $a_n \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) = 0$ apresenta como conjunto solução $S = \{1, -2, 5\}$.

**3** Duas das raízes da equação $2x^4 + 5x^3 - 35x^2 - 80x + 48 = 0$ são $-3$ e $-4$. Quais são as outras duas raízes?

**Solução:**

Seja p(x) o polinômio dado e $-3$, $-4$, $\mathbf{r_3}$ e $\mathbf{r_4}$ suas raízes.

Podemos escrever o polinômio da seguinte forma:

$$p(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4)$$

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x + 4) \cdot \underbrace{2 \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)}, \text{ isto é, } p(x) = (x^2 + 7x + 12) \cdot q(x)$$

Efetuando a divisão de p(x) por $x^2 + 7x + 12$, determinamos o polinômio q(x):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & +\ 5x^3 & -\ 35x^2 & -\ 80x & +\ 48 & x^2 + 7x + 12 \\
\cancel{-2x^4} & -\ 14x^3 & -\ 24x^2 & & & \underbrace{2x^2 - 9x + 4}_{q(x)} \\
\hline
 & -\ \cancel{9x^3} & -\ 59x^2 & -\ 80x & +\ 48 & \\
 & +\ \cancel{9x^3} & +\ 63x^2 & +\ 108x & & \\
 & & \cancel{4x^2} & +\ \cancel{28x} & +\ \cancel{48} & \\
 & & \cancel{-4x^2} & -\ \cancel{28x} & -\ \cancel{48} & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

As demais raízes vêm de $q(x) = 0$, ou seja, $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = \frac{1}{2}$.

**4** Quais são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$?

**Solução:**

Às vezes, é possível fatorar o polinômio para encontrar suas raízes:

$$x^3 - 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

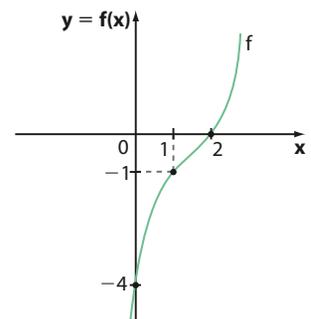
Assim, as raízes da equação são 0, $1 + i$ e $1 - i$.

A construção dos gráficos e o estudo das variações das funções polinomiais de grau maior que 2 não fazem parte dos objetivos desta coleção. Entretanto, a interpretação de um gráfico de uma função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode trazer informações importantes em relação ao polinômio. Acompanhe o exemplo 3:

**EXEMPLO 3**

Observe, ao lado, parte do gráfico da função **f**, crescente em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais.

O gráfico de **f** intersecta o eixo **x** uma única vez, no ponto (2, 0). Isso significa que $x = 2$ é a única raiz real do polinômio. (Note que, por hipótese, **f** é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.)

A interseção do gráfico de **f** com o eixo **y** em $(0, -4)$ fornece o valor do coeficiente independente **c** do polinômio, pois, se $x = 0$, $f(0) = -4$, isto é, $0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -4 \Rightarrow c = -4$.

Além disso, temos:

- $f(1) = -1 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4 = -1 \Rightarrow a + b = 2$
- $f(2) = 0$ (2 é raiz) $\Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a = -4 \text{ e } b = 6$$

Desse modo, a lei que define **f** é $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

Para obter as demais raízes, dividimos o polinômio $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ por $x - 2$:

| 2 | 1 | −4 | 6 | −4 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | 2 | 0 |

Daí:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 - i \text{ ou } x = 1 + i$$

## EXERCÍCIOS

**1** Encontre as raízes de cada polinômio abaixo e, em seguida, escreva-o em sua forma fatorada:

**a)** $x^2 - 6x + 25$

**b)** $2x^2 - 5x + 2$

**c)** $2x^3 - 4x$

**2** Represente o polinômio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ em fatores do 1º grau, sabendo que suas raízes são 5, −3 e 2.

**3** Sabendo que $2 + i$, $2 - i$ e $-3$ são as raízes da equação $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$, fatore o polinômio dado em outros dois polinômios com coeficientes reais, um com grau 2 e outro com grau 1.

**4** Escreva uma equação do 2º grau cujas raízes sejam:

**a)** $1 - 2i$ e $1 + 2i$

**b)** $-3$ e $5$

**c)** $0$ e $-\frac{1}{2}$

**5** Escreva uma equação do 3º grau cujas raízes sejam:

**a)** $3 - i$, $3 + i$ e $-2$

**b)** $0$, $2$ e $-5$

**6** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 + 3x^2 - 46x + 72 = 0$, sabendo que 2 é uma de suas raízes.

**7** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $2x^3 + 5x^2 - 2x - 15 = 0$, sabendo que $\frac{3}{2}$ é uma de suas raízes.

**8** Seja a equação $x^3 + 2x^2 + mx - 6 = 0$, em que **m** é uma constante real. Sabendo que $-3$ é raiz dessa equação, determine:

**a)** o valor de **m**;

**b)** as demais raízes da equação.

**9** O polinômio $p = 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ é divisível por $x^2 - x - 6$. Qual é o número de raízes complexas não reais que **p** possui?

**10** O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem coeficiente dominante igual a 1 e suas raízes são 7, −5 e −3. Qual é o valor de $a + b + c + d$?

**11** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações, usando fatoração:

**a)** $x^3 + 2x^2 - 24x = 0$

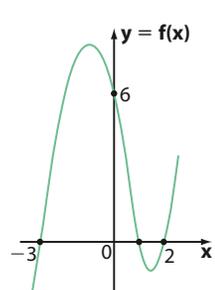
**b)** $x^6 - 2x^5 - 3x^4 = 0$

**c)** $2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$

**d)** $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

**12** Uma das raízes da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = 0$ é igual a 1. Quais são as outras três raízes dessa equação?

**13** Os números reais −1 e 1 são raízes da equação $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10 = 0$. Quais são as outras duas raízes?

**14** Ao lado, está representada parte do gráfico da função polinomial **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** coeficientes reais.

**a)** Qual é o número de raízes não reais de **f**?

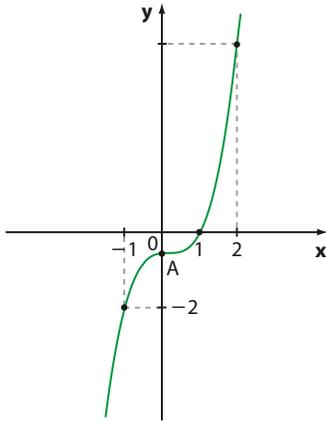
**b)** Obtenha os valores de **a**, **b** e **c**.

**c)** Resolva a equação $f(x) = 0$.

**15** Parte do gráfico da função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + px + q$, em que **p** e **q** são coeficientes reais, é mostrada abaixo:

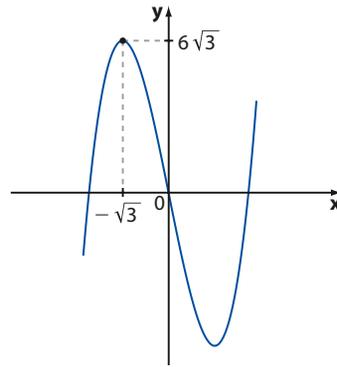
Determine:

**a)** os valores de **p** e **q**;

**b)** f(2);

**c)** a ordenada do ponto **A**;

**d)** as raízes da equação $f(x) = 0$.

**16** A figura a seguir mostra parte do gráfico da função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

Sabendo que **f** possui 2 raízes reais opostas, determine:

**a)** o número de raízes reais de **f**;

**b)** as raízes da equação $f(x) = 0$;

**c)** os valores de **p**, **q** e **r**.

**17** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 70x + 50 = 0$$

sabendo que duas de suas raízes são $1 + 3i$ e $1 - 3i$.

**18** Sejam os polinômios:

$p(x) = x^2 - 2x - 2$ e $q(x) = [p(x)]^2 + 4 \cdot p(x) - 5$

**a)** Fatore o polinômio $y^2 + 4y - 5$.

**b)** Determine o grau de q(x).

**c)** Determine todas as raízes da equação $q(x) = 0$.

## Multiplicidade de uma raiz

Ao resolver a equação do 2º grau $x^2 - 12x + 36 = 0$, encontramos duas raízes iguais a 6.

O polinômio $x^2 - 12x + 36$ pode ser fatorado em $(x - 6) \cdot (x - 6) = (x - 6)^2$. Assim, dizemos que $x = 6$ é raiz dupla ou raiz de multiplicidade 2 da equação.

Suponha que $(x + 4)^3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 5)$ seja a forma fatorada de um polinômio **p**. Para resolver a equação $p(x) = 0$, fazemos:

$$(x + 4) \cdot (x + 4) \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 5) = 0$$

Daí, temos:

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ (três vezes). Assim, −4 é raiz tripla (ou de multiplicidade 3).
ou
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (duas vezes). Assim, 1 é raiz dupla (ou de multiplicidade 2).
ou
$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ (uma vez). Assim, −5 é raiz simples (ou de multiplicidade 1).

Assim, observando que p(x) tem grau 6, as seis raízes da equação $p(x) = 0$ são −4, −4, −4, 1, 1, −5 e seu conjunto solução é: $S = \{-4, 1, -5\}$.

## Definição

O número complexo **r** é uma raiz de multiplicidade **m** ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$) da equação $p(x) = 0$ se a forma fatorada de $p(x)$ é:

$$p(x) = \underbrace{(x - r) \cdot (x - r) \cdot \ldots \cdot (x - r)}_{\textbf{m} \text{ fatores}} \cdot q(x)$$

isto é:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x), \text{ com } q(r) \neq 0$$

**OBSERVAÇÕES**

Se $p(x) = (x - r)^m \cdot q(x)$, com $q(r) \neq 0$, temos:

- $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$.
- A condição $q(r) \neq 0$ significa que **r** não é raiz de $q(x)$; desse modo, $p(x)$ não é divisível por $(x - r)^{m+1}$.
- Se $m = 1$, dizemos que **r** é raiz simples (ou de multiplicidade 1); se $m = 2$, **r** é chamada raiz dupla (ou de multiplicidade 2); se $m = 3$, **r** é raiz tripla (ou de multiplicidade 3), e assim por diante.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Escreva uma equação polinomial cujas raízes sejam 2, −3 e 4, com multiplicidades 2, 1 e 1, respectivamente.

**Solução:**

A forma fatorada do polinômio é: $a_n \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$, em que $a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, isto é:

$$a_n \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 - x - 12) = a_n \cdot (x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 44x - 48)$$

Escolhendo $a_n = 1$, por exemplo, segue a equação:

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 44x - 48 = 0$$

**6** Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0$, sabendo que −3 é raiz dupla dessa equação.

**Solução:**

Chamando de $p(x)$ o polinômio dado e de $\mathbf{r_3}$ e $\mathbf{r_4}$ as raízes desconhecidas, temos:

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)} \Rightarrow p(x) = (x + 3)^2 \cdot q(x)$$

Assim, $p(x)$ é divisível por $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Efetuando a divisão de $p(x)$ por $x^2 + 6x + 9$ pelo método da chave, encontramos $q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & + 4x^3 & + 2x^2 & + 12x & + 45 & x^2 + 6x + 9 \\
-\cancel{x^4} & - 6x^3 & - 9x^2 & & & \underbrace{x^2 - 2x + 5}_{q(x)} \\
\hline
& \cancel{-2x^3} & - 7x^2 & + 12x & + 45 & \\
& \cancel{+2x^3} & + 12x^2 & + 18x & & \\
\hline
& & \cancel{5x^2} & + \cancel{30x} & + \cancel{45} & \\
& & - \cancel{5x^2} & - \cancel{30x} & - \cancel{45} & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}$$

Resolvendo a equação $q(x) = 0$, encontramos as outras raízes. Temos:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 - 2i \text{ ou } x = 1 + 2i$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**19** Seja a equação: $x^3 \cdot (x+2)^4 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+6) = 0$, determine:

**a)** as raízes e suas respectivas multiplicidades;

**b)** seu grau;

**c)** seu conjunto solução.

**20** As raízes de uma equação polinomial são 4, 2 e 0, com multiplicidades 2, 1 e 1, respectivamente.

**a)** Qual é o grau do polinômio?

**b)** Escreva uma equação polinomial que satisfaça tais condições.

**21** Em cada caso, escreva uma equação algébrica que satisfaça as condições:

**a)** $-3$ é raiz dupla e 5 é raiz simples.

**b)** 2, $3i$ e $-3i$ são raízes com multiplicidade 2, 1 e 1, respectivamente.

**22** Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 51x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

**23** Seja a equação $4x^3 - 19x^2 + 28x + m = 0$. Determine:

**a)** **m**, sabendo que 2 é raiz dupla dessa equação;

**b)** a outra raiz.

**24** Resolva a equação $x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 4x^2 = 0$, sabendo que $-1$ é raiz dupla.

**25** Qual é a multiplicidade da raiz 4 na equação:

$$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 32x - 128 = 0?$$

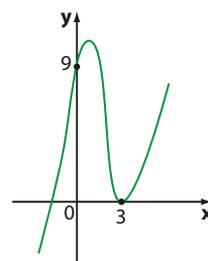
Qual é a outra raiz?

**26** A equação $x^3 - 75x + 250 = 0$ apresenta **m** (com $m \in \mathbb{R}$) como raiz dupla e $-2m$ como raiz simples. Determine o seu conjunto solução.

**27** O polinômio $4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$ é divisível por $x^2 + 4x + 4$. Quais são as raízes desse polinômio e as respectivas multiplicidades?

**28** Parte do gráfico da função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

com **a**, **b** e **c** coeficientes reais, está representada a seguir:

Sabendo que $p(x)$ é divisível por $(x-3)^2$, determine:

**a)** os valores de **a**, **b** e **c**;

**b)** as raízes da equação $p(x) = 0$, com as respectivas multiplicidades.

## Relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes)

Algumas relações entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes, conhecidas como **relações de Girard** (Albert Girard, matemático francês, 1590-1633), constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio quando conhecemos alguma informação sobre tais raízes.

Vamos obter essas relações para as equações do 2º, 3º e 4º graus e, a partir daí, generalizar para uma equação de grau **n**.

### Equação do 2º grau

Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Pelo teorema da decomposição, sabemos que:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1 \cdot r_2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Da igualdade de polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

**PENSE NISTO:**

Usando as relações de Girard, escreva uma equação algébrica (de grau 2) cujas raízes sejam 4 e −7.

Como a soma das raízes é $4 + (-7) = -3$ e o produto é $4 \cdot (-7) = -28$, temos: $-\frac{b}{a} = -3$ e $\frac{c}{a} = -28$. Escolhendo, por exemplo, $a = 1$, obtemos $b = 3$ e $c = -28$ e uma possível equação é $x^2 + 3x - 28 = 0$. Em geral, sendo **S** e **P** a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau, uma possível equação é $x^2 - S \cdot x + P = 0$.

**EXEMPLO 4**

Para obter a soma e o produto das raízes da equação $5x^2 - x - 3 = 0$, não é necessário resolvê-la. Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ são as suas raízes, usando as relações de Girard, temos:

Soma: $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{(-1)}{5} = \dfrac{1}{5}$

Produto: $r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$

(Observe que $a = 5$, $b = -1$ e $c = -3$.)

## Equação do 3º grau

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2) \cdot (x - r_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Da igualdade dos polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

**EXEMPLO 5**

Vamos escrever as três relações de Girard para a equação $2x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$, considerando **r**, **s** e **t** suas raízes.

Observe que os termos desse polinômio estão ordenados do maior ao menor expoente de **x** e, desse modo, seus coeficientes são identificados por: $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$ e $d = 3$.

Temos:

$$\begin{cases} r + s + t = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-4)}{2} = 2 \\ r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \\ r \cdot s \cdot t = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

## Equação do 4º grau

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ e $\mathbf{r_4}$ as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (com $a \neq 0$).

A decomposição desse polinômio em fatores do 1º grau é:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot [(x^2 - x(r_1 + r_2) + r_1r_2) \cdot (x^2 - x(r_3 + r_4) + r_3r_4)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \cdot [x^4 - x^3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) +$$

$$+ x^2 \cdot (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) - x \cdot (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) + r_1r_2r_3r_4]$$

Dividindo os dois membros por **a** (com $a \neq 0$), temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = x^4 - x^3 \cdot (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) +$$

$$+ x^2 \cdot (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) - x \cdot (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) + r_1r_2r_3r_4$$

Da igualdade dos polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\dfrac{d}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

**EXEMPLO 6**

Sendo **r**, **s**, **t** e **u** as raízes da equação $x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$, vamos escrever as quatro relações de Girard.

Os coeficientes de $p(x)$ ordenados do maior ao menor expoente de **x** serão representados por $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$, $d = -1$ e $e = 2$. Assim, temos:

$$\begin{cases} r + s + t + u = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-4}{1} = -4 \\ r \cdot s + r \cdot t + r \cdot u + s \cdot t + s \cdot u + t \cdot u = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{1} = 5 \\ r \cdot s \cdot t + r \cdot s \cdot u + r \cdot t \cdot u + s \cdot t \cdot u = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{(-1)}{1} = 1 \\ r \cdot s \cdot t \cdot u = \dfrac{e}{a} = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

## Equação de grau n

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, e $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, ..., \mathbf{r_n}$ suas raízes. Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, temos que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + ... + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \text{ (soma das } \mathbf{n} \text{ raízes)} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + ... + r_n \cdot r_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + ... + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas três a três)} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \text{ (produto das } \mathbf{n} \text{ raízes)} \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Sejam **r** e **s** as raízes da equação $2x^2 + 6x + 7 = 0$. Sem resolvê-la, obtenha o valor de:

**a)** $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$

**b)** $r^2 + s^2$

**Solução:**

**a)** Como $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{s + r}{r \cdot s}$, podemos usar as relações de Girard:

$$\begin{cases} s + r = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{2} = -3 \\ r \cdot s = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Assim, o resultado pedido é:

$$\dfrac{-3}{\dfrac{7}{2}} = -\dfrac{6}{7}$$

**b)** Como $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$, temos que:

$$\underbrace{(r + s)^2}_{\text{soma}} - 2\underbrace{rs}_{\text{produto}} = r^2 + s^2$$

Daí:

$$r^2 + s^2 = (-3)^2 - 2 \cdot \dfrac{7}{2} = 9 - 7 = 2$$

**8** Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.

**Solução:**

Sejam $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes procuradas. Escrevendo as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 8 & (1) \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = 19 & (2) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 12 & (3) \end{cases}$$

Do enunciado, temos que:

$$r_1 = r_2 + r_3 \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1):

$$r_1 + \underbrace{r_2 + r_3}_{r_1} = 8 \Rightarrow 2r_1 = 8 \Rightarrow r_1 = 4$$

O polinômio dado é, então, divisível por $x - 4$:

| 4 | 1 | −8 | 19 | −12 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −4 | 3 | 0 |

As demais raízes seguem de:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

$S = \{1, 3, 4\}$

**9** Resolva a equação $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são números inversos (ou recíprocos).

**Solução:**

As raízes que a equação possui podem ser representadas por:

$$r_1, \underbrace{\frac{1}{r_1}}_{r_2}, r_3 \quad (1)$$

Escrevemos as relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{13}{4} & (2) \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{13}{4} & (3) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 & (4) \end{cases}$$

Usando (1), podemos escrever em (4):

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 \Rightarrow \cancel{r_1} \cdot \frac{1}{\cancel{r_1}} \cdot r_3 = -1 \Rightarrow r_3 = -1$$

Assim, o polinômio dado é divisível por $x + 1$:

| −1 | 4 | −13 | −13 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | −17 | 4 | 0 |

As outras raízes seguem de:

$$4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

**10** Qual é a soma e o produto das raízes da equação $x^5 + 2 = 0$?

**Solução:**

Os coeficientes de $\mathbf{x^5}$, $\mathbf{x^4}$, $\mathbf{x^3}$, $\mathbf{x^2}$, $\mathbf{x}$ e o coeficiente independente são, respectivamente, iguais a 1, 0, 0, 0, 0 e 2, e os representaremos por: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$ e $f = 2$.

Assim:

A soma das raízes é: $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{0}{1} = 0$

O produto das raízes é: $-\dfrac{f}{a} = -\dfrac{2}{1} = -2$

## EXERCÍCIOS

**29** Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ as raízes da equação $x^2 - 3x + 6 = 0$. Determine:

**a)** $r_1 + r_2$

**b)** $r_1 \cdot r_2$

**c)** $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$

**d)** $r_1^2 + r_2^2$

**e)** $(4r_1 + 1) \cdot (4r_2 + 1)$

**f)** $(-7r_1 - 7r_2)^2$

**30** A equação $-3x^2 + 2x + m = 0$, em que **m** é uma constante real, admite duas raízes reais cuja diferença é $-\dfrac{1}{3}$.

**a)** Obtenha as raízes da equação.

**b)** Determine o valor de **m**.

**31** A soma e o produto das raízes da equação quadrática $4x^2 + ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{4}$, respectivamente. Determine:

**a)** os valores de **a** e **b**;

**b)** as raízes da equação.

**32** A equação $x^2 + px + 54 = 0$, em que **p** é um coeficiente real, admite duas raízes, $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, tais que $2r_1 = 3r_2$. Qual é o valor de **p**?

**33** Dada a equação $-x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = 0$, com raízes $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$, calcule:

**a)** $r_1 + r_2 + r_3$

**b)** $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$

**c)** $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$

**d)** $\dfrac{1}{r_1 \cdot r_2} + \dfrac{1}{r_1 \cdot r_3} + \dfrac{1}{r_2 \cdot r_3}$

**e)** $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$

**34** Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que suas raízes são números inteiros e consecutivos.

**35** Resolva a equação $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8 = 0$, sabendo que suas raízes são positivas e uma delas é igual ao produto das outras duas.

**36** Os números complexos $3 - 4i$ e $3 + 4i$ são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$. Determine os valores reais de **p** e **q**.

**37** A equação $x^3 - 3x^2 + mx + 12 = 0$ (**m** é um coeficiente real) tem duas raízes opostas.

**a)** Determine o valor de **m**.

**b)** Determine seu conjunto solução.

**c)** Escreva uma equação algébrica do 3º grau cujas raízes sejam $r_1 + 3$, $r_2 + 3$ e $r_3 + 3$, sendo $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ as raízes encontradas no item *a*.

**38** As raízes da equação $x^3 + 21x^2 + mx - 729 = 0$, em que $m \in \mathbb{R}$, são, respectivamente, um certo número real, o quadrado desse número e o cubo desse primeiro número.

**a)** Qual é o valor de **m**?

**b)** Quais são as raízes dessa equação?

**39** Determine o valor da soma (**S**) e do produto (**P**) das raízes de cada equação:

**a)** $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) = 0$

**b)** $x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$

**c)** $x^6 - 4x + 2 = 0$

**d)** $x^4 + x - 3 = 0$

**40** Resolva a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que uma raiz é igual à diferença das outras duas.

**41** A equação $x^3 - 30x^2 + mx + n = 0$ (**m** e **n** coeficientes reais) admite como raízes três números inteiros pares e consecutivos.

**a)** Quais são as três raízes dessa equação?

**b)** Obtenha os valores de **m** e **n**.

**42** Sabendo que 1 é a raiz tripla da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, resolva-a.

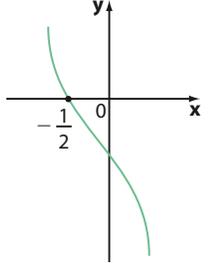
**43** A seguir está representada parte do gráfico da função **f**, decrescente em $\mathbb{R}$, dada por:

$f(x) = -2x^3 + px^2 - 44x + q$, em que **p** e **q** são coeficientes reais.



Sabendo que o produto de todas as raízes do polinômio é $-\frac{25}{2}$, determine:

**a)** o valor de **p**;

**b)** o conjunto solução da equação $f(x) = 0$.

**44** Resolva a equação $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$, sabendo que ela admite duas raízes reais, cada qual com multiplicidade igual a 2.

## Raízes complexas

Quando resolvemos a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, encontramos as raízes $x = 1 + 2i$ e $x = 1 - 2i$.

Observe que as duas raízes são números **complexos conjugados**.

Já a equação $x^2 + 4 = 0$ apresenta como raízes os números $-2i$ e $2i$, que também formam um **par de números complexos conjugados**.

Esse fato está ligado a uma propriedade importante, referente ao número de raízes complexas não reais de uma equação algébrica que apresenta todos os coeficientes reais.

### Teorema

> Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Para fazer a demonstração desse teorema, é preciso usar as propriedades do conjugado de um número complexo, apresentadas e demonstradas no capítulo 7.

Dados dois números complexos $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ e considerando $\overline{\mathbf{z_1}}$ e $\overline{\mathbf{z_2}}$ seus respectivos conjugados, valem as seguintes propriedades:

I. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

II. $z_1 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1$ é um número real

III. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

IV. $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$

**Demonstração:**

Seja a equação $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, com $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{a_{n-1}}$, ..., $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_0}$ coeficientes reais.

Da hipótese, **z** é raiz da equação, isto é, $p(z) = 0$.

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0} = \overline{0}$$

Usando a generalização da propriedade I, podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

De II e III, segue que:

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

E usando IV:

$$a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

isto é, $p(\overline{z}) = 0$, o que mostra que $\overline{\mathbf{z}}$ é raiz de $p(x) = 0$.

Sabemos que o grau de uma equação determina o número de raízes em $\mathbb{C}$. Se a equação tiver todos os coeficientes reais, as raízes complexas (não reais) ocorrem aos pares, o que garante que, havendo um número ímpar de raízes, ao menos uma, obrigatoriamente, é real.

**OBSERVAÇÕES**

- Se o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz com multiplicidade **m** de uma equação polinomial, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$, com $b \neq 0$, também é raiz com multiplicidade **m** dessa equação.
- Esse teorema nos garante que, em uma equação de coeficientes reais, as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares (**z** e $\overline{\mathbf{z}}$). Assim, uma equação do 2º grau, com coeficientes reais, por exemplo, pode apresentar duas raízes reais ou um par de raízes complexas conjugadas. Ela não pode apresentar uma raiz real e uma raiz complexa (não real).

**PENSE NISTO:**

Por que uma equação polinomial de grau ímpar, com coeficientes reais, apresenta ao menos uma raiz real?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**11** A equação $x^2 + mx + n = 0$, com **m** e **n** coeficientes reais, admite $5 - 2i$ como raiz. Qual é a outra raiz que essa equação possui? Quais são os valores de **m** e **n**?

**Solução:**

Como a equação apresenta coeficientes reais, se $5 - 2i$ é raiz, então seu conjugado $5 + 2i$ também é raiz da equação.

Usando as relações de Girard, é possível determinar **m** e **n**.

A soma das raízes é $(5 - 2i) + (5 + 2i) = 10$; então, $10 = -\frac{m}{1} \Rightarrow m = -10$.

O produto das raízes é $(5 - 2i) \cdot (5 + 2i) = 5^2 - (2i)^2 = 25 + 4 = 29$; daí, $29 = \frac{n}{1} \Rightarrow n = 29$.

**12** Quantas raízes reais tem o polinômio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 80x - 250$, se uma de suas raízes é $4 + 3i$?

**Solução:**

Como a equação $p(x) = 0$ tem coeficientes reais, podemos afirmar que $4 - 3i$ também é raiz e $p(x)$ é divisível por:

$$(x - 4 - 3i) \cdot (x - 4 + 3i) = (x - 4)^2 - (3i)^2 = x^2 - 8x + 16 + 9 = x^2 - 8x + 25$$

Façamos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 80x - 250 & x^2 - 8x + 25 \\ \hline -x^4 + 8x^3 - 25x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 10 \\ -10x^2 + 80x - 250 & \\ +10x^2 - 80x + 250 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

As demais raízes de $p(x)$ são obtidas a partir de: $x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10} \in \mathbb{R}$.

Logo, $p(x)$ tem exatamente duas raízes reais.

# EXERCÍCIOS

**45** Qual é o menor grau que pode ter uma equação com coeficientes reais que admite:

**a)** 2, $-3$ e $4 + i$ como raízes simples?

**b)** $-2$ e $2 + i$ como raízes simples? Escreva uma equação que satisfaz essa condição.

**c)** **i** como raiz dupla? Escreva uma equação que satisfaz essa condição.

**46** Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 52x - 102 = 0$, sabendo que $3 + 5i$ é uma de suas raízes.

**47** A equação $2x^2 - (a + 10)x + b = 0$, com **a** e **b** reais, apresenta como raiz o número $3 - i$. Quais são os valores de **a** e **b**?

**48** Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

**a)** Uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, pode ter 4 raízes reais.

**b)** Uma equação algébrica de grau 3, com coeficientes reais, pode ter 3 raízes complexas não reais.

**c)** Na equação do 2º grau $ix^2 + 2x - i = 0$, o número complexo **i** é raiz. Logo, seu conjugado $-i$ também é raiz.

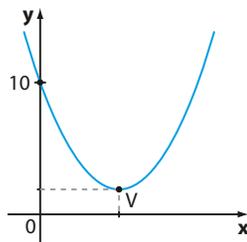
**d)** Existe uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, cujas raízes são **i**, $-i$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

**e)** Uma equação algébrica de grau 4, com coeficientes reais, pode ter uma única raiz real.

**49** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função representada pela parábola ao lado e definida pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$.

Sabendo que, em $\mathbb{C}$, uma das raízes da equação $f(x) = 0$ é o número $4 + 2i$, determine:

**a)** os valores de **a**, **b** e **c**;

**b)** as coordenadas de **V**.

**50** Resolva a equação $9x^4 - 18x^3 + 46x^2 - 2x + 5 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $1 - 2i$.

**51** O número complexo $-3i$ é raiz da equação:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + ax - 72 = 0$$

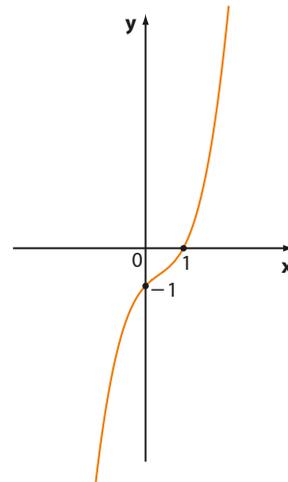
em que **a** é um coeficiente real.

**a)** Qual é o valor de **a**?

**b)** Qual é o conjunto solução dessa equação?

**52** A equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, em que **p**, **q**, **r** e **s** são coeficientes reais, admite a unidade imaginária **i** como raiz simples e 2 como raiz dupla. Quais são os valores de **p**, **q**, **r** e **s**?

**53** A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que **m** e **n** são números reais, admite $1 + i$ como raiz. Quais os valores de **m** e **n**?

**54** Parte do gráfico da função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, crescente em todo o seu domínio e definida por $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, em que **m**, **n** e **p** são coeficientes reais, é mostrada a seguir:

Sabendo que uma das raízes de **f** é $-i$, obtenha o valor de $f(2)$.

## Teorema das raízes racionais

O teorema seguinte nos ajudará a pesquisar possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz dessa equação, então **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$ e **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.

**Demonstração:**

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, temos:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $q^n$, temos:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \quad (1)$$

Isolando $a_n p^n$ e colocando **q** em evidência em (1), segue que:

$$a_n p^n = -q(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}}_{\alpha}) \quad (2)$$

Agora, isolando $a_0 q^n$ e colocando **p** em evidência, a partir de (1) temos:

$$a_0 q^n = -p(\underbrace{a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}}_{\beta}) \quad (3)$$

Como todos os coeficientes $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$, **p** e **q** são inteiros, segue que $\alpha$ e $\beta$ são inteiros. Em (2) e (3) temos:

$$\begin{cases} a_n p^n = -q \cdot \alpha \Rightarrow \dfrac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} & (4) \\ \text{e} & \\ a_0 q^n = -p \cdot \beta \Rightarrow \dfrac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z} & (5) \end{cases}$$

As igualdades acima obtidas mostram que:

- (4) $a_n p^n$ é divisível por **q**. Como $p^n$ e **q** são primos entre si, $\mathbf{a_n}$ é divisível por **q**, isto é, **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.
- (5) $a_0 q^n$ é divisível por **p**. Como $q^n$ e **p** são primos entre si, $\mathbf{a_0}$ é divisível por **p**, isto é, **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$.

**OBSERVAÇÃO**

O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros.
Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades ("candidatos") para tais raízes.

**EXEMPLO 7**

Suponhamos que se queira encontrar as três raízes da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$.

Como não dispomos de qualquer informação sobre as raízes dessa equação e considerando que ela tem todos os coeficientes inteiros, vamos pesquisar possíveis raízes racionais.

Por meio do teorema, sabemos que, se a equação tiver alguma raiz racional, ela será da forma $\frac{p}{q}$, em que **p** é divisor de $-2$ e **q** é divisor de 3, isto é, $p \in \{-1, 1, -2, 2\}$ e $q \in \{-1, 1, -3, 3\}$.

Os "candidatos" a raízes racionais são, portanto:

$$+1, -1, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, +2, -2, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

Seja **f** o polinômio dado, façamos as verificações:

- $f(1) = 2$
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
- $f(2) = 10$
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}$
- $f(-1) = -20$
- $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{9}$
- $f(-2) = -70$
- $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{34}{3}$

Como a equação é de grau 3 e já encontramos uma raiz $\left(\frac{1}{3}\right)$, o polinômio dado é divisível por $x - \frac{1}{3}$.
Fazendo essa divisão (pelo método da chave ou Briot-Ruffini), obtemos um quociente q(x) de grau 2. Bastaria, então, fazer q(x) = 0 para encontrar as demais raízes.

Verificamos que a única raiz racional dessa equação é $\frac{1}{3}$.

Para determinar as demais raízes, lembremos que o polinômio dado é divisível por $x - \frac{1}{3}$.

| $\frac{1}{3}$ | 3 | −7 | 8 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | −6 | 6 | 0 |

Assim, as outras raízes seguem de $3x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 - i$ ou $x = 1 + i$.

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 1 - i, 1 + i\right\}$$

**PENSE NISTO:**

Poderíamos ter encerrado as verificações depois de encontrar a raiz $\frac{1}{3}$. Explique.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**13** Resolva o problema proposto na introdução deste capítulo, na página 217.

**Solução:**

Seja **x** a medida do lado do quadrado recortado; o valor de **x** deve satisfazer a equação:

$$2x^3 - 53x^2 + 330x - 525 = 0$$

Como essa equação tem todos os coeficientes inteiros, vamos pesquisar possíveis raízes racionais.

- Os divisores de 525 são: {±1, ±3, ±5, ±7, ±15, ±21, ±25, ±35, ±75, ±105, ±175, ±525}.
- Os divisores de 2 são: {±1, ±2}.
- As possíveis raízes racionais são: $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm 7, \pm\frac{7}{2}, \pm 15, \pm\frac{15}{2}, \pm 21, \pm\frac{21}{2}, \pm 25, \pm\frac{25}{2}, \pm 35, \pm\frac{35}{2}, \pm 75, \pm\frac{75}{2}, \pm 105, \pm\frac{105}{2}, \pm 175, \pm\frac{175}{2}, \pm 525, \pm\frac{525}{2}\right\}$.

Vamos testá-las até encontrar a primeira raiz; seja $f(x) = 2x^3 - 53x^2 + 330x - 525$. Temos:

- $f(1) = -246 \neq 0$
- $f(-1) = -910 \neq 0$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = -373 \neq 0$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -703{,}5 \neq 0$
- $f(3) = 42 \neq 0$
- $f(-3) = -2\,046 \neq 0$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = -142{,}5 \neq 0$
- $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -1\,146 \neq 0$
- $f(5) = 50 \neq 0$
- $f(-5) = -3\,750 \neq 0$
- $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$

Como $\frac{5}{2}$ é raiz, **f** é divisível por $x - \frac{5}{2}$:

| $\frac{5}{2}$ | 2 | −53 | 330 | −525 |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −48 | 210 | 0 |

As demais raízes seguem de:

$$2x^2 - 48x + 210 = 0 \Rightarrow x^2 - 24x + 105 = 0 \Rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{156}}{2} \begin{cases} x_1 \simeq 18{,}25 \\ x_2 \simeq 5{,}75 \end{cases}$$

Observe que $x_1 \simeq 18{,}25$ cm não pode ser aceito, pois a largura da cartolina é 20 cm e seu comprimento é 33 cm. Note que, se $x_2 \simeq 5{,}75$ cm, as dimensões aproximadas da caixa são: 5,75 cm, 8,5 cm e 21,5 cm.

Seja $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ uma equação com coeficientes inteiros (observe que o coeficiente de $x^n$ é 1). Os possíveis candidatos a raízes racionais dessa equação são elementos do conjunto $\frac{p}{q}$, em que **p** é divisor de $a_0$ e **q** é divisor de 1, isto é, $q = \pm1$. Desse modo, se a equação admitir uma raiz racional, ela será obrigatoriamente um número inteiro.

Assim, seu volume aproximado é:

$$(5{,}75 \text{ cm}) \cdot (8{,}5 \text{ cm}) \cdot (21{,}5 \text{ cm}) \simeq 1\,050 \text{ cm}^3$$

O valor exato de 1 050 só é obtido se usarmos, no lugar da aproximação 5,75, o número irracional $\frac{24 - \sqrt{156}}{2}$

Assim, as possíveis medidas do lado do quadrado recortado são:

$$\frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm ou } \frac{24 - \sqrt{156}}{2} \simeq 5{,}75 \text{ cm}$$

**PENSE NISTO:**

Se uma equação algébrica com coeficientes inteiros e coeficiente dominante igual a 1 admite uma raiz racional, então essa raiz é necessariamente inteira. Explique.

## EXERCÍCIOS

**55** Pesquise as raízes racionais da equação:

$$2x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0$$

**56** Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

**a)** $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

**b)** $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

**57** A diferença entre o cubo de um número real e o seu quadrado é igual à soma do triplo do quadrado desse número com 25. Qual é esse número?

**58** Resolva em $\mathbb{C}$ a equação:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

**59** Faça o que é pedido em cada item a seguir:

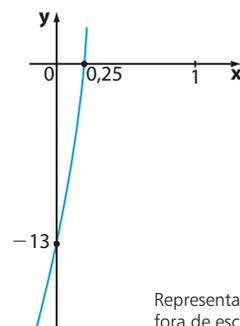
**a)** A equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$ só admite raízes reais. Sabendo disso, mostre que todas são irracionais.

**b)** Resolva essa equação, sabendo que $x^2 - 3$ divide esse polinômio.

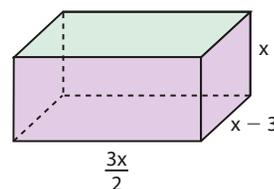
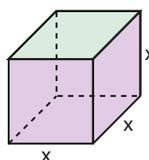
**60** Com relação à equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, determine:

**a)** o número de raízes inteiras que ela possui;

**b)** seu conjunto solução.

**61** Uma parte do gráfico da função definida por $y = 4x^3 - 25x^2 + 58x - 13$, crescente em $\mathbb{R}$, é mostrada a seguir.

Representação fora de escala.

Quais são as três raízes desse polinômio?

**62** Observe as figuras seguintes, em que estão indicadas as dimensões do cubo e do paralelepípedo:

Determine os valores de **x** para os quais o volume do cubo excede o do paralelepípedo em 32 unidades.

**63** O polinômio $x^3 - 1$ divide o polinômio:

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 2x + 8$$

Quais são as raízes da equação $p(x) = 0$?

## DESAFIO

A equação $x^4 - 3x^2 + px + q = 0$, com $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$, tem duas raízes complexas não reais cuja soma é $-6$ e o produto, 25. As raízes reais desse polinômio são tais que uma é o dobro da outra.

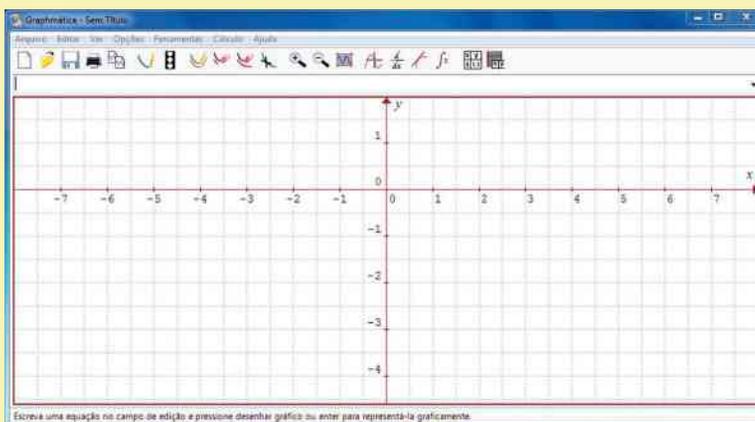
**a)** Obtenha as quatro raízes da equação.

**b)** Determine os valores de **p** e **q**.

## TROQUE IDEIAS

### Interpretando e construindo gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 com um *software* livre

Graphmática é um *software* livre de matemática que permite, entre várias possibilidades, a construção de gráficos de funções polinomiais. Veja abaixo a tela de "abertura" do programa.

O objetivo desta atividade é construir e analisar gráficos de funções polinomiais de ℝ em ℝ por meio de um programa computacional – o Graphmática. A construção do gráfico de funções polinomiais de grau maior que 2 requer que o estudante tenha conhecimento dos conceitos de limite e derivada de uma função – assuntos normalmente não estudados no Ensino Médio. O uso do recurso tecnológico é uma ferramenta auxiliar importante que permite ao estudante visualizar e analisar os gráficos dessas funções.

2014 KSOFT, INC

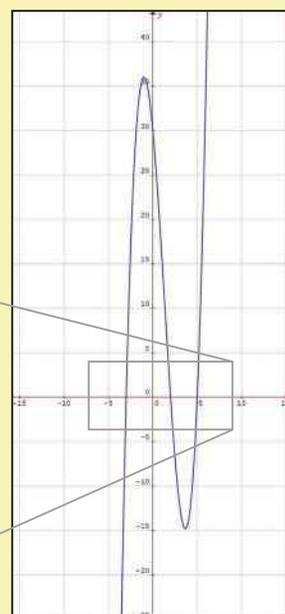
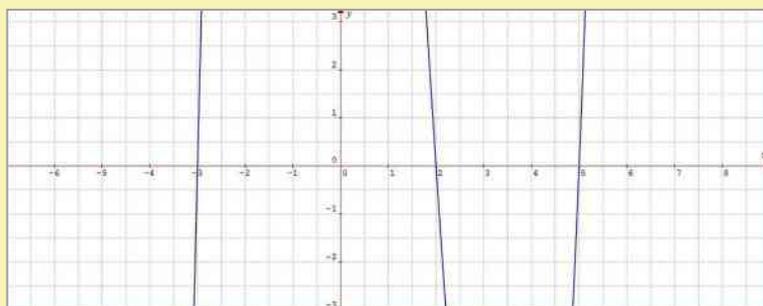
Note que o plano cartesiano é apresentado com um fundo quadriculado, o que facilita a leitura e a localização de pontos. Acima do plano há um campo, em branco, no qual deve ser inserida, por meio de digitação, a lei da função. Na barra de ferramentas do Graphmática há a opção, por meio do campo "view", de se alterar a unidade de medida no plano utilizando os comandos "zoom in" e "zoom out".

Para se digitar a lei de uma função em que apareçam potências, deve-se usar o símbolo ^. Por exemplo, para se inserir $2x^3$, deve-se digitar 2x^3. Observe que não é necessário digitar o sinal de multiplicação entre o coeficiente 2 e a parte literal $x^3$. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Observe o gráfico de $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, construído no Graphmática, e responda às questões.

i) Qual é o número de raízes reais desse polinômio?

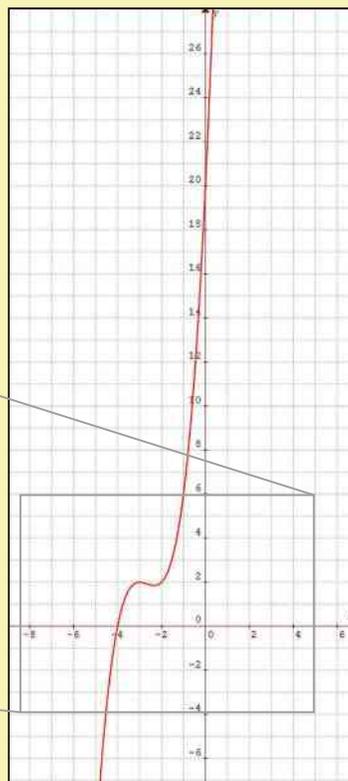
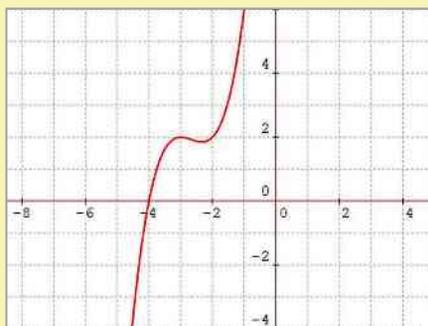
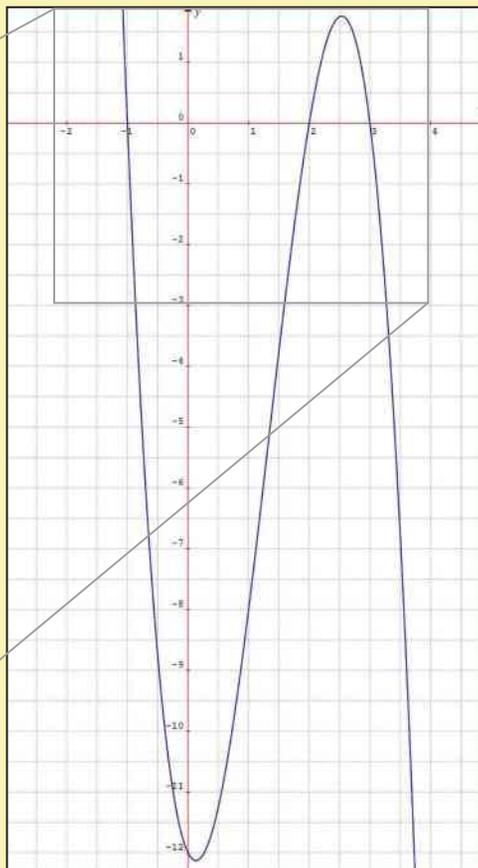
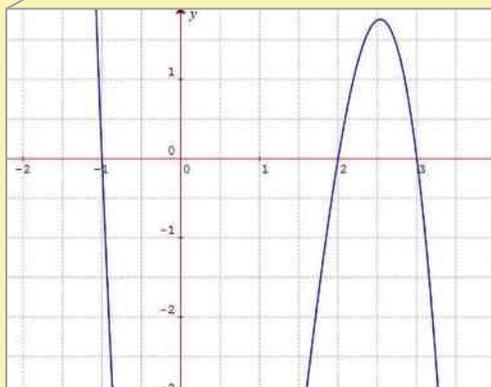
ii) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com o eixo das ordenadas?

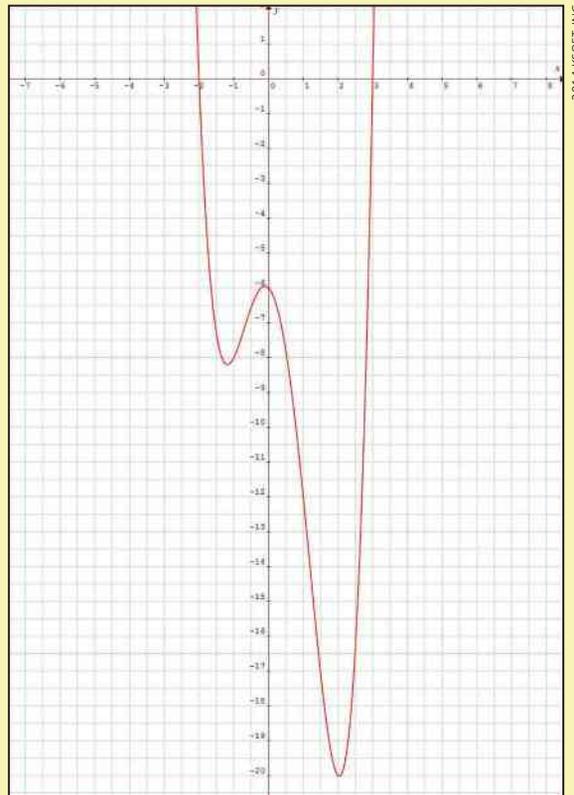
iii) Para que valores de **x** tem-se $f(x) = 30$?

2014 KSOFT, INC

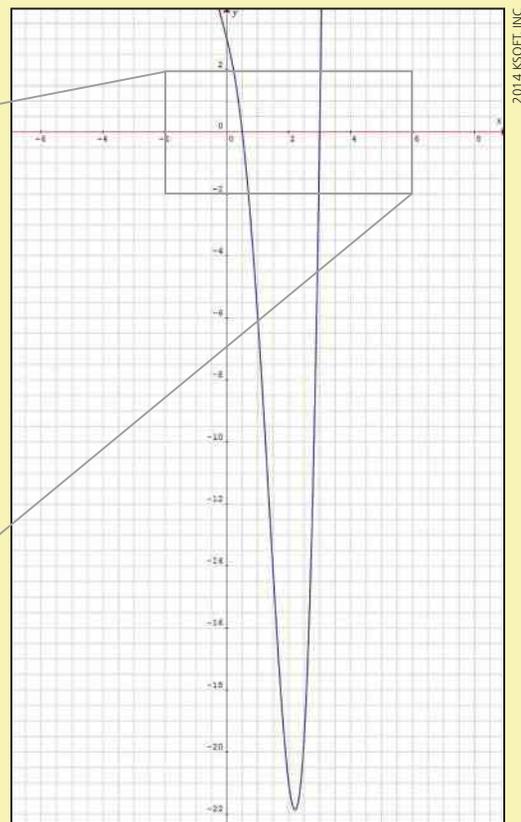
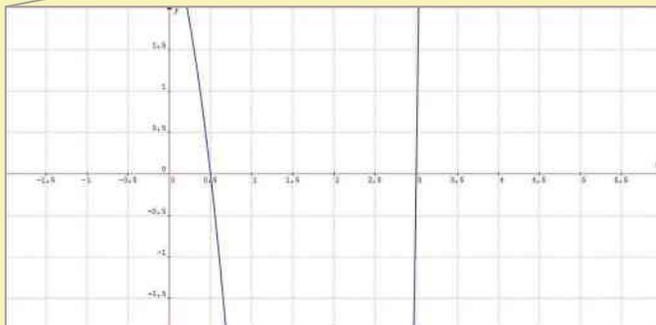
**b)** Observe o gráfico de $y = x^3 + 8x^2 + 21x + 20$, construído no Graphmática, e responda às questões:

i) Qual é o número de raízes reais da função?

ii) Quais são as três raízes dessa função?

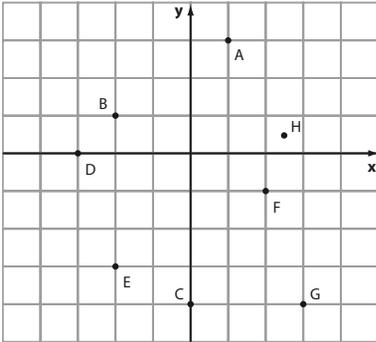
iii) Em que ponto o gráfico de **f** intersecta o eixo **y**?

**c)** O gráfico ao lado, feito no Graphmática, representa uma função polinomial de grau 3. Analisando-o, determine a lei dessa função.

**d)** Observe o gráfico de $y = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$, construído no Graphmática. Analisando o gráfico, calcule todas as raízes da função.

2014 KSOFT, INC

**e)** O gráfico ao lado, construído no Graphmática, representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$. Obtenha todas as raízes de **f**.

2014 KSOFT, INC

# RESPOSTAS

## CAPÍTULO 1 O ponto

### Exercícios

**1.**

**2.** H(2, 4); I(−2, −4); J(1, 1); K(3, 0); L(−1, 4); M(−3, −2); N(1, −3); O(0, 0).

**3.** **a)** **E**, **G**. **b)** **A**, **L**. **c)** **C**, **I**. **d)** **H** **e)** **B**, **K**. **f)** **D**, **F**, **J**. **g)** **E**, **I**. **h)** **A**

**4.** **a)** Positivo. **b)** Negativo. **c)** Positivo. **d)** Nulo.

**5.** −3 ou 3.

**6.** **a)** 4º quadrante.
**b)** 3º quadrante.
**c)** 4º quadrante.
**d)** 2º quadrante.

**7.** A(3, 0); B(0, 3); C(−3, 0); D(0, −3); E(5, 0); F(0, 5); G(−5, 0); H(0, −5).

**8.** $\{m \in \mathbb{R} \mid m < 0\}$

**9.** m = n = 5

**10.** a = b = 3

**11.** A(0, 0); B(5, 12); C(15, 12); D(20, 0).

**12.** $\overline{BC}$

**13.** $A(-3\sqrt{2}, 0)$; $B(0, 3\sqrt{2})$; $C(3\sqrt{2}, 0)$; $D(0, -3\sqrt{2})$.

**14.** **a)** $\sqrt{17}$ **b)** $5\sqrt{2}$ **c)** 5 **d)** $\sqrt{130}$ **e)** 7 **f)** $\sqrt{34}$ **g)** 10 **h)** 4 **i)** 4

**15.** $5 + \sqrt{34} + \sqrt{53}$

**16.** 7 ou 1.

**17.** O ponto **D**.

**18.** −3

**19.** $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$

**20.** $2\sqrt{13}$

**21.** $3\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$

**22.** Q(5, 5)

**23.** P(0, 9)

**24.** Triângulo escaleno.

**25.** $\left(\frac{11}{2}, 0\right)$

**26.** m = 7

**27.** $\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$ ou $\left(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right)$.

**28.** Qualquer ponto P(x, y) tal que 5x − 3y + 5 = 0. Por exemplo: $\left(0, \frac{5}{3}\right)$; (2, 5); (−1, 0); $\left(-\frac{8}{5}, -1\right)$ etc.

**29.** **a)** $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ **b)** $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ **c)** $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ **d)** (0, 0) **e)** (7, 3) **f)** (3, −1)

**30.** 1

**31.** $\sqrt{74}$

**32.** (1, 7)

**33.** Demonstração.

**34.** (−2, 0) e (0, 4).

**35.** **a)** $\left(\frac{4}{3}, -3\right)$
**b)** $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$ e 4.

**36.** A(−1, 0); B(3, 4) e C(7, −8).

**37.** **a)** (−2, 0) **b)** 5

**38.** **a)** (−2, −3) **b)** (−2, 3) **c)** (2, 3) **d)** (4, −5)

**39.** **a)** $\left(0, 2\sqrt{7}\right)$
**b)** 4
**c)** $\left(2, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$; $\frac{8}{3}$.

**40.** $\left(-9, \frac{1}{2}\right)$; (−5, 2) e $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

**41.** (−4, 6); 68 u.a.

**42.** **a)** $\left(2, -2\sqrt{3}\right)$ **b)** $4\sqrt{3}$ cm²

**43.** $\left(-\frac{31}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

**44.** **a)** Sim. **b)** Não. **c)** Não. **d)** Sim. **e)** Sim. **f)** Não.

**45.** m = 4

**46.** Qualquer (x, y) que satisfaça a relação 2x − y − 1 = 0; por exemplo: (0, −1); (1, 1); (−1, −3); (2, 3) etc.

**47.** Sim.

**48.** Sim.

**49.** k ≠ 12

**50.** **a)** $5x_p + 2y_p = -10$
**b)** (−2, 0)

**51.** **a)** Não. **b)** Sim.

**52.** $\left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right)$

**53.** −2

**54.** **a)** A(0, 0); B(α, 0); C(α, β); D(0, β).
**b)** $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$
**c)** Demonstração.

**55.** $\left(0, \frac{19}{5}\right)$

### Desafio

**a)** G(0, 3)

**b)** Fábio: 140 m; Gabriel: 72 m.

**c)** $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

## CAPÍTULO 2 A reta

### Exercícios

**1.** **a)** −x + 2y − 4 = 0 ou x − 2y + 4 = 0
**b)** −3x − y − 1 = 0 ou 3x + y + 1 = 0
**c)** $-5 + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ ou 10x − y + 8 = 0
**d)** −x + 3y + 9 = 0 ou x − 3y − 9 = 0

**2.** **A**, **C** e **D**.

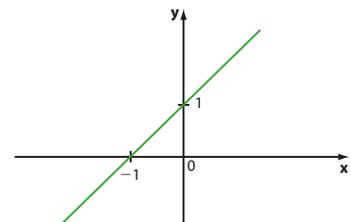
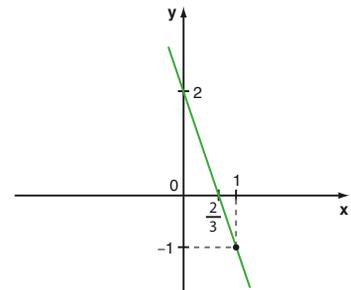
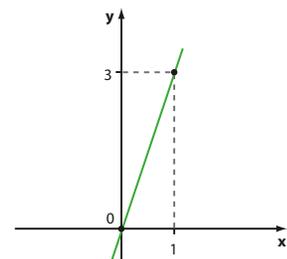
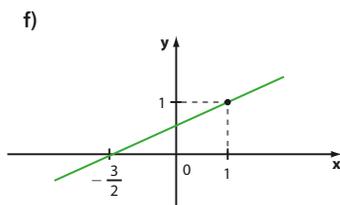
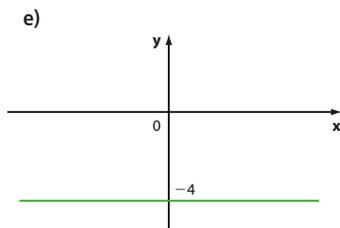
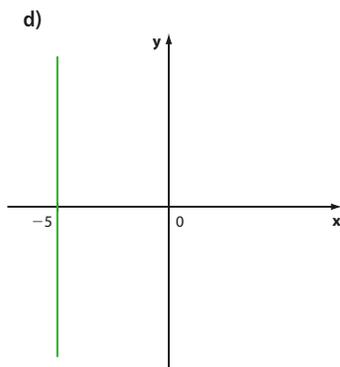
**3.** **a)**

**b)**

**c)**

d)

e)

f)

**4.** **a)** t **b)** s **c)** r **d)** u

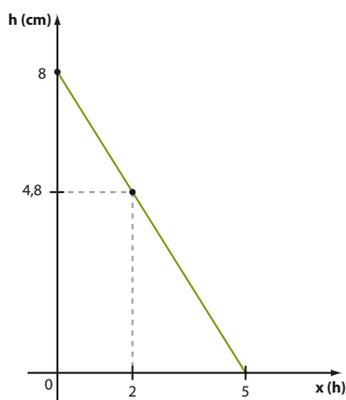
**5.** **a)** $3x + 7y + 1 = 0$
**b)** Não. Não.

**6.** $x - 2 = 0$

**7.** $y - 5 = 0$

**8.** **a)** $y = 5x$ **c)** $5x - y = 0$
**b)** $-9$

**9.** $r: y - 4 = 0$
$s: x + 1 = 0$
$t: 4x + y = 0$

**10.** **a)** $h = -1{,}6x + 8$
**b)** 22 h
**c)**

**d)** $1{,}6x + y - 8 = 0$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

**11.** $g(x) = -\frac{16}{5}x + 4$

**12.** $y = 0$; $3x - y = 0$; $x + y - 4 = 0$.

**13.** $(3, 4)$ ou $(-2, -1)$.

**14.** **a)** $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$
**b)** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
**c)** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

**15.** **a)** $(-3, 2)$ **b)** $\sqrt{13}$

**16.** **a)** Concorrentes.
**b)** Coincidentes.
**c)** Paralelas distintas.
**d)** Paralelas distintas.

**17.** 1

**18.** Sim. $(1, -1)$

**19.** $p = 2$

**20.** **a)** $f(x) = \frac{-3x + 11}{2}$
$g(x) = 2x - 13$
**b)** $-\frac{17}{2}$
**c)** $\left(\frac{37}{7}, -\frac{17}{7}\right)$
**d)** $\frac{289}{84}$ u.a.

**21.** **a)** Empresa I:
$6000x - y + 240\,000 = 0$
Empresa II:
$5\,000x - y + 400\,000 = 0$
**b)** Empresa I: R$ 240 000,00
Empresa II: R$ 400 000,00
**c)** Empresa I: R$ 6 000,00
Empresa II: R$ 5 000,00
**d)** Empresa I: R$ 840 000,00
Empresa II: R$ 900 000,00
**e)** 160 quilômetros

**22.** $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right), (2, 1)$.

**23.** 1; $(2, 0)$.

**24.** $\left(\frac{12}{23}, \frac{41}{23}\right)$

**25.** **a)** Retângulo isósceles.
**b)** Perímetro: $2\left(2 + \sqrt{2}\right)$ u.c.; área: 2 u.a.

**26.** $C(1, 1)$; $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

**27.** **a)** 45°
**b)** $\alpha$ tal que $\text{tg}\ \alpha = 2$.
**c)** 0°

**28.** **a)** $\frac{1}{2}$
**b)** $y = \frac{1}{2}x$ (reduzida)
$x - 2y = 0$ (geral)

**29.** **a)** $y = \sqrt{3}x - 3$
**b)** $y = -x\sqrt{3} + 2$
**c)** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
**d)** $y = -x + 1$

**30.** **a)** $y = 3x - 1$
**b)** $y = x + 3$
**c)** $y = -x + 3$
**d)** $y = -\frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$

**31.** **a)** $\frac{1}{2}$ **d)** Não existe.
**b)** $-\frac{1}{3}$ **e)** 0
**c)** $-2$ **f)** 3

**32.** **a)** 0,9 **c)** 0,9 g/cm³
**b)** $m = 0{,}9 \cdot V$

**33.** $y = \frac{5x}{2}$ ou $y = -\frac{5x}{2}$.

**34.** **a)** $4x - 3y = 0$
**b)** $y = -\frac{4}{3}x + 8$
**c)** $x - 3 = 0$

**35.** $\overline{AB}: y = -x\sqrt{3}$
$\overline{BC}: y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
$\overline{AC}: y = 0$

**36.** **a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
**b)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \left(1 + \frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$

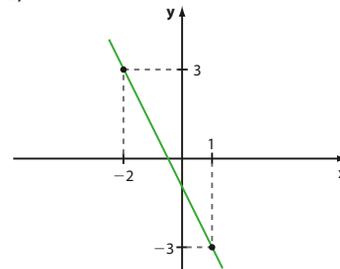
**37.** **a)** $A(2, 0)$; $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $C(0, 2)$;
$D\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $E(-2, 0)$; $F\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$,
$G(0, -2)$ e $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.
**b)** $x - y = 0$
**c)** $-1$
**d)** $1 + \sqrt{2}$

**38.** $x - 3y + 5 = 0$

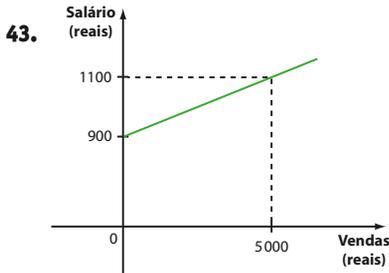
**39.** **a)** $y = x - 4$ **c)** $y = x\sqrt{3} + 3$
**b)** $y = -x - 5$ **d)** $y = -\frac{1}{3}$

**40.** $y - 2 = m(x - 3)$; com $m \in \mathbb{R}$ ou $x - 3 = 0$.

**41.** $y - 3 = m(x + 1)$; $m \in \mathbb{R}$ ou $x + 1 = 0$.
**a)** $4x + 3y - 5 = 0$
**b)** $2x + y - 1 = 0$
**c)** $3x + y = 0$
**d)** $\sqrt{3}x - y + 3 + \sqrt{3} = 0$

**42.** **a)**

**b)** Coeficiente angular: $-2$
Coeficiente linear: $-1$
**c)** $-\frac{1}{2}$

**43.**

$0{,}04x - y + 900 = 0$, com $x \geqslant 0$.

**44.** $f(2) = 1$; $f(-1) = 10$.

**45.** $f(x) = -3x + 5$

**46.** **a)** 153 reais.
**b)** 85
**c)** Azul: $3{,}2x - y = 0$; $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$
Vermelha: $1{,}4x - y + 153 = 0$;
$x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$
**d)** Vermelha: 1,4; azul: 3,2.

**47.** **a)** Paralelas distintas.
**b)** Concorrentes.
**c)** Coincidentes (ou paralelas coincidentes).
**d)** Paralelas distintas.

**48.** $y = -3x$

**49.** **a)** $k = -\frac{9}{2}$
**b)** $k \neq -\frac{9}{2}$
**c)** Não existe $k \in \mathbb{R}$.

**50.** **a)** $3x - y + 1 = 0$
**b)** $2x + 5y - 8 = 0$
**c)** $x + y + 4 = 0$
**d)** $y - 5 = 0$

**51.** **a)** $-3$ **b)** 2

**52.** $x + y - 7 = 0$

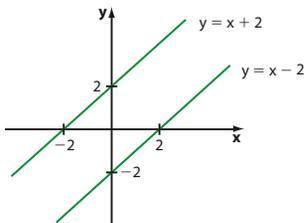
**53.** Demonstração.

**54.** $(0, 3)$; $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

**55.** **a)** $x - 2y + 7 = 0$
**b)** $\sqrt{5}$

**56.** $\frac{8 + \sqrt{34}}{2}$

**57.** $4x - 3y + p = 0$, com $p \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

**58.** A representação gráfica é o par de retas paralelas distintas:

**59.** **a)** $y = x\sqrt{3}$
**b)** $y = x\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
**c)** $y - 2\sqrt{3} = 0$

**60.** r e t.

**61.** **a)** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$
**b)** $y = -\frac{5}{2}x + 2$

**62.** $m = 10$

**63.** **a)** Concorrentes não perpendiculares.
**b)** Perpendiculares.
**c)** Paralelas distintas.
**d)** Perpendiculares.
**e)** Paralelas distintas.

**64.** **a)** $3x + 2y - 9 = 0$
**b)** Resposta pessoal.

**65.** **a)** $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **b)** $(-1, 1)$

**66.** **a)** $\left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$ **b)** $\left(-\frac{62}{13}, \frac{80}{13}\right)$

**67.** $\overline{AD}$: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

$\overline{BC}$: $y = -\frac{2}{3}x + 7$

**68.** $m = -\frac{1}{2}$ e $n = -2$.

**69.** $k \neq 2$ e $k \neq -3$.

**70.** **a)** $\sqrt{65}$ **b)** $\sqrt{65}$

**71.** $6x + y + 3 = 0$

**72.** $y = \frac{3}{4}x + 3$ ou $y = \frac{3}{4}x - 3$.

**73.** **a)** V **b)** V **c)** F **d)** F

**74.** A(0, 3); B(4, 0); C(1, −4); D(−3, −1).

**75.** **a)** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$
**b)** $-3x + 2y - 6 = 0$

**76.** Geral: $3x + 2y - 1 = 0$

Reduzida: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Segmentária: $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

**77.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{-8} = 1$

**78.** **a)** $6 + \sqrt{26}$ **b)** $\frac{5}{2}$ u.a.

**79.** Resposta pessoal.

**80.** $(2, -1)$

**81.** **a)** Concorrentes.
**b)** Paralelas distintas.

**82.** $y = 2x$

**83.** $(-2, 7)$

**84.** **a)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **c)** $\sqrt{29}$
**b)** $\frac{17}{5}$ **d)** 0

**85.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$

**86.** $\frac{17\sqrt{10}}{20}$

**87.** **a)** Os três pontos equidistam de **r**.
**b)** $r \,//\, \overline{PQ}$

**88.** $\frac{29\sqrt{2}}{10}$

**89.** Perímetro: $4\sqrt{5}$ u.c.; área: 5 u.a.

**90.** **a)** $100\sqrt{5}$ m $\simeq$ 223,6 m
**b)** 480 m
**c)** $\left(\frac{92}{25}, \frac{81}{25}\right)$
**d)** 280 m

**91.** $x - y + 2 = 0$ ou $x - y - 2 = 0$.

**92.** $5x + 12y + 18 = 0$

**93.** **a)** 11 u.a. **c)** $\frac{39}{8}$ u.a.
**b)** $\frac{21}{2}$ u.a. **d)** $\frac{41}{2}$ u.a.

**94.** 38 u.a.

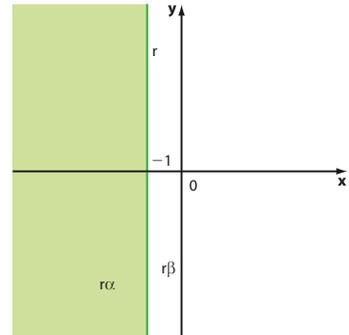
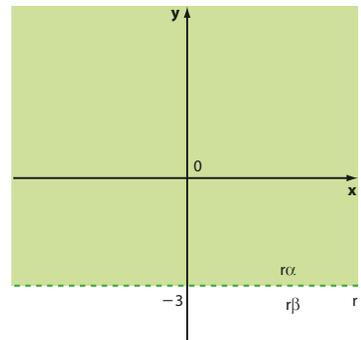
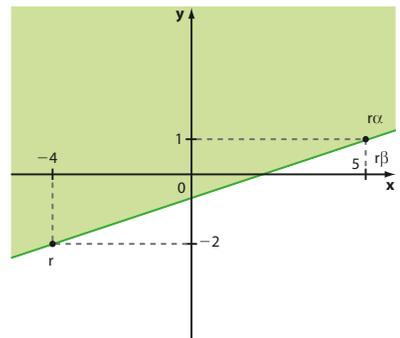
**95.** **a)** $y = 2x$ **b)** 5 u.a.

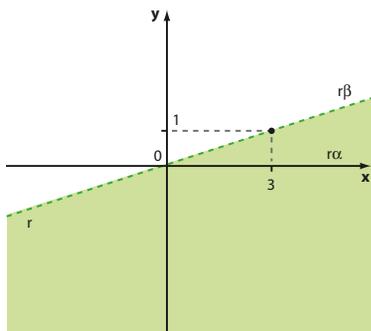
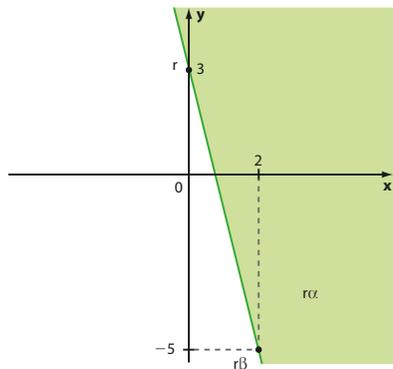
**96.** 9 u.a.

**97.** $\frac{121}{65}$ u.a.

**98.** $x - 2y + 8 = 0$

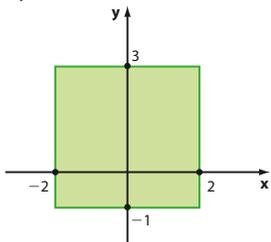
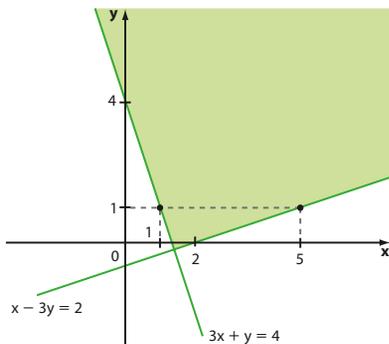
**99.** 4 u.a.

**100.** **a)** $r\alpha$, incluindo **r**

**b)** $r\alpha$, excluindo **r**

**c)** $r\alpha$, incluindo **r**

d) rα, excluindo **r**

e) rα, incluindo **r**

**101.** a) $y - 2 > 0$
b) $2x - 3 \leqslant 0$
c) $4x + 3y - 12 \leqslant 0$
d) $x - 3y + 2 < 0$
e) $3x - y \geqslant 0$

**102.** a)

b) 16 u.a.

**103.** $3\left(2 + \sqrt{2}\right)$

**104.**

## Desafio

a) 22 km²
b) Sim. 2,38 km
c) $\frac{11}{36}$

# CAPÍTULO 3 A circunferência

## Exercícios

**1.** a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$
d) $(x - 4)^2 + y^2 = 8$

**2.** a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$
c) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$
d) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$

**3.** a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
b) 4 u.a.

**4.** a) $(x + 3)^2 + y^2 = 9$
b) $x^2 + y^2 = 9$
c) $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$
d) $(x - 3)^2 + y^2 = 25$

**5.** $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

**6.** a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
b) Não.

**7.** a) $x^2 + (y + 1)^2 = 29$
b) Resposta pessoal, por exemplo,
$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 58$.

**8.** $k = 3$ ou $k = -3$.

**9.** (3, 7)

**10.** a) (5, 3) b) (7, 1)

**11.** a) $a = 0$ ou $a = 3$. b) 2

**12.** 64 u.a.

**13.** (5, 0)

**14.** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$

**15.** a) Não alinhados; $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$.
b) Alinhados; não há circunferência.

**16.** a) $4x - 3y = 0$
b) $(x - 45)^2 + (y - 60)^2 = 81$

**17.** a) C(5, 1) e r = 3.
b) Não.
c) C(−1, −3) e $r = \sqrt{10}$.
d) Não.
e) Não.
f) C(−2, 2) e r = 5.
g) C(10, 0) e r = 1.
h) Não.

**18.** a) C(0, 3) e r = 3.
b) C(−1, −2) e $r = \sqrt{6}$.
c) C(2, −3) e r = 3.
d) C(−4, 8) e $r = \sqrt{13}$.

**19.** a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$
b) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$
c) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = 25$
d) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + \frac{19}{4} = 0$

**20.** a) $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$
b) $x^2 + y^2 - 17 = 0$

**21.** 5

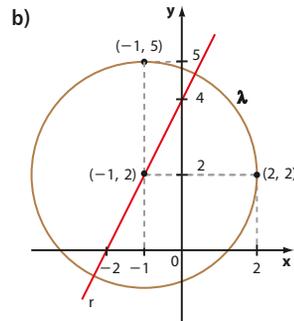
**22.** $k > 2$

**23.** $k = 57$

**24.** $x + 5y - 3 = 0$

**25.** 5

**26.** p = 4; (−2, 3).

**27.** a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
b)

**28.** a) (7, −2)
b) (−3, 1)

**29.** 32

**30.** a) $x^2 + y^2 = 1600$
b) $1600\pi$ cm²

**31.** **A** e **F** pertencem a **λ**; **B** e **D** são externos a **λ**; **E** é interno a **λ**.

**32.** O ∈ **λ**; **A** e **B** são externos a **λ**; **D** e **E** são internos a **λ**.

**33.** $k = -24$

**34.** a) $k = 2$ ou $k = -6$. b) 12 u.a.

**35.** $2 < p < 4$

**36.** $p \leqslant -3$ ou $p \geqslant 1$.

**37.** $m < -1$ ou $m > 5$.

**38.** Interno.

**39.** a) $\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$
b) Externo.
c) Externo.
d) O ponto pertence a **λ**.

**40.** a)

b)

c)

d)

**41.** a)

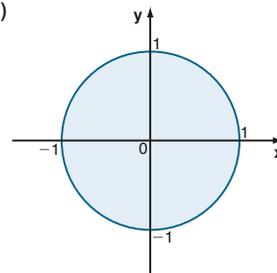
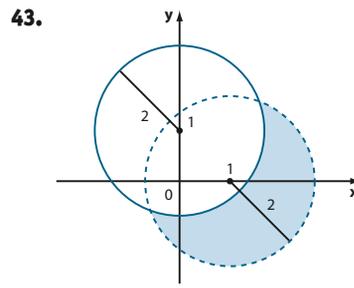
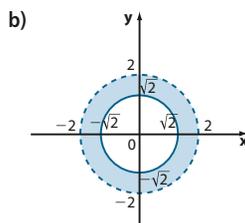
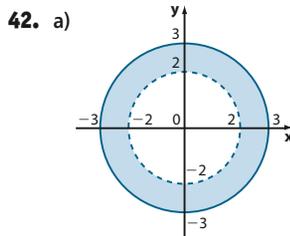
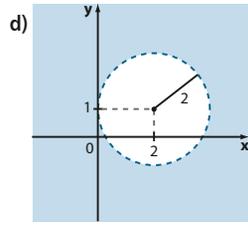
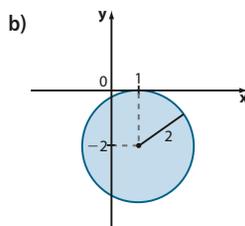
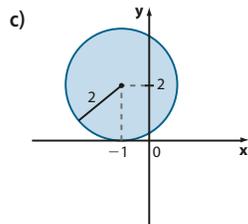
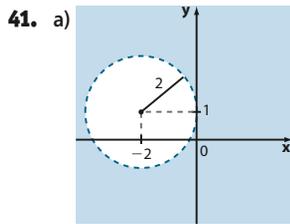
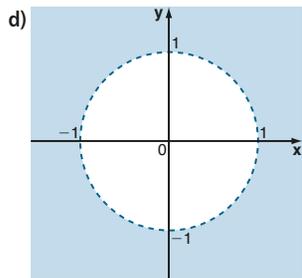
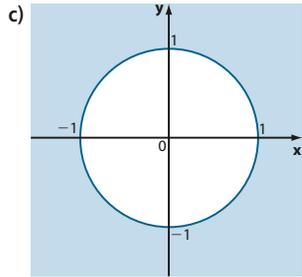
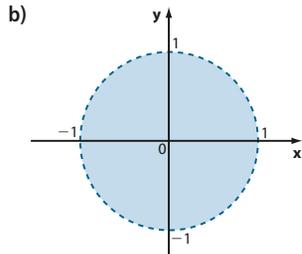
c)

b)

d)

**42.** a)

b)

**43.**

**44.** a) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4 \\ (x-3)^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}$

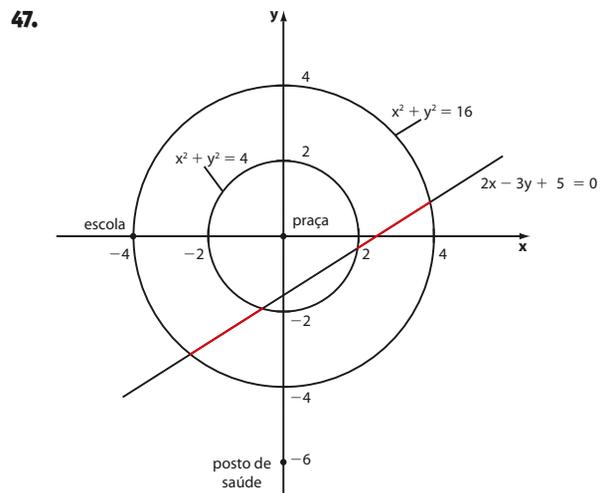
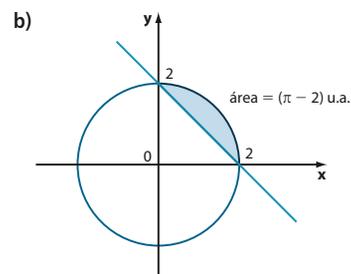
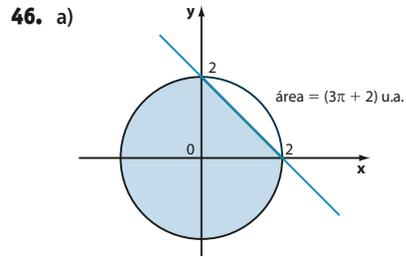
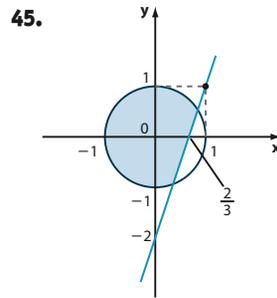
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

**45.**

**46.** a)

b)

**47.**

**48.** **a)** Exteriores. **c)** Tangentes.
**b)** Secantes. **d)** Secantes.

**49.** **a)** (5, 5)
**b)** (5, −1) e (−3, 3).
**c)** Não há.

**50.** Secante.

**51.** $p = \pm 2\sqrt{5}$

**52.** **a)** $k = -11$ ou $k = 1$.
**b)** $-11 < k < 1$
**c)** $k < -11$ ou $k > 1$.

**53.** 4

**54.** **a)** Tangente. **d)** Secante.
**b)** Externa. **e)** Secantes.
**c)** Tangente.

**55.** **a)** $4\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{10}$

**56.** **a)** $k = -8$
**b)** $-8 < k < 1$
**c)** $k < -8$

**57.** $m = 1$ e $2r = 20\sqrt{2}$.

**58.** $\left(4 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}, 2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

**59.** $y - 3 = 0$ e $y + 5 = 0$.

**60.** $\dfrac{1}{2}$

**61.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

**62.** **a)** $\dfrac{16 + 3\sqrt{79}}{5}$
**b)** $2x - y + 3 \cdot (\sqrt{5} - 1) = 0$ e
$2x - y + 3 \cdot (-\sqrt{5} - 1) = 0$

**63.** $k = 4$

**64.** **a)** $y + 2 = 0$ e $y - 8 = 0$.
**b)** $x + 3 = 0$ e $x - 7 = 0$.
**c)** $4x + 3y + 8 = 0$ e
$4x + 3y - 42 = 0$.

**65.** $\sqrt{41}$

**66.** $(x - 4)^2 + \left(y + \dfrac{99}{20}\right)^2 = \dfrac{10\,201}{400}$

**67.** $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} + 8 = 0$ e
$\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} - 8 = 0$.

**68.** $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$

**69.** (6, 8) e (8, 6)

**70.** (−1, 0) e (1, 2)

**71.** **a)** Secantes.
**b)** Exteriores.
**c)** Tangentes exteriormente.
**d)** Tangentes interiormente.

**72.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$ e
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \cdot (\sqrt{2} + 1)^2$.

## Desafio

**a)** 300 km
**b)** $(x + 6)^2 + (y - 15)^2 \leq 100$
**c)** $100\pi$ km²
**d)** $\left(-\dfrac{18}{5}, \dfrac{51}{5}\right)$; 107,52 km; inteiro mais próximo: 108.

# As cônicas

## Exercícios

**1.** **a)** $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
**b)** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$
**c)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{169} = 1$

**2.** **a)** (−12, 0) e (12, 0).
**b)** (−8, 0) e (8, 0).
**c)** (0, −12) e (0, 12).

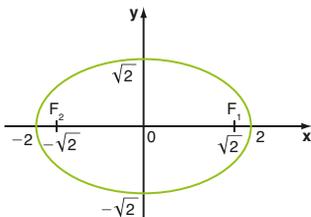
**3.** $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

**4.** Distância focal = 4
Excentricidade = $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

**5.** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

**6.** $\dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

**7.** $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)$.

**8.** $F_1(\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{2}, 0)$.

**9.** $16x^2 + 15y^2 = 240$ ou
$\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

**10.** 10

**11.** **a)** $\dfrac{(x - 3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$
**b)** $\dfrac{(x - 4)^2}{5} + \dfrac{(y - 4)^2}{1} = 1$
**c)** $\dfrac{(x + 2)^2}{1} + \dfrac{(y - 3)^2}{4} = 1$

**12.** **a)** $(3 - 2\sqrt{2}, 0)$ e $(3 + 2\sqrt{2}, 0)$.
**c)** $(-2, 3 + \sqrt{3})$ e $(-2, 3 - \sqrt{3})$.

**13.** $\dfrac{(x + 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 2)^2}{4} = 1$

**14.** $\dfrac{(x + 2)^2}{1} + \dfrac{(y + 1)^2}{4} = 1$

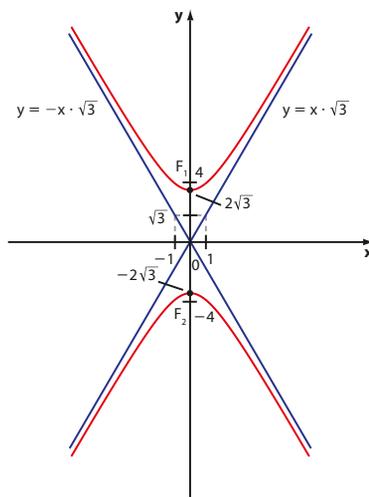
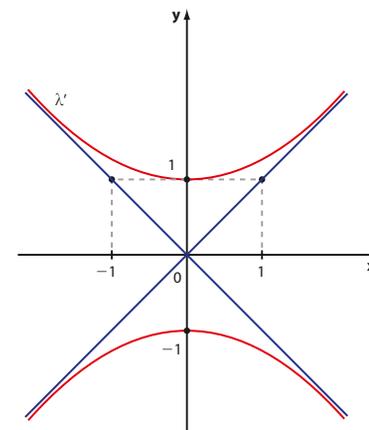
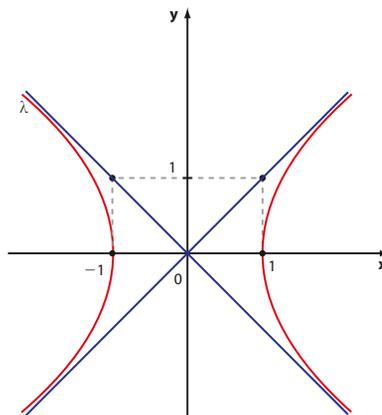
**15.** $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y - 1)^2}{25} = 1$

**16.** (−2, 2) e (8, 2).

**17.** **a)** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
**b)** $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$

**18.** **a)** (−5, 0) e (5, 0).
**b)** (0, −4) e (0, 4).

**19.** 6; $y = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}x$

**20.** **a)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
**b)**

**21.** Não.

**22.** (−20, 0) e (20, 0).

**23.** **a)** $\dfrac{(x - 5)^2}{4} - \dfrac{y^2}{21} = 1$
**b)** $\dfrac{(x - 6)^2}{1} - \dfrac{(y - 5)^2}{3} = 1$

**24.** **a)** (0, 0) e (10, 0).
**b)** (4, 5) e (8, 5).

**25.** $(-5, -2)$ e $(3, -2)$.

**26.** 14

**27.** $\frac{3}{2}$

**28.** **a)** $y^2 = 4x$ **b)** $x^2 = 16y$ **c)** $x^2 = -20y$

**29.** $y = -\frac{7}{8}$

**30.** F(4, 0) e d: $x + 4 = 0$

**31.** **a)** $F(-4, 0)$

d: $x - 4 = 0$

**b)** $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$

d: $y + \frac{1}{2} = 0$

**c)** $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

d: $x + \frac{1}{4} = 0$

**32.** $y^2 = \frac{49x}{4}$

**33.** **a)** $(x - 3)^2 = 4(y - 2)$

**b)** $(x - 1)^2 = -8(y - 2)$

**c)** $(y - 4)^2 = 4(x - 3)$

**d)** $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$

**34.** $F(5, -3)$ e $V(2, -3)$.

**35.** $y = \frac{1}{4}$

**36.** $V(0, 3)$

**37.** $y^2 = 16 \cdot (x - 2)$

**38.** $(x + 2)^2 = -12 \cdot y$

**39.** $x^2 = 4y$

**40.** **a)** Elipse: $a = \sqrt{2}$; $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$; C(0, 0).

**b)** Elipse: $a = 5$; $b = 3$; C(2, −1).

**c)** Hipérbole: $a = \sqrt{5}$; $b = 2$; C(−3, 2).

**d)** Parábola: $p = 2$; V(1, 3); F(2, 3).

**e)** Parábola: $p = 6$; V(2, −3); F(2, 0).

**f)** Elipse: $a = 3$; $b = \sqrt{5}$; C(−3, 3).

**41.** (1, 1) e (1, −1).

**42.** $\left\{\left(-\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{7}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)\right\}$

**43.** Dois pontos: (2, 2) e (0, 2).

**44.** $\frac{30\sqrt{17}}{17}$

**45.** $\sqrt{2}$

**46.** $2x - 4y + 7 = 0$

**47.** $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$

**48.** $m \leq \frac{1}{2}$

**49.** **a)** $A(2\sqrt{2}, 1)$; $B(-2\sqrt{2}, 1)$; $C(-2\sqrt{2}, -1)$ e $D(2\sqrt{2}, -1)$.

**b)** 1

**50.** 3

## Desafio

Alternativa *b*.

# CAPÍTULO 5 Estatística básica

## Exercícios

**1.** **a)** 0,54 **b)** 57 **c)** 46% **d)** Aproximadamente 115°.

**2.** **a)** 360 **b)** 90° e 270°. **c)** 78

**3.** **a)** 3 800 litros por segundo.

**b)** Aproximadamente 16,1 bilhões de litros.

**c)** Gráficos de linhas, pois os valores do volume de água economizado variam no decorrer do tempo.

**4.** **a)** **F**; $9688 < \frac{1}{3}$ de 33 455.

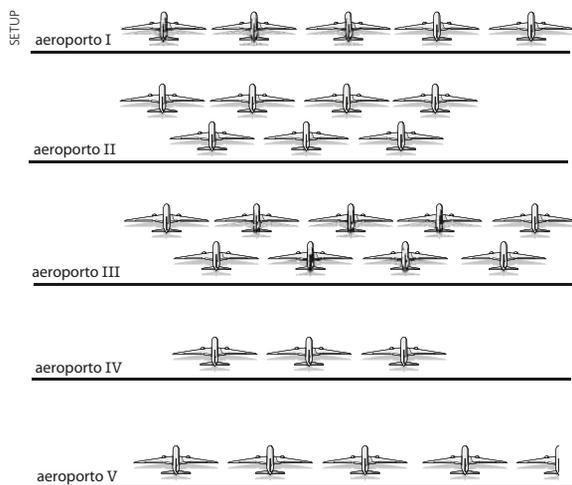
**b)** **V**

**c)** **F**; aumento aproximado de 20%.

**d)** **V**

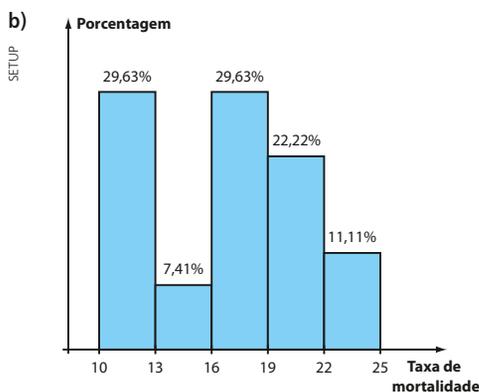
**e)** **F**; a taxa média de variação em 2012-2013 é maior que o quádruplo da taxa em 2013-2014.

**5.** **a)** 70
**b)** 13 234 100
**c)** 3,5%
**d)** 1 384 700
**e)** 50,4° = 50° 24′

**6.** **a)** A resposta é pessoal. Uma boa sugestão é considerar que cada avião representa 1 500 operações.

**b)** 88,5° = 88° 30′

**7.** **a)** Na tabela foram feitos arredondamentos de até 4 casas decimais.

| Taxa de mortalidade infantil | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| 10 ⊢13 | 8 | 0,2963 = 29,63% |
| 13 ⊢16 | 2 | 0,0741 = 7,41% |
| 16 ⊢19 | 8 | 0,2963 = 29,63% |
| 19 ⊢22 | 6 | 0,2222 = 22,22% |
| 22 ⊢25 | 3 | 0,1111 = 11,11% |
| **Total** | 27 | 1,0000 = 100% |

**b)**

**8.** **a)** Região **P**: 6 750 000 habitantes.
Região **Q**: 10 500 000 habitantes.
**b)** 50 habitantes/km$^2$

**9.** **a)** Muito insatisfeito: 28° 48'
Insatisfeito: 115° 12'
Satisfeito: 126°
Muito satisfeito: 90°
**b)** 630
**c)** 48°

**10.** Alternativa *b*.

**11.** **a)** $33,\overline{3}\%$ **b)** $13,\overline{3}\%$

**12.** **a)** $22,\overline{3}$ **b)** 8,4 **c)** 0,1333... **d)** 5 **e)** 3

**13.** R$ 300,00

**14.** a = 4

**15.** 2,68 kg

**16.** **a)** 13 **b)** 10 **c)** 12,6

**17.** **a)** Mulheres. **b)** 24 homens e 56 mulheres.

**18.** **a)** 60
**b)** Aproximadamente 0,82.
**c)** 108°

**19.** 82

**20.** 0,125

**21.** **a)** Não. **b)** 9,5

**22.** **a)** R$ 15 250,00 **b)** R$ 1270,83 **c)** R$ 1475,00

**23.** **a)** 152 **b)** 2,3 filhos.

**24.** **a)** 6,125 **b)** 49

**25.** **a)** **V**
**b)** **V**; a folha de pagamento era de R$ 110 320,00.
**c)** **V**; a média salarial seria R$ 2 858,00.
**d)** **F**; o salário médio seria R$ 2 994,40.

**26.** **a)** 2 m **b)** 2,10 m

**27.** **a)** 3 500 **b)** Não.

**28.** 145,5

**29.** **a)** $\overline{M} = 3,\overline{2}$; Me = 3; Mo = 4.
**b)** $\overline{M} = 17,\overline{6}$; Me = 18; Mo = 18.
**c)** $\overline{M} = 3$; Me = 3; não há moda.
**d)** $\overline{M} = 13,5$; Me = 14; Mo = 15.
**e)** $\overline{M} = 43,7$; Me = 43,5; há duas modas: 43 e 44.

**30.** x = 14 e y = 20.

**31.** **a)** 2 370
**b)** Média: 1,84 banheiro.
Moda: 1 banheiro.
Mediana: 2 banheiros.

**32.** **a)** Média: 2 470,43 bilhões de dólares.
Mediana: 459,50 bilhões de dólares.
A média foi "influenciada" por um valor discrepante: o PIB norte-americano.
**b)** Eliminando o PIB dos Estados Unidos; a nova média é aproximadamente $809,\overline{36}$ bilhões de dólares.

**33.** **a)** R$ 600,00 **b)** 3

**34.** **a)** Média: aproximadamente 1,21.
Mediana: 1,5
Moda: 2
**b)** 1

**35.** **a)** Média: 43,98 °C.
Mediana: 43,9 °C.
Há duas modas: 42,7 °C e 43 °C.
**b)** 45,3 °C

**36.** **a)** Média: $3,\overline{5}$
Mediana: 3
Moda: 3

**b)** Não; não.

**c)** Sim; resposta pessoal.

**37.** **a)** $\sigma^2 = 1$; $\sigma = 1$; $a = 3$.

**b)** $\sigma^2 = 2$; $\sigma \simeq 1,41$; $a = 4$.

**c)** $\sigma^2 = 10,286$; $\sigma \simeq 3,21$; $a = 9$.

**d)** $\sigma^2 = 0$; $\sigma = 0$; $a = 0$.

**e)** $\sigma^2 = 1$; $\sigma = 1$; $a = 3$.

**38.** **a)** $53,\overline{3}$ (reais)$^2$

**b)** Aproximadamente 7,30 reais.

**c)** 24 reais.

**39.** **a)** $\overline{M} = 0,4$ erro/página

Me = 0 erro/página

Mo = 0 erro/página

**b)** $\sigma^2 = 0,44$; $\sigma \simeq 0,66$.

**40.** **a)** **A**: 4; **B**: 2; **C**: 8 e **D**: 6.

A ordem é: B – A – D – C

**b)** $\sigma_C \simeq 2,61$; $\sigma_D \simeq 2,28$

Mais regular: **D**

**c)** $\sigma_A \simeq 1,26$; $\sigma_B \simeq 0,89$

Mais regular: **B**

**41.** Região Sudeste, pois $\sigma$(Sudeste) $\simeq$ 1,74 e $\sigma$(Centro-Oeste) $\simeq$ 1,82.

**42.** Pedro: $\sigma^2 = 1,7$

Paulo: $\sigma^2 = 2,3$

Mais homogêneo: Pedro.

**43.** **a)** $\overline{x} = 1\,512$ reais

$\sigma = 456$ reais

**b)** Diminuir, pois os salários dos novos funcionários são inferiores ao salário médio dos 20 funcionários antigos.

**44.** 4 alunos.

**45.** Candidato **B**.

**46.** 5%

**47.** **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** 2 **c)** 6

**48.** Região **A**: DM = 1

Região **B**: DM = 2,4

Na região **A**.

**49.** 444 reais.

**50.** **a)** 220

**b)** Aproximadamente R$ 690,90.

**c)** De R$ 500,00 a R$ 700,00.

**d)** Aproximadamente 38,64%.

**51.** **a)** 170

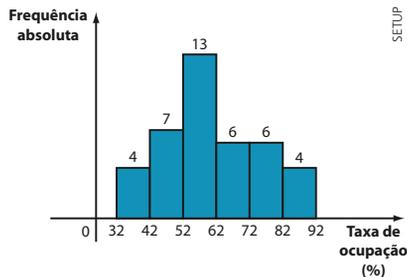
**b)** 98 kg

**c)** Aproximadamente 97,1 kg.

**d)** Aproximadamente 19,4 kg.

**52.** **a)** R$ 108 911,00

**b)** R$ 153 571,00

**53.** **a)**

**b)** Taxa média: 60,75%

Taxa mediana: 58,92%

Classe modal: 52% ⊢ 62%

**c)** 14,44%

**54.** **a)** Média: aproximadamente 30,08 °C.

Mediana: aproximadamente 29,77 °C.

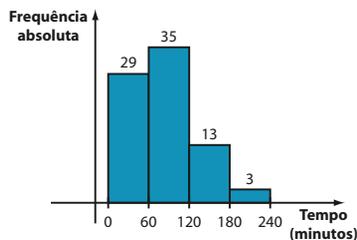
Classe modal: 28 °C ⊢ 31 °C

**b)** Variância: aproximadamente 8,95 (°C)$^2$; desvio padrão: aproximadamente 2,99 °C.

**55.** **a)** 50%

**b)** $\overline{x} \simeq 81,4$ min

Me = 75 min

**c)**

$\overline{x} = 82,5$ minutos; Me $\simeq$ 78,9 minutos; $\sigma \simeq 48,7$ minutos.

## Desafio

**a)** A média aumenta duas unidades; a variância não se altera; o desvio padrão não se altera.

**b)** A média fica multiplicada por 2; a variância fica multiplicada por 4 e o desvio padrão fica multiplicado por 2.

**c)** A média é reduzida em 20%; a variância é reduzida em 36% e o desvio padrão é reduzido em 20%.

# CAPÍTULO 6 Matemática Financeira

## Exercícios

**1.** R$ 57,80

**2.** **a)** R$ 44,80 **b)** R$ 168,00

**3.** **a)** 12,5% **b)** R$ 432,00

**4.** **a)** 16% **b)** R$ 1 507,05

**5.** **a)** Aproximadamente R$ 1,18.

**b)** R$ 1 647,24

**c)** R$ 2 351,25

**6.** B < A = C (B = 20% e A = 25%)

**7.** **a)** R$ 3 500,00 **b)** R$ 134,40

**8.** **a)** R$ 1 250,00

**b)** R$ 1 100,00

**9.** **a)** 1 250 m$^3$

**b)** Aproximadamente 6,98%.

**10.** **a)** $1,38 \cdot p$ **e)** $1,32 \cdot p$

**b)** $1,105 \cdot p$ **f)** $0,68 \cdot p$

**c)** $0,97 \cdot p$ **g)** $1,04 \cdot p$

**d)** $0,876 \cdot p$ **h)** $1,331 \cdot p$

**11.** **a)** Sim; o cliente pagaria R$ 48,00.

**b)** 4%

**12.** **a)** 33%

**b)** Aproximadamente 31,43%.

**c)** Aproximadamente 25,38%.

**13.** Mais vantajosa: II

Menos vantajosa: III

**14.** **a)** **X** **b)** **Y**

**15.** **a)** R$ 105,20

**b)** Aumento aproximado de 1,79%.

**16.** Aproximadamente 16,36%.

**17.** R$ 16,00

**18.** 275%

**19.** **a)** 25% **c)** 30%

**b)** $16,\overline{6}$% **d)** 104%

**20.** 10%

**21.** **a)** R$ 26,40 **c)** R$ 76,80

**b)** R$ 324,00 **d)** R$ 235,20

**22.** R$ 310,00

**23.** 5% a.m.

**24.** **a)** R$ 480,00 **c)** R$ 6 125,00

**b)** R$ 352,80

**25.** Aproximadamente R$ 1,02; R$ 1,09.

**26.** 20 dias de atraso.

**27.** **a)** 20 meses. **c)** 180 meses.

**b)** 40 meses. **d)** 16 meses.

**28.** **a)** 25% ao mês. **b)** 12,5% ao mês.

**29.** **a)** R$ 2 280,00

**b)** Aproximadamente 11,1% ao mês.

**30.** 3,5% ao mês.

**31.** R$ 30 000,00

**32.** **a)** R$ 3 750,00 **c)** R$ 5 200,00

**b)** R$ 12 000,00

**33.** Rafael: R$ 1 800,00

Gabriel: R$ 2 200,00

**34.** **a)** J = R$ 24,73; M = R$ 324,73.

**b)** J = R$ 1 989,64;

M = R$ 4 489,64.

**c)** J = R$ 56,09; M = R$ 156,09.

**d)** J = R$ 114,25; M = R$ 1 014,25.

**35.** O fundo de renda fixa.

**36.** **a)** R$ 1 307,10
**b)** R$ 1 425,45

**37.** **a)** 1 ano: R$ 2 120,00
2 anos: R$ 2 247,20
5 anos: R$ 2 700,00
10 anos: R$ 3 645,00
**b)** 151 meses; 350 meses.

**38.** R$ 500,00

**39.** **a)** R$ 8 000,00
**b)** 60%
**c)** 15 anos.

**40.** **a)** R$ 50 000,00
**b)** R$ 1 550,00

**41.** 20% a.m.

**42.** 7 anos.

**43.** **a)** 60% a.a.
**b)** R$ 2 531,65

**44.** 12 anos.

**45.** **a)** Aproximadamente R$ 26,85.
**b)** 7,4% de valorização.

**46.** **a)** Lucro de R$ 30,00; percentualmente o lucro é de 0,625%.
**b)** 15% de valorização.

**47.** **a)** 4 anos. **c)** 9 anos.
**b)** 6 anos. **d)** 12 anos.

**48.** 100% por semana.

**49.** **a)** 35% **b)** R$ 256,00

**50.** R$ 149 760,00

**51.** 20% ao ano.

**52.** 41

**53.** **a)** R$ 127 584,00 **b)** 4,5 anos.

**54.** Alternativa c.

**55.** **a)** Juros simples: (660, 720, 780, 840, 900) (I)
Juros compostos: (660; 726; 798,60; 878,46; 966,306) (II)
**b)** (I): P.A. de razão 60.
(II): P.G. de razão 1,1.
**c)** Aproximadamente R$ 66,31.

**56.** **a)** R$ 400,00
**b)** Juros simples; 5% a.m.
**c)** R$ 640,00

**57.** **a)** R$ 6 000,00
**b)** Juros compostos; 20% a.a.
**c)** Sim.

**58.** **a)** Juros simples. **c)** R$ 51 000,00
**b)** 30% a.a.

**59.** **a)** V
**b)** F; a razão é 1,12.
**c)** V
**d)** F; o valor é $600 \cdot 1{,}12^6$.
**e)** V

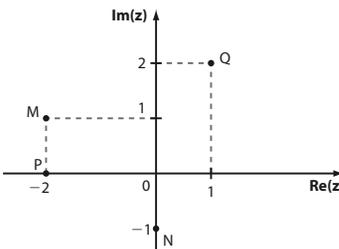
## Desafio

**a)** 10% ao ano. **c)** 8
**b)** R$ 50 000,00

# CAPÍTULO 7 Números complexos

## Exercícios

**1.** **a)** (3, 3) **d)** (6, 2)
**b)** (−14, 5) **e)** (3, −1)
**c)** (3x − 3y, 7x + 2y) **f)** (x, −y)

**2.**

**3.** x = −2 e y = −1.

**4.** **a)** −1 **d)** 1 **g)** −i
**b)** −i **e)** i **h)** 1
**c)** i **f)** −1

**5.** **a)** −i **d)** −1
**b)** 2 048i **e)** 1
**c)** −i **f)** −1 − i

**6.** **a)** −1 + i **b)** −1

**7.** **a)** 3 − 2i **d)** (0, 5)
**b)** −4 + 3i **e)** (−5, 0)
**c)** 4i **f)** (−3, 1)

**8.** **a)** Re(z) = 4 e Im(z) = 5.
**b)** Re(z) = Im(z) = 3
**c)** $\text{Re}(z) = -\frac{2}{3}$ e $\text{Im}(z) = \frac{5}{3}$.
**d)** Re(z) = 0 e $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$.

**9.** **a)** m = 3 **b)** m = −3

**10.** m = −2 e n ≠ 0.
v = 3ni, com n ≠ 0 e w = 4.

**11.** **a)** x = 1 **c)** x < 1
**b)** x = −5 **d)** x < 2

**12.** **a)** m = −4 e n = 4.
**b)** m = −7 e n = 5.
**c)** m = 3 e n = 7.
**d)** m = 1 e n = 2.

**13.** **a)** −10 + 7i **c)** −1 + 6i
**b)** 4 + 2i **d)** 3 + 5i

**14.** u = i e v = 2 − 6i.

**15.** **a)** {−10i, 10i}
**b)** {3 + i, 3 − i}
**c)** {2 + 5i, 2 − 5i}
**d)** {−1, 1, −3i, 3i}
**e)** $\{-i\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$
**f)** {−1, 1, −2i, 2i}

**16.** **a)** {0} **b)** {0, 7 + 3i, 7 − 3i}

**17.** **a)** 2 + 3i e −2 − 3i.
**b)** $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
**c)** $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
**d)** $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**18.** **a)** 7 + 3i **e)** 2
**b)** −14 + 2i **f)** −5 − 12i
**c)** 12 − 3i **g)** 18i
**d)** 25 − 50i **h)** 2 + 11i

**19.** **a)** $16 + \frac{7}{2}i$ **b)** −21 − 20i

**20.** **a)** 32 **c)** −64
**b)** −2 − 2i

**21.** **a)** $x = \frac{3}{2}$ **b)** x = −6

**22.** **a)** −1 − 5i **c)** −2i
**b)** −2 + 2i **d)** −2 − 2i

**23.** **a)** (2, 3) **c)** (63, −16)
**b)** (−8, −1)

**24.** z = a + 3i, em que a ∈ ℝ.

**25.** z = −5 − 4i

**26.** **a)** **z** é um número real ou um imaginário puro.
**b)** z = 0, z = −2i, $z = -\sqrt{3} + i$ ou $z = \sqrt{3} + i$.
**c)** z = 1 + i ou z = −1 − i.

**27.** **a)** $-\frac{6}{5}i$ **e)** $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
**b)** −1 + i **f)** −1 + i
**c)** $-\frac{19}{25} - \frac{33}{25}i$ **g)** $z = \frac{10}{13} - \frac{15}{13}i$
**d)** −i **h)** $z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

**28.** **a)** $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ **c)** $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
**b)** $-\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$

**29.** $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

**30.** a = 6

**31.** m = −2; z = 2.

**32.** $\frac{(1+i)^{53}}{(1-i)^{51}} = 2$

**33.** **a)** $\sqrt{5}$ **c)** 5 **e)** 4
**b)** 5 **d)** 4 **f)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**34.** 4i

**35.** **a)** 26 **c)** 2
**b)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **d)** $2\sqrt{5}$

**36.** x = −2

**37.** **a)** $\sqrt{26}$
**b)** $\sqrt{10}$
**c)** $4\sqrt{5}$

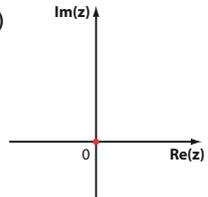
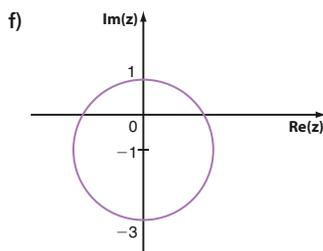
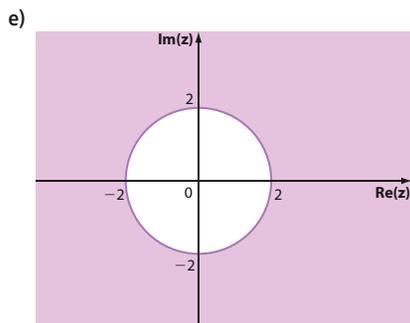
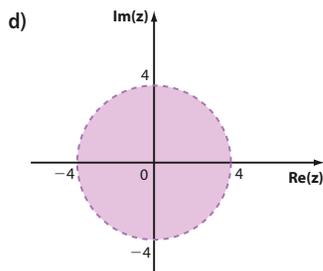
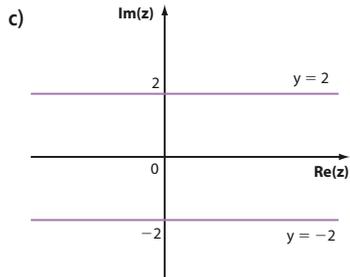
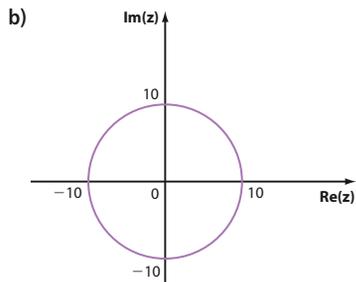
**38.** **a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**e)**

**f)**

**39.** **a)** 30° **f)** 90°

**b)** 330° **g)** $\frac{4\pi}{3}$

**c)** 135° **h)** $\pi$

**d)** 120° **i)** $\frac{11\pi}{6}$

**e)** 225° **j)** $\frac{3\pi}{2}$

**40.** $\theta_1 = 0°$; $\theta_2 = 60°$; $\theta_3 = 120°$; $\theta_4 = 180°$; $\theta_5 = 240°$; $\theta_6 = 300°$.

**41.** **a)** $z = 5(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$

**b)** $z = 2(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

**c)** $z = 2(\cos 300° + i \text{ sen } 300°)$

**d)** $z = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$

**e)** $z = 4(\cos \pi + i \text{ sen } \pi)$

**f)** $z = 3\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{4}\right)$

**g)** $z = 5\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{4}\right)$

**h)** $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}$

**i)** $z = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3}\right)$

**j)** $z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}\right)$

**42.** **a)** $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ e $z^2 = -\frac{1}{2}i$.

**b)** $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 315° + i \text{ sen } 315°)$ e

$z^2 = \frac{1}{2}(\cos 270° + i \text{ sen } 270°)$.

**43.** **a)** $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

**b)** $z = -3 - 3i\sqrt{3}$

**c)** $z = 3i$

**d)** $z = -i$

**e)** $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

**f)** $z = -\sqrt{3} + i$

**g)** $z = -1 + i$

**h)** $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

**44.** **a)** $x = \cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}$

$y = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{4}\right)$

**b)** $x = 2(\cos 210° + i \text{ sen } 210°)$

$y = 4(\cos 300° + i \text{ sen } 300°)$

**45.** $z = 5\sqrt{2}(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$,

com $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

## Desafio

$S = \left\{\cos \frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}\right\} =$

$= \{i, -i\}$

# CAPÍTULO 8 Polinômios

## Exercícios

**1.** *a, c, f* e *g.*

**2.** **a)** 4 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 14 **e)** 3 **f)** 0 **g)** 1 **h)** 120

**3.** **a)** 10 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** −1 **d)** i **e)** 1

**4.** $m \neq -\sqrt{2}$ e $m \neq \sqrt{2}$.

**5.** $k = 2$ ou $k = -2$.

**6.** $m \neq 4$ e $m \neq -4 \Rightarrow$ grau 8;
$m = 4 \Rightarrow$ grau 5;
$m = -4 \Rightarrow$ grau 4.

**7.** **a)** Sim; $m \neq -2$ e $m \neq 2$.
**b)** Sim; $m = 2$.
**c)** Não.

**8.** $a = 0$ e $b = 2$.

**9.** $a = 1$; $b = 5$; $c = 5$ e $d = \frac{5}{2}$.

**10.** **a)** 3 **d)** $-2 - 3i$
**b)** $-1$ **e)** $2 - 5i$
**c)** $-3$ **f)** $-\frac{9}{4}$

**11.** 3, $1 + 2i$.

**12.** $-9$

**13.** $a = 1$ e $b = 2$.

**14.** $x + 3$

**15.** **a)** $1 - 3i$ **b)** $10 + 4i$

**16.** **a)** Sim. **b)** 1 275

**17.** $x^2 + 4$

**18.** $a = -1$ e $b = -2$.

**19.** $m = 0$, $n = 1$ e $p = -i$.

**20.** $m = -4$ e $n = 1$.

**21.** $a = 1$ e $b = -1$.

**22.** 6

**23.** **a)** $x^3 + 2x^2 - 4x + 5$
**b)** $x^3 + x^2 - 2x + 5$
**c)** $-x^3 + 3x^2 - 3x + 7$
**d)** $-2x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 16x - 16$
**e)** $4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

**24.** $a = 4$, $b = -4$ e $c = 3$.

**25.** **a)** $(3 - i)x + 2i$ **c)** $3ix^2 - 2x$
**b)** $2x + 2i$

**26.** $a = 3$ e $b = -3$.

**27.** **a)** Grau 8.
**b)** Grau menor ou igual a 4; podemos obter também o polinômio nulo para o qual não se define o grau.
**c)** Grau menor ou igual a 4; podemos obter também o polinômio nulo para o qual não se define o grau.
**d)** Grau 6.

**28.** **a) V** **b) F** **c) V** **d) V**

**29.** **a)** $q(x) = x + 2$ e $r(x) = 9$.
**b)** $q(x) = -x + 4$ e $r(x) = -6x + 5$.
**c)** $q(x) = 5x^2 + 3x + 18$ e $r(x) = 16x + 71$.
**d)** $q(x) = 3x^2 + 3x + 2$ e $r(x) = 3x^2 - 5x - 1$.
**e)** $q(x) = 0$ e $r(x) = 4x - 1$.
**f)** $q(x) = -5x^2 + 4x + 7$ e $r(x) = -11$.
**g)** $q(x) = x + 3i$ e $r(x) = -6$.

**30.** **a)** Sim; $q(x) = x - 3$.
**b)** Não; $q(x) = x^2$.
**c)** Sim; $q(x) = 2x + 1$.
**d)** Não; $q(x) = x^2 + x - 3$.

**31.** 2

**32.** $x^2$

**33.** Grau de **q** igual a 4; grau de **r** menor que 3 ou $r(x) = 0$ (polinômio nulo).

**34.** $m = 0$ e $n = 2$.

**35.** $3x - 1$

**36.** **a)** $2x + 1$ **c)** Sim; $10x^2 + 4x - 8$.
**b)** Não.

**37.** $x^4 - 2x + 13$

**38.** **a)** 14 **c)** 12 **e)** 12
**b)** 35 **d)** 1 **f)** $-17 - 2i$

**39.** **a)** 4 **b)** $-50$ **c)** 1

**40.** 0

**41.** $m = 0$ e $n = -2$.

**42.** $-\frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$

**43.** $3x + 1$

**44.** **a)** $q(x) = -2x^2 - 2x - 11$; $r(x) = -32$.
**b)** $q(x) = 9x - 6$; $r(x) = 16$.
**c)** $q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$; $r(x) = -5$.
**d)** $q(x) = x^2$; $r(x) = -1$.

**45.** $-6$

**46.** **a)** $-48$
**b)** $q(x) = 4x^3 - 12x^2 + 31x - 91$; $r(x) = 225$.

**47.** $q(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$; $r(x) = 4$.

**48.** 3

**49.** $-5$

## Desafio

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

# Capítulo 9 Equações algébricas

## Exercícios

**1.** **a)** $3 + 4i$ e $3 - 4i$; $(x - 3 - 4i)(x - 3 + 4i)$.
**b)** 2 e $\frac{1}{2}$; $2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
**c)** 0, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$; $2x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$.

**2.** $(x - 5) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$

**3.** $(x^2 - 4x + 5) \cdot (x + 3)$

**4.** **a)** $x^2 - 2x + 5 = 0$, por exemplo.
**b)** $x^2 - 2x - 15 = 0$, por exemplo.
**c)** $2x^2 + x = 0$, por exemplo.

**5.** **a)** $x^3 - 4x^2 - 2x + 20 = 0$, por exemplo.
**b)** $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$, por exemplo.

**6.** $S = \{2, 4, -9\}$

**7.** $S = \left\{\frac{3}{2}, -2 + i, -2 - i\right\}$

**8.** **a)** $-5$
**b)** 2 ou $-1$.

**9.** Duas.

**10.** $-144$

**11.** **a)** $S = \{0, 4, -6\}$
**b)** $S = \{0, 3, -1\}$
**c)** $S = \left\{\frac{1}{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$
**d)** $S = \{-1, -i, i\}$

**12.** $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$.

**13.** $3 + i$ e $3 - i$.

**14.** **a)** 0
**b)** $a = 1$, $b = -7$ e $c = 6$.
**c)** $S = \{-3, 1, 2\}$

**15.** **a)** $p = 0$ e $q = -1$.
**b)** 7
**c)** $-1$
**d)** $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

**16.** **a)** 3
**b)** $-3, 0, 3$.
**c)** $p = 0$, $q = -9$ e $r = 0$.

**17.** $S = \{1 + 3i, 1 - 3i, 5, 1\}$

**18.** **a)** $(y - 1) \cdot (y + 5)$
**b)** 4
**c)** $-1, 3, 1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}$.

**19.** **a)** $0 \to$ multiplicidade 3
$-2 \to$ multiplicidade 4
$1 \to$ multiplicidade 2
$-6 \to$ multiplicidade 1
**b)** 10
**c)** $S = \{0, -2, 1, -6\}$

**20.** **a)** 4
**b)** $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 32x = 0$, por exemplo.

**21.** **a)** $x^3 + x^2 - 21x - 45 = 0$, por exemplo.
**b)** $x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36 = 0$, por exemplo.

**22.** $S = \{3, -4, 1\}$

**23.** **a)** $m = -12$ **b)** $\frac{3}{4}$

**24.** $S = \{-1, 0, 4\}$

**25.** Multiplicidade 3; $-2$.

**26.** $S = \{5, -10\}$

**27.** $-2$ é raiz dupla e $\frac{1}{2}$ é raiz dupla.

**28.** **a)** $a = -5$; $b = 3$; $c = 9$.
**b)** 3 é raiz dupla e $-1$ é raiz simples.

**29.** **a)** 3 **c)** $\frac{1}{2}$ **e)** 109
**b)** 6 **d)** $-3$ **f)** 441

**30.** **a)** $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$. **b)** $-\frac{1}{4}$

**31.** **a)** $a = -2$ e $b = 5$.
**b)** $\frac{1 + i\sqrt{19}}{4}$ e $\frac{1 - i\sqrt{19}}{4}$.

**32.** $p = 15$ ou $p = -15$.

**33.** **a)** $-2$ **c)** $-5$ **e)** $\frac{6}{5}$
**b)** $-6$ **d)** $\frac{2}{5}$

**34.** $S = \{2, 3, 4\}$

**35.** $S = \left\{2, 4, \frac{1}{2}\right\}$

**36.** $p = -6$ e $q = 25$.

**37.** **a)** $-4$
**b)** $S = \{3, -2, 2\}$
**c)** $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$, por exemplo.

**38.** **a)** $m = -189$ **b)** $-3$, 9 e $-27$.

**39.** **a)** $S = 0$ e $P = -6$. **c)** $S = 0$ e $P = 2$.
**b)** $S = 3$ e $P = -1$. **d)** $S = 0$ e $P = -3$.

**40.** $S = \{2, 3, 5\}$

**41.** **a)** 8, 10 e 12.
**b)** $m = 296$ e $n = -960$.

**42.** $S = \{1, i, -i\}$

**43.** **a)** $p = 11$
**b)** $S = \left\{-\frac{1}{2}, 3 + 4i, 3 - 4i\right\}$

**44.** $S = \{1, -3\}$

**45.** **a)** 4
**b)** 3; $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, por exemplo.
**c)** 4; $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, por exemplo.

**46.** $S = \{3 + 5i; 3 - 5i; 3\}$

**47.** $a = 2$ e $b = 20$.

**48.** **a) V** **c) F** **e) F**
**b) F** **d) V**

**49.** **a)** $a = \frac{1}{2}$, $b = -4$ e $c = 10$.
**b)** (4, 2)

**50.** $S = \left\{1 - 2i, 1 + 2i, -\frac{1}{3}i, \frac{1}{3}i\right\}$

**51.** **a)** $-18$
**b)** $S = \{-3i, 3i, 4, -2\}$

**52.** $p = -4$; $q = 5$; $r = -4$ e $s = 4$.

**53.** $m = -2$ e $n = 0$.

**54.** 5

**55.** A equação tem três raízes racionais: $\frac{1}{2}$, $-4$ e 3.

**56.** **a)** $S = \left\{2, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$
**b)** $S = \{-4, 2, 3\}$

**57.** 5

**58.** $S = \{-2, 1, -2i, 2i\}$

**59.** **a)** As possíveis raízes racionais dessa equação são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Fazendo a verificação, observamos que nenhum desses números é raiz dessa equação.
**b)** $S = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\right\}$

**60.** **a)** 1
**b)** $S = \{1, 2 - i, 2 + i\}$

**61.** $\frac{1}{4}$, $3 - 2i$ e $3 + 2i$.

**62.** $x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$ ou $x = 8$.

**63.** $-2, 1, 4, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

## Desafio

**a)** $-3 -4i$, $-3 + 4i$, 2 e 4.
**b)** $p = -102$ e $q = 200$.

# ÍNDICE REMISSIVO

## A



## B



## C



## D



## E



## F

## G



## H



## I



## J



## L



## M



## N



## P

## SUGESTÕES PARA OS ESTUDANTES

- ***A Matemática das coisas*: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas**
  **Nuno Crato (adaptação de Ruth Ribas Itacarambi). 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.**
  O livro está dividido em cinco temáticas: Coisas do dia a dia, A Terra é redonda, Coisas secretas, Arte e Geometria e Coisas Matemáticas. Para cada uma dessas temáticas, o autor apresenta curtas e interessantes resenhas que ilustram a presença da Matemática em nossas vidas, sem fórmulas muito específicas ou cálculos complicados.
- ***Almanaque das curiosidades Matemáticas***
  **Ian Stewart. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.**
  O livro está dividido em inúmeras seções, compondo uma miscelânea de curiosidades e quebra-cabeças lógicos, geométricos, numéricos e probabilísticos. Algumas seções abordam velhos problemas que já causaram repercussão na mídia fora do Brasil, como o problema dos bodes e o problema da pesagem das 12 bolas.
- ***Galileu e o sistema solar em 90 minutos***
  **(Coleção Cientista em 90 minutos) Paul Strathern. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.**
  O autor apresenta um panorama da vida e da obra de Galileu – primeiro cientista a descrever o Sistema Solar tal como o conhecemos e que, ao desenvolver o telescópio, permitiu que também partilhássemos desse espetáculo. Pode ser uma leitura interessante caso queiram aprofundar as informações da seção Aplicações do capítulo 4.
- ***Mania de Matemática 2:* novos enigmas e desafios matemáticos**
  **Ian Stewart. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.**
  Nessa obra, construída em uma linguagem comum e acessível, há uma grande variedade de desafios, mistérios, paradoxos e quebra-cabeças.
- ***O caderno secreto de Descartes***
  **Amir D. Aczel. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.**
  Em um misto de biografia e aventura investigativa, o autor conta a história de vida de René Descartes: sua passagem por quase 10 países da Europa, sua adesão à fé católica, sua formação privilegiada e o encontro com filósofos e matemáticos que influenciariam seus pensamentos, mostrando que seu legado vai muito além das coordenadas cartesianas.
- ***O romance das equações algébricas***
  **Gilberto G. Gardi. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.**
  O livro aborda a história da resolução das equações algébricas passando por Al-Khowarizmi, Bhaskara, Cardano, Tartaglia, Descartes e Gauss, entre outros. Alguns assuntos abordados são bem específicos, como a demonstração da resolução de equações do 3º e do 4º grau; outros mais acessíveis, como a explicação da regra de sinal da multiplicação.
- ***O teorema do papagaio:* um *thriller* da história da Matemática**
  **Denis Guedj. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.**
  A obra é um "suspense matemático policial" que, por meio de uma história cheia de intrigas, aventuras e enigmas, conduz o leitor a passagens da história do pensamento matemático desde a Antiguidade até o século XX, de maneira criativa e inusitada. Tales, Pitágoras, Tartaglia, Euler e Fermat são alguns dos filósofos a ter sua vida e obra narrada nesse romance.
- ***Os segredos matemáticos dos Simpsons***
  **Simon Singh. Tradução por Catarina Pinheiro. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2016.**
  Os roteiristas dessa famosa série da TV são físicos e matemáticos que rechearam seus episódios com sutis referências a questões matemáticas envolvendo probabilidade, o Último Teorema de Fermat, primos de Mersenne, número $\pi$, aritmética, entre outros temas.
- ***Turing e o computador em 90 minutos***
  **(Coleção Cientista em 90 minutos) Paul Strathern. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.**
  O livro retrata a vida e o legado de Alan Turing, pioneiro no desenvolvimento do computador contemporâneo que ajudou a decifrar códigos durante a Segunda Guerra Mundial.

Os vídeos seguintes pertencem à série: *Matemática na Escola* e estão disponíveis em <www.m3.ime.unicamp.br>. Acesso em: 28 abr. 2016.

- ***A comunidade***
  Assunto: Circuncentro do triângulo e Geometria Plana e Analítica
  Quando assistir: ao estudar os capítulos 1 e 3 – O ponto e A circunferência
- ***Atleticano × Rio-Grandense***
  Assunto: Medidas de centralidade e dispersão
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Estatística básica
- ***Atuário e estatístico***
  Assunto: Profissões: estatístico e atuário
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Estatística básica
- ***Embalagens***
  Assunto: Polinômios e funções polinomiais
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 8 – Polinômios
- ***Huguinho e Zezinho***
  Assunto: Matemática financeira e juros compostos
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 6 – Matemática Financeira
- ***Jardim de números***
  Assunto: Plano cartesiano
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 1 – O ponto
- ***Na cauda do cometa***
  Assunto: Cônicas e astronomia
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 4 – As cônicas
- ***Olha o sanduíche***
  Assunto: Média, mediana e moda
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Estatística básica
- ***Tesouro cartesiano***
  Assunto: Sistema de coordenadas
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 1 – O ponto

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CRESPO, Antonio Arnot. *Estatística fácil*. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Métodos quantitativos*: Matemática financeira. 4. ed. São Paulo: Atual, 1996.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira. *A matemática do Ensino Médio*. v. 3. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Estatística básica*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

_______; _______; HAZZAN, Samuel. *Cálculo*: Funções de uma e várias variáveis. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

WAGNER, E.; MORGADO, A. C. O.; CARMO, M. P. *Trigonometria e números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

# Orientações Didáticas

# APRESENTAÇÃO

O livro de Matemática é um importante material de apoio às atividades do estudante, tanto em sala de aula quanto em casa, servindo como fonte de informações teóricas, roteiro de exercícios e problemas, estimulador de reflexões e pesquisas, entre outros objetivos. Entretanto, o livro não substitui o professor, o principal mediador das atividades que conduzem à aprendizagem.

Nesse sentido, nossa intenção foi propor algo que realmente auxilie e complemente o trabalho do professor. Assim, para esclarecer os principais pontos do nosso livro, elaboramos as Orientações Didáticas que acompanham cada volume desta coleção.

As Orientações Didáticas são compostas de duas partes.

A primeira parte é geral, isto é, comum aos três volumes, e subdividida em tópicos. Em um primeiro momento, apresentamos os eixos de trabalho, os objetivos que buscamos atingir e a estrutura detalhada do livro.

Sugerimos a leitura de parte de dois documentos; um deles trata da escolha dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o outro, das três grandes competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

A seguir, abordamos a avaliação, o que avaliamos e os instrumentos de avaliação. Para auxiliar o professor, procuramos mostrar exemplos de várias situações apresentadas no texto, além de propor um momento de estudo, com a leitura de fragmentos de dois textos sobre avaliação, de autores de referência no assunto.

O último tópico da parte geral das Orientações Didáticas traz uma ampla e atualizada lista com sugestões de leitura e consulta para o professor.

A segunda parte das Orientações Didáticas é específica para cada volume.

Em um primeiro momento, descrevemos os conteúdos e conceitos que serão apresentados, listando seus objetivos específicos.

Há também sugestões de abordagem para os conteúdos, com algumas possibilidades de avaliação. Procuramos destacar os assuntos mais importantes em cada volume.

Em seguida, para a seção *Troque ideias* é apresentado um comentário geral, com encaminhamentos, objetivos, competências relacionadas e sugestões para o professor mediar a atividade. Há também a solução de todos os exercícios propostos.

Por fim, há sugestões de atividades em grupo, devidamente detalhadas em seus objetivos, desenvolvimento, material e resolução comentada. Muitas dessas atividades podem servir como fontes de avaliação.

Como todos os livros desta coleção apresentam variadas listas de exercícios, problemas e desafios, inevitavelmente, os estudantes consultarão o professor. Assim, na última parte, encontra-se a resolução de todas as questões e atividades propostas.

Esperamos que estas Orientações Didáticas permitam uma melhor compreensão da nossa obra e possam otimizar o trabalho cotidiano do professor.

***Os autores***

# SUMÁRIO

# COMENTÁRIOS GERAIS

## Conheça esta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio, procuramos proporcionar ao estudante conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competências, ao exercício da cidadania e à continuação de seus estudos em outros cursos.

Tivemos também o objetivo de contribuir com o trabalho do professor, pautando-nos em nossa prática pedagógica. Vale salientar que acreditamos na autonomia do educador, cuja prática docente não deve ser limitada pelo livro didático, o qual tem o papel de indicar caminhos, respeitando a proposta pedagógica da escola e do professor. No entanto, para que o livro didático seja um auxiliar confiável, é necessário que os conceitos sejam apresentados com precisão, a linguagem e o rigor sejam compatíveis com essa etapa da escolaridade, as propriedades sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, os conteúdos estejam integrados e os conhecimentos matemáticos possam ser aplicados em situações cotidianas ou usados em outras áreas do saber, construindo, dessa maneira, aprendizagens significativas.

## Principais eixos

O programa desenvolvido nos três volumes pode ser pensado em grandes tópicos, a saber:

- Números;
- Funções;
- Geometria;
- Estatística, contagem e probabilidade;
- Álgebra.

Os conteúdos e os conceitos construídos em cada volume têm sua escolha com base nos seguintes critérios:

- favorecer a autonomia intelectual dos estudantes, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos;
- possibilitar a integração entre diversos tópicos do programa de Matemática;
- possibilitar a aplicação dos conhecimentos matemáticos a outras áreas do conhecimento;
- favorecer a aquisição de habilidades e competências;
- atender às sugestões da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (SEB/MEC) por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (2002), PCN+ (2002), e também pelo documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática* (2006);
- atender às sugestões preconizadas na matriz curricular do Enem;
- levar em conta a prática pedagógica dos professores-autores desta proposta;
- respeitar as diferentes propostas pedagógicas presentes nas escolas brasileiras.

Antes de iniciarmos a explanação sobre os eixos de trabalho, vale destacar que logo no início do volume 1 há um capítulo sobre noções de conjuntos, em que são abordados, de maneira simplificada, os conceitos básicos, a linguagem simbólica e as operações com conjuntos. A apresentação desse tópico tem por objetivo familiarizar os estudantes com a linguagem matemática, auxiliando-os na construção dos conceitos que serão apresentados ao longo da coleção.

### Números

Embora esse eixo seja trabalhado de maneira geral nos três volumes da coleção, dá-se maior ênfase a ele nos volumes 1 e 3. No primeiro deles, é feita uma revisão de conceitos já apresentados no Ensino Fundamental relacionados aos números naturais, números inteiros e números racionais nas formas decimal e fracionária. A seguir, são abordados os números irracionais e os números reais – campo fértil para a exploração dos intervalos reais. No volume 3 são apresentados os números complexos nas formas algébrica e polar e suas operações na forma algébrica.

### Funções

Esse eixo é desenvolvido nos três volumes, com ênfase maior nos volumes 1 e 2. No volume 1 são estudados o conceito geral de função, a leitura e a construção de gráficos, a função afim, a função quadrática, a função definida por várias sentenças, incluindo-se aí a função modular, a função exponencial, a função logarítmica e as sequências. As progressões aritmética e geométrica são apresentadas como funções com domínio no conjunto dos naturais. No volume 2 abordam-se as funções trigonométricas, enfatizando-se o conceito de período de uma função e revisando-se outros conceitos como paridade, conjunto imagem etc. Todo esse estudo é precedido pela apresentação da circunferência trigonométrica. Nos textos de aplicações da Geometria Métrica Espacial revisamos a função afim, o conceito de proporcionalidade e a função quadrática. No volume 3 são introduzidas as funções polinomiais de grau maior ou igual a 2, ainda que, em seu estudo, sejam abordados vários aspectos algébricos.

Nos três volumes, há representações gráficas das funções construídas com o auxílio de *softwares* livres de Matemática como o GeoGebra e o Graphmática.

Com o estudo da Matemática Financeira, nesse último volume, são retomados conceitos ligados a função afim e progressões aritméticas; a função exponencial e progressões geométricas; à função logarítmica, com o uso de logaritmos e suas propriedades na resolução de equações exponenciais provenientes dos problemas de juros compostos.

### Geometria

Esse eixo é trabalhado nos três volumes. No volume 1 é feita uma revisão de segmentos proporcionais e do teorema de Tales; de semelhança (em particular a semelhança de triângulos) e de relações nos triângulos retângulos, incluindo-se, naturalmente, o teorema de Pitágoras. A seguir são introduzidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Ainda nesse volume é feito um estudo completo sobre áreas de superfícies planas, consolidando-se conceitos construídos no Ensino

Fundamental. Alguns elementos da Geometria Analítica são abordados, especialmente no estudo da função afim e quadrática (plano cartesiano, determinação da equação de uma reta, interseção de retas, parábola etc.). No volume 2, a resolução de triângulos é estendida aos triângulos acutângulo e obtusângulo com o estudo da lei dos senos e da lei dos cossenos e cálculo da área de um triângulo. Em seguida, é realizado um estudo predominantemente intuitivo da Geometria Espacial de Posição, finalizando com a Geometria Métrica dos Sólidos, abordando de forma abrangente áreas e volumes dos principais poliedros e corpos redondos. No volume 3 é feito o estudo completo da Geometria Analítica: ponto, reta, circunferência e cônicas.

### Estatística, contagem e probabilidade

Esse eixo é trabalhado nos três volumes.

No volume 1 iniciamos o estudo da Estatística, enfatizando sua importância social e as etapas de planejamento de uma pesquisa. Em seguida, destacamos a construção e interpretação de tabelas de frequência e representações gráficas.

No volume 2, em Análise Combinatória, destacam-se o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e outros métodos de contagem com base nele. Em seguida, é feito o estudo completo de probabilidades.

No volume 3 complementamos o estudo da Estatística: revisamos tabelas de frequência e gráficos, e fazemos um estudo abrangente das medidas de centralidade (ou posição) e dispersão (ou variabilidade) para resumir e caracterizar um conjunto de dados.

### Álgebra

Esse eixo é tratado nos três volumes. No volume 1, a Álgebra está disseminada no estudo de funções, uma vez que equações e inequações são partes integrantes do texto. No volume 2, é feito o estudo das matrizes e sistemas lineares, incluindo-se uma rápida "passagem" pelos determinantes. No volume 3, a Álgebra se faz presente no estudo dos polinômios e equações algébricas.

## Objetivos gerais da coleção

- Consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, indispensáveis ao exercício da cidadania.
- Proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades que lhe possibilitem competir no mercado de trabalho.
- Possibilitar ao estudante o reconhecimento das inter-relações entre os vários campos da Matemática, e desta com as outras áreas do conhecimento.
- Proporcionar ao estudante conhecimentos básicos que lhe permitam continuar seus estudos em cursos de tecnologia ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral.

## Nesta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio – etapa final da educação básica –, procuramos atender às necessidades dos estudantes de hoje, com base em nossa experiência em sala de aula e nas orientações dos documentos oficiais do MEC, acompanhando as significativas mudanças desse ciclo nas escolas brasileiras, em particular no que diz respeito à Matemática.

Há importantes avanços da Educação Matemática nos processos de ensino e aprendizagem nesta área do conhecimento, objetivando que o "fazer Matemática com compreensão" seja estendido a todos os estudantes, de modo que eles reconheçam a Matemática como uma ciência de grande relevância social, que se organiza segundo características próprias e desenvolve importantes habilidades, favorecendo a autonomia intelectual.

A consecução dos objetivos da coleção listados anteriormente pressupõe um trabalho pedagógico planejado, articulado e organizado por parte do corpo discente do colégio. Acreditamos que nossa proposta nesta coleção possa viabilizar, orientar e facilitar esse desafiador trabalho do professor.

Dois grandes pilares norteiam e caracterizam a coleção:

- o caráter prático e utilitário da Matemática, presente nas necessidades cotidianas do cidadão e nas variadas atividades humanas, exibido na coleção em contextualizações relacionadas às práticas sociais, a outras áreas do conhecimento ou à própria História da Matemática;
- o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas específicas da Matemática, possibilitando ao estudante reconhecer e compreender as características particulares dessa ciência, que utiliza métodos próprios para a construção dos conhecimentos e validação das propriedades.

Com relação às escolhas metodológicas da coleção, destacamos que, de maneira geral, os conteúdos e conceitos são introduzidos por meio de um exemplo ou de uma situação-problema ou, ainda, de uma situação "motivadora", que é retomada no desenvolvimento do capítulo. Na sequência, ocorre a formalização e a sistematização teórica, em que optamos por manter, como características da coleção, a linguagem e o rigor matemático necessário (adequados à faixa etária), a clareza e a precisão nas definições e na construção dos conceitos, bem como as justificativas lógicas nas demonstrações. Atividades diversas como exemplos, exercícios resolvidos e problemas variados complementam tal organização.

Nessa estrutura de apresentação e desenvolvimento teórico, encontram-se, intencionalmente intercaladas às definições, exemplos, propriedades e exercícios, os boxes *Pense nisto* e a seção *Troque ideias*, que têm por objetivos convidar o estudante a participar mais ativamente das discussões que podem ser levantadas a partir do desenvolvimento teórico e colocá-lo em um papel mais ativo no processo de construção dos conhecimentos de Matemática.

A seguir, apresentamos alguns textos e detalhamentos sobre como entendemos alguns temas trabalhados nesta coleção.

### Resolução de problemas

*Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de um problema qualquer. O problema pode ser modesto, mas se ele*

*desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.*

*Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.*

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* (Prefácio.) Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Na introdução de vários capítulos desta coleção são apresentadas situações-problema que têm por objetivo motivar o estudante para a construção dos conceitos que serão trabalhados e que poderão auxiliá-lo na busca de caminhos para resolver os problemas propostos. Frequentemente, esses problemas são retomados ao longo do capítulo, sendo apresentada uma solução.

A resolução de problemas aparece em muitas das séries de exercícios, incluindo os *Desafios* (dos quais falaremos adiante).

A seguir, apresentamos como exemplo para o leitor a resolução de um problema seguindo as quatro etapas de resolução sugeridas por Polya.

*Problema*: Uma escada de 25 dm de comprimento encontra-se apoiada em um muro, do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual será o deslocamento vertical verificado pela extremidade superior da escada? Admita que o muro seja perpendicular ao solo.

**1ª etapa**: Compreender o problema.

É preciso identificar a incógnita, os dados e a condicionante, traçando, quando for pertinente, uma figura usando notação adequada.

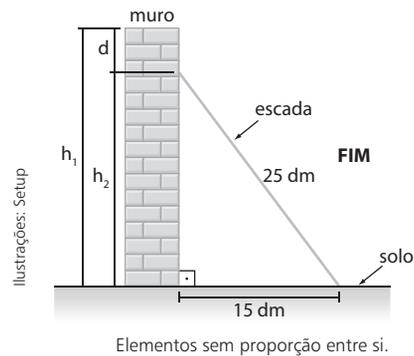
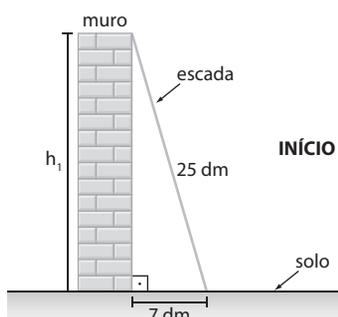
*Qual é a incógnita?*

O deslocamento vertical registrado pelo extremo superior da escada, isto é, a diferença entre os pontos mais altos atingidos pela escada; indicaremos pela letra **d**.

*Quais são os dados?*

- Comprimento da escada: 25 dm.
- Distância inicial do muro ao pé de apoio da escada: 7 dm.
- Distância final do muro ao pé de apoio da escada: 15 dm (7 dm + 8 dm = 15 dm).

*Traçado da figura*

Elementos sem proporção entre si.

**2ª etapa**: Estabelecer um plano.

Segundo Polya: *Consideramos que temos um plano quando, ao menos em linhas gerais, sabemos quais são os cálculos, construções etc. que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado.*

Necessitamos encontrar uma conexão entre as informações fornecidas no enunciado e a incógnita (**d**) do problema.

O plano é determinar a altura do ponto mais alto que a escada atinge no muro ($\mathbf{h_1}$) e, em seguida, determinar a altura ($\mathbf{h_2}$) do ponto mais alto que a escada atinge depois de seu pé ter se afastado. É importante perceber que a hipotenusa dos dois triângulos retângulos é a mesma, pois sua medida corresponde ao comprimento da escada, que não se altera.

Basta fazer, em seguida, a diferença entre $\mathbf{h_1}$ e $\mathbf{h_2}$ para obter o deslocamento vertical (**d**).

**3ª etapa**: Executar o plano.

Usando o teorema de Pitágoras para a situação inicial e a final, temos:

Situação inicial:

$h_1^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1^2 = 625 - 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = \sqrt{576} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 24$ dm

Situação final:

$h_2^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2^2 + 225 = 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \sqrt{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 20$ dm

Deslocamento vertical (**d**):

$d = h_1 - h_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 24 \text{ dm} - 20 \text{ dm} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 4$ dm

**4ª etapa**: Fazer uma retrospectiva da resolução, revendo-a e analisando-a.

É importante mostrar aos estudantes que, ao chegar à solução do problema, não se deve acreditar que a atividade está finalizada e passar ao problema seguinte ou a outro assunto. É fundamental rever todas as etapas envolvidas na resolução, verificar o resultado obtido, a coerência da resposta encontrada, verificar o argumento usado na resolução (no caso, o argumento que torna a resolução possível é o teorema de Pitágoras), além de considerar outras possíveis formas de resolver o problema.

Acreditamos que a descrição acima, sem a pretensão de ser uma "receita mágica", possa ajudar o professor na construção conjunta com os estudantes de uma rotina nas atividades de resolução de problemas, favorecendo gradativamente sua autonomia intelectual. Por fim, é preciso sempre lembrar que a resolução de problemas demanda tempo, e o professor deve ficar atento para não suprimir etapas.

## História da Matemática

Em vários capítulos dos três volumes desta coleção são apresentados textos ou pequenas referências à História da Matemática, os quais têm por objetivo colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática ou simplesmente situá-lo na linha do tempo. Essa criação, em geral, está ligada às necessidades da humanidade ao longo da história. Por exemplo, as referências históricas no livro sobre a criação dos logaritmos revelam a necessidade histórica de um instrumento de cálculo capaz de auxiliar o desenvolvimento da astronomia, do comércio e da navegação nos séculos XVI e XVII. Com o desenvolvimento tecnológico do século XX (computadores, calculadoras etc.), tal finalidade perdeu sua importância.

É importante que o estudante perceba o caráter acumulativo da Matemática e o fato de que suas fronteiras estão em contínua expansão, como mostra o infográfico sobre geometria fractal, na seção *Aplicações* no volume 2. Nele, as referências históricas, bem mais recentes (século XX), revelam o surgimento desse ramo da Matemática associado à necessidade de compreender formas geométricas que a geometria euclidiana não explicava.

## Integração de conteúdos

Muitas vezes são estabelecidas no livro-texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática já estudados em outros capítulos ou mesmo em volumes anteriores, favorecendo a não fragmentação dos conteúdos. Um currículo mais integrado tende a motivar os estudantes para a aprendizagem em Matemática. A seguir, vamos exemplificar alguns casos onde isso ocorre nesta coleção.

No volume 1, ao definirmos as progressões como um caso particular de função com domínio no conjunto dos números naturais, relacionamos a função afim à progressão aritmética e a função exponencial à progressão geométrica; o conceito de semelhança é usado na apresentação e definição das razões trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo; o sinal de uma função é usado para resolver inequações do 1º e do 2º grau etc.

No volume 2, é possível notar a integração da Trigonometria com a Geometria por meio da resolução de triângulos quaisquer com o uso da lei dos senos e da lei dos cossenos (nesse ponto, são usadas as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo e de seu suplementar) e de outras relações trigonométricas na resolução de problemas geométricos.

Além disso, o estudo da Geometria Métrica Espacial é ligado, nos textos de aplicações e nas atividades da seção *Troque ideias*, às funções polinomiais do 1º e 2º graus.

No volume 3, o estudo da equação da reta é associado à função afim; o estudo da parábola relaciona-se à função quadrática; e o estudo da hipérbole é associado, num caso particular, à função recíproca. Na apresentação dos polinômios, recorremos à Geometria para expressar a área de figuras planas e da superfície de figuras espaciais e o volume de alguns poliedros.

Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, há outras propostas de atividades que promovem essa integração. No volume 1, citamos a atividade 9 do item *Sugestões de atividades em grupo,* que relaciona semelhança de triângulos e gráficos estatísticos; no volume 2, destacamos a atividade 4 que integra Álgebra e Geometria, na relação entre produtos notáveis e o volume do paralelepípedo, e a atividade 7 sobre fractais geométricos, que relacionam conceitos de sequências numéricas, área e perímetro.

No volume 3, a atividade 5, de Matemática Financeira, relaciona juros compostos às progressões geométricas e a atividade 3 integra matrizes, Geometria Analítica e semelhança.

## Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento

*[...]*

*Contextualizar o conteúdo que quer ser aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola básica, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática na qual a linguagem exerce papel decisivo.*

*O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões da vida ou os contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania. As competências estão indicadas quando a lei prevê um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática.*

*[...] é possível generalizar a contextualização como recurso para tornar a aprendizagem significativa ao associá-la com experiências da vida cotidiana ou conhecimentos adquiridos espontaneamente. É preciso, no entanto, cuidar para que essa generalização não induza à banalização, com o risco de perder o essencial da aprendizagem escolar que é seu caráter sistemático, consciente e deliberado. Em outras palavras: contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato da transposição didática para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianeidade. [...]*

Trechos do parecer nº 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional da Educação.

No início de vários capítulos desta coleção são propostos problemas ou situações presentes no contexto cotidiano, como forma de motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados no capítulo. Em geral, no desenvolvimento do capítulo, tais problemas são retomados.

As séries de exercícios também contemplam uma grande variedade de problemas, nos quais se enfatiza a contextualização com situações reais e cotidianas.

Em diversos capítulos dos três volumes são apresentados textos complementares na seção *Aplicações*, alguns deles na forma de **infográficos**.

Há textos que possibilitam aplicar os conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física (taxa de variação de função e velocidade média, a intensidade dos sons e a escala logarítmica; elipse e gravitação); Matemática e Química (função exponencial e decaimento radioativo); Matemática e Programação linear (Geometria Analítica e problemas de maximização); Matemática e Geologia (logaritmos e escala Richter); Matemática e Arte (número de ouro; Geometria e arte fractal); Matemática e mercado de trabalho (construção de tabelas de frequência em planilhas eletrônicas; curvas de aprendizagem); Matemática e Astronomia (no infográfico que mostra o criativo método usado por Eratóstenes na estimativa para a medida do raio da Terra); Matemática e o mundo digital (matrizes e *pixels*) etc. Em alguns momentos, os textos abordam temas transversais como a Cidadania, por exemplo; nos capítulos de Estatística apresentamos textos sobre os Censos Demográficos e a interpretação de resultados de uma pesquisa eleitoral.

Em algumas atividades, como nas seções *Troque ideias*, os estudantes, trabalhando em equipe, são convidados a construir conceitos em outras áreas do conhecimento, no intuito de vivenciar aprendizagens significativas. Podemos citar atividades que relacionam a Matemática à Economia (funções custo, receita e lucro; problema de maximização de receita); Matemática e Biologia (meia-vida de medicamentos); Matemática e Química (sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas); Matemática e Meteorologia (índices pluviométricos) etc.

Outros textos e atividades aprofundam os conceitos que estão sendo formados e auxiliam na construção de outros. Como exemplo, o texto que liga os jogos de azar à probabilidade (Matemática, futebol e loteria, no volume 2); a atividade sobre a Mega-Sena (volume 2); a atividade que ilustra o movimento de uma roda-gigante às funções trigonométricas (volume 2); os textos e as atividades sobre compras à vista ou a prazo (no capítulo de Matemática Financeira, volume 3).

Na parte específica destas Orientações Didáticas, há sugestões de atividades em grupos relacionadas a alguns desses textos e também a assuntos inéditos, para os professores que queiram ampliar e aprofundar a discussão sobre os temas envolvidos. Essas atividades também podem servir como instrumento diversificado de avaliação.

As propostas de atividades em grupo na seção *Troque ideias* visam ao fortalecimento, em sala de aula, das interações aluno-aluno, tendo o professor o papel de mediador. Nessas atividades pretende-se colocar os estudantes em situações mais investigativas.

As atividades propostas podem incluir:

- **Modelagem matemática**, por meio do uso de funções na descrição de fenômenos em outras áreas do conhecimento, como: o uso de função afim na representação dos custos, receitas e lucro de empreendimentos simples; o uso da função quadrática em problemas de maximização da receita; o uso da função exponencial na composição do conceito de meia-vida de medicamentos; ou o uso das funções trigonométricas para aproximar o movimento das marés.
- Atividades de **integração de conteúdos**, como: a que relaciona o volume de um cone e as funções; a que utiliza polinômios para representar a área de figuras planas e o volume e área de sólidos geométricos.
- **Resolução de uma situação-problema** (fazendo uso de régua e compasso), como a determinação de um ponto equidistante de três pontos dados.
- **Atividades motivadoras na introdução de um tópico**, como as que antecedem a formalização dos conceitos de P.A. e P.G.
- Atividades de **aplicação dos conceitos** que estão sendo construídos em contextos cotidianos e de interesse dos estudantes, como: as chances de ganhar na Mega-Sena; a compreensão do índice pluviométrico e a decisão entre a compra à vista ou a prazo.
- Atividades que visam **desenvolver uma habilidade ou competência específica**, como a leitura de escalas em mapas.
- Atividades que convidam o estudante a **participar de deduções de propriedades**, colocando-os à frente no processo de validação em Matemática, como: as atividades de investigação sobre números inteiros; a dedução da relação fundamental da Trigonometria (entre outras) no triângulo retângulo; a dedução da fórmula da área de um triângulo em um caso particular.

Em cada um dos três volumes, na parte específica das Orientações Didáticas, o professor encontrará um breve comentário geral para cada atividade com algumas orientações, objetivos a serem alcançados e competências mobilizadas, além da resolução de todas as questões propostas aos estudantes.

Para relacionar algumas competências a serem desenvolvidas nas atividades, usamos como referência as competências descritas no documento *PCN+, Matemática e suas Tecnologias*, MEC, SEB, 2002, cujas três grandes competências são: representação e comunicação, investigação e compreensão, e contextualização sociocultural. Veja os textos para estudo e reflexão no item *Textos complementares – Orientações Curriculares.*

Por fim, acreditamos que as atividades de interação aluno-aluno e aluno-professor, que têm como foco principal o processo de aprendizagem dos estudantes, podem ser usadas como um valioso instrumento de diversificação em sala de aula, ampliando e enriquecendo os processos de avaliações formais. Na parte específica das Orientações Didáticas, em cada volume, há outras propostas de atividades em grupo.

## Uso da calculadora e do computador

Procuramos explorar e valorizar, em alguns pontos da coleção, o uso de calculadora (comum ou científica) e do computador.

Com a calculadora comum, por exemplo, pretendemos que o estudante se aproprie do uso da tecla de porcentagem % para resolver problemas de Matemática Comercial, tão presentes no dia a dia dos profissionais ligados ao comércio. Alguns desses problemas envolvem cálculo de porcentagens, cálculo do valor final de uma mercadoria após a concessão de um desconto (ou após um aumento de preços) etc.

Com a calculadora científica, por exemplo, procuramos utilizar algumas de suas funções, geralmente não conhecidas pelos estudantes nesta etapa da escolaridade. Entre as teclas que acionam essas funções, temos:

- as teclas de potenciação $x^y$ ou ^;
- as teclas de logaritmos decimais LOG e neperianos LN;
- as teclas referentes às funções trigonométricas para obtenção de valores das razões trigonométricas, a partir de um ângulo medido em graus ou radianos (explora-se, neste momento, o ajuste de configuração usando, de forma associada, a tecla MODE: DEG ou RAD e o uso das teclas SIN, COS e TAN) e, reciprocamente, a partir de um valor conhecido referente a uma razão trigonométrica de um ângulo, como obter a medida do ângulo, explorando, desse modo, a segunda função de uma tecla (SHIFT ou 2ndF).

Com relação ao uso do computador, destacamos alguns pontos importantes presentes na coleção:

1º) O uso de *softwares* livres de Matemática:

Na coleção, são utilizados o *software* GeoGebra nos três volumes e o Graphmática no volume 3.

No estudo das funções, o uso de *softwares* possibilita ao estudante melhor visualização:

- do traçado da parábola e suas propriedades;
- dos gráficos obtidos por translação de outros gráficos. Os gráficos de $y = |x + k|$ e $y = |x| + k$, com $k \in \mathbb{R}$, por exemplo, são obtidos por translação horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico de $y = |x|$. Ou ainda, a partir do gráfico de $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é possível construir os gráficos de $y = a^x + k$, com $k \in \mathbb{R}^*$ por translação.
- das alterações obtidas quando construímos o gráfico de funções do tipo $y = a \cdot \text{sen } x$ ou $y = a + \text{sen } x$ ou $y = \text{sen } (a \cdot x)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, a partir dos gráficos das funções trigonométricas "básicas": $y = \text{sen } x$ ou $y = \cos x$;
- das funções polinomiais de grau maior que 2, no volume 3. O *software* é utilizado para a construção dos gráficos dessas funções, lembrando que, sem ele, a construção requer conceitos de Matemática da Educação Superior. A partir da leitura do gráfico, podemos obter informações sobre o polinômio (número de raízes reais, interseções com os eixos coordenados etc.);
- na Geometria Analítica, o uso de um *software* como o GeoGebra pode ajudar o estudante a compreender o traçado e os elementos das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola) e relacioná-lo com suas respectivas equações.

2º) O uso de planilhas eletrônicas:

Pensando na futura inserção do jovem brasileiro no mercado de trabalho, são propostas atividades que dão suporte ao trabalho com Estatística.

No volume 1, é mostrada, passo a passo, a construção de uma tabela de frequências. Nessa atividade, o estudante terá a oportunidade de aprender a organizar um conjunto de dados em uma tabela de frequências, adicionar valores da tabela utilizando a planilha eletrônica, criar fórmulas para realização de operações utilizando a planilha eletrônica etc. Essas tarefas fazem parte da rotina de vários profissionais, nos mais variados campos de trabalho.

No volume 1, na parte específica das Orientações Didáticas, é proposta uma atividade de construção de gráficos estatísticos.

E, nas Orientações Didáticas do volume 3, o professor encontra um roteiro completo e detalhado de uma atividade de cálculo de medidas estatísticas de posição e dispersão, que serão usadas para caracterizar e resumir um conjunto de dados, por meio, novamente, do uso de planilhas eletrônicas.

## Uso de régua e compasso

As construções geométricas com régua e compasso também estão presentes na coleção. Dois momentos em que elas ocorrem são:

- na parte específica das Orientações Didáticas do volume 1, em uma atividade que permite revisar a construção da bissetriz de um ângulo, o traçado da perpendicular e a obtenção do incentro de um triângulo com o intuito de deduzir a fórmula do cálculo da área de um triângulo, em uma situação particular;
- no volume 3, na seção *Troque ideias*, em uma atividade em grupo desenvolvida a partir de um problema, os estudantes deverão construir, com régua e compasso, o circuncentro de um triângulo e conferir, por meio da Geometria Analítica, a resposta obtida.

## Estrutura da coleção

Cada volume foi organizado em capítulos nos quais a apresentação e o desenvolvimento teórico encontram-se intencionalmente intercalados às definições, exemplos, propriedades e exercícios. O início de cada capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, traz situações do cotidiano, que aproximam o leitor do conteúdo que será apresentado.

A seguir são descritas as principais características das seções da coleção.

### Aplicações

Na seção *Aplicações* são apresentados textos que aprofundam alguns conceitos e auxiliam na construção de outros. Eles ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia.

### Troque ideias

A seção *Troque ideias*, presente em vários capítulos dos três volumes, propõe atividades em grupo que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o estudante a construir novos conceitos, ou a aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

### Um pouco de História

Nesta seção, o trabalho com a História da Matemática coloca os estudantes em contato com um processo de construção do conhecimento e com os encaminhamentos na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os conhecimentos ao longo do tempo.

### Exemplos, exercícios resolvidos e exercícios

Todos os capítulos da coleção apresentam séries de exercícios intercaladas ao texto. Em geral, cada série é precedida de *exemplos* e *exercícios resolvidos*. Os exercícios estão organizados em ordem crescente de dificuldade, iniciando, sempre que julgamos conveniente, por alguns de reconhecimento ou de aplicação direta de conceitos, sem, contudo, explorar caminhos artificiais ou excessivamente algébricos e tampouco limitar-se a eles. De modo geral, são exercícios que envolvem relações mais simples.

Intercaladas a esses exercícios, propomos situações-problema com contextos cotidianos, aos quais o estudante possa aplicar e relacionar os conceitos construídos para a resolução desses problemas.

Os exercícios finais da série geralmente requerem leitura e interpretação mais cuidadosas do enunciado por parte dos estudantes, na busca por soluções mais elaboradas para os problemas propostos.

### Desafios

Todos os capítulos desta coleção são encerrados com um desafio. Em geral, são problemas que podem envolver conceitos de outros capítulos, inclusive de outros volumes.

Nossa intenção, ao propor esses desafios, é proporcionar aos estudantes mais uma oportunidade de vivenciar e aperfeiçoar a resolução de problemas, colocando-os em situações de atividades investigativas e motivando-os na busca de estratégias e procedimentos diversos de resolução.

Todos os desafios encontram-se resolvidos na parte específica destas Orientações Didáticas.

### Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

### Observações

Os boxes *Observações*, encontrados em diversos momentos nos livros, trazem informações sobre o conteúdo estudado e estão intercalados em meio ao texto para ajudar o estudante na compreensão dos conceitos.

### Pense nisto

Nos três volumes desta coleção, estão inseridas chamadas curtas ao longo do texto intituladas *Pense nisto*.

Em geral, elas podem referir-se a uma observação relacionada ao texto, a um exemplo ou a um exercício resolvido ou proposto.

Nossa intenção, ao apresentar essas chamadas, foi tornar a linguagem do texto menos impessoal, chamando o estudante para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou sobre uma resolução apresentada para um problema.

Nessas chamadas, o estudante pode ser questionado do porquê de determinada passagem, sobre os conceitos que estão sendo construídos ou pode ser convidado a propor outra solução para um problema.

Muitas vezes, as chamadas do *Pense nisto* podem orientar o professor na condução das discussões em sala de aula que levem à reflexão dos estudantes, possibilitando o compartilhamento de ideias e descobertas.

Acreditamos que as discussões propostas nessas chamadas podem encaminhar os estudantes para um papel de protagonistas no processo de aprendizagem, uma vez que assumem uma postura mais ativa e reflexiva na construção dos conceitos.

## Textos complementares – Orientações Curriculares

A seguir, reproduzimos parte do documento do Ministério da Educação: *Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática*. O documento enfoca três aspectos principais: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Por se tratar de um artigo extenso, selecionamos a parte que trata da escolha dos conteúdos.

### Orientações Curriculares para o Ensino Médio

***Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias***
***Conhecimentos de Matemática***

*De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.*

*Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.*

*Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.*

*Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.*

*A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.*

*Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 9 maio 2016.

A fim de contribuir para o estudo e a reflexão do professor, reproduzimos a seguir o trecho de outro documento do Ministério da Educação, o qual aborda especificamente as três competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

### Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias — *PCN+ — As competências em Matemática*

*A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:*

- *representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;*
- *investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;*
- *contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.*

*No entanto, a escola que tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida precisa refletir sobre o significado dessas competências para decidir sobre quais delas trabalhar, em que disciplinas e de que forma. Ou seja, é necessário compreender a proposta, aproximando-a das ações e das possibilidades características dos afazeres escolares. Para isso, apontamos e detalhamos o sentido dessas competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar a compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área.*

| Representação e comunicação | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia** | |
| Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica. | • Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas.<br>• Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos. |
| **Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia** | |
| Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. | • Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.<br>• Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.<br>• Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo. |
| **Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia** | |
| Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculadas em diferentes meios. | • Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com planta de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas.<br>• Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive. |
| **Elaboração de comunicações** | |
| Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências. | • Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas – para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando ideias, solucionando problemas.<br>• Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as ideias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios.<br>• Expressar-se da forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse. |
| **Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia** | |
| Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia. | • Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e à tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações. |

| Investigação e compreensão | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Estratégias para enfrentamento de situações-problema** | |
| Identificar em dada situação--problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la. | • Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.<br>• Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.<br>• Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto, para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas. |
| **Interações, relações e funções; invariantes e transformações** | |
| Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações. | • Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos.<br>• Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria.<br>• Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final.<br>• Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem.<br>• Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções. |
| **Medidas, quantificações, grandezas e escalas** | |
| Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados. | • Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.<br>• Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.<br>• Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema.<br>• Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas. |

| Modelos explicativos e representativos | |
|---|---|
| Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos. | • Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculo de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas de estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos. |
| **Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas** | |
| Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento. | • Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada.<br>• Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta.<br>• Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.<br>• Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia. |

| Contextualização sociocultural | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Ciência e tecnologia na história** | |
| Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social. | • Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos nem certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes.<br>• Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.<br>• Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos. |
| **Ciência e tecnologia na cultura contemporânea** | |
| Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea. | • Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade.<br>• Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições.<br>• Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento. |

| Ciência e tecnologia na atualidade | |
|---|---|
| Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social. | • Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais. |
| **Ciência e tecnologia, ética e cidadania** | |
| Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esse conhecimento no exercício da cidadania. | • Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e ao uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e equipamentos coletivos ou da qualidade de vida.<br>• Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência.<br>• Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio da lavoura para subsistência de uma comunidade. |

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC (SEB), 2002. p. 111-119. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2016.

## Avaliação

*A avaliação é um conjunto de ações organizadas com a finalidade de obter informações sobre o que foi assimilado pelo estudante, de que forma e em quais condições. Para tanto, é preciso elaborar um conjunto de procedimentos investigativos que possibilitem o ajuste e a orientação adequada. A avaliação deve funcionar, por um lado, como um instrumento que possibilite ao avaliador analisar criticamente a sua prática; e, por outro, como instrumento que apresente ao avaliado a possibilidade de saber sobre seus avanços, dificuldades e possibilidades.*

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

É bastante consensual a ideia de que o processo avaliativo tem o papel de indicar a toda a comunidade escolar (estudantes, professores, coordenadores, diretores e pais) o andamento do processo de ensino e de aprendizagem e, dessa forma, apontar caminhos que viabilizem aprendizagens cada vez mais significativas e que contribuam para o crescimento dos estudantes.

Aos professores, coordenadores e diretores, o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados.

Desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Os resultados da avaliação também devem orientar a escola, como um todo, nos processos de reforço escolar.

Aos estudantes, a avaliação tem a função de permitir que verifiquem sua evolução e crescimento, seus erros, suas dificuldades e o que aprenderam. Essa reflexão deverá ser capaz de mobilizá-los para compreender e corrigir eventuais erros, retomar e recuperar conceitos e promover maior envolvimento nas discussões em sala de aula.

Para que o processo de avaliação seja capaz de fornecer subsídios à comunidade escolar, é imprescindível que se apoie em uma grande diversidade de instrumentos avaliativos, intencionalmente pensados e preparados para esse fim. Além disso, faz-se necessário que a avaliação seja contínua e possa acompanhar o dia a dia escolar dos estudantes, suas dificuldades e conquistas.

## O que avaliamos

Numa concepção de aprendizagem mais ampla, podemos pensar em três dimensões do saber: o saber conceitual, o saber procedimental e o saber atitudinal, como sugere Antoni Zabala, em seu livro *A prática educativa – Como ensinar* (Artmed, 1988).

Esses três novos conteúdos (conteúdo aqui está sendo usado não apenas para referir-se às disciplinas tradicionais, mas abrange, nessa concepção, outras capacidades, como as relações interpessoais e a inserção social) correspondem, respectivamente, a três questões: o que devemos saber, como devemos fazer e como devemos ser (ou conviver socialmente).

Se tivermos em mente essas três dimensões do saber, poderemos fazer com que o processo avaliativo seja mais amplo, justo e benéfico para o estudante.

### A dimensão conceitual (o que devemos saber)

Conteúdos conceituais constituem o conjunto de conceitos e definições relacionadas aos saberes. Para aprenderem esses conteúdos, os estudantes deverão desenvolver competências como compreender, refletir, relacionar, analisar, comparar etc. Se o professor promover, exclusivamente, aulas expositivas e se as atividades avaliativas exigirem dos estudantes apenas memorização de fórmulas e reprodução de exercícios com base em modelos previamente conhecidos, dificilmente conseguirá atingir essa dimensão conceitual.

Veja estes três exemplos:

1) Um botânico mediu, dia a dia, durante cinco dias, a altura de uma pequena planta e relacionou os resultados obtidos na tabela seguinte:

| **Altura (em cm)** | 3,0 | 3,5 | 4,5 | 5,0 | 7,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tempo (em dias)** | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |

Para expressar matematicamente a relação existente entre a altura (**h**), em cm, e o tempo (**t**), em dias, o botânico usou um modelo linear, isto é, $h(t) = at + b$, em que **a** e **b** são constantes reais específicas do experimento. Comente a escolha desse modelo para essa situação.

A escolha do botânico não foi acertada, pois o crescimento da planta, por dia, não é constante, ou, ainda, a taxa média de variação da função *não* é constante, pois temos do 1º para o 2º dia: acréscimo de 0,5 cm; do 2º para o 3º dia: acréscimo de 1,0 cm; e assim por diante. Não se trata de um crescimento linear, de modo que a função que relaciona essas duas grandezas *não* é de 1º grau, e o gráfico, portanto, *não* é uma reta.

2) Na feira que eu costumo frequentar, uma barraca vende caldo de cana em dois copos cilíndricos: o menor, de 300 mL, custa R$ 2,70, e o maior, de 500 mL, custa R$ 4,00. Qual é a opção mais vantajosa para o consumidor?

Uma das formas de resolver essa questão é comparar os preços para uma mesma quantidade de caldo de cana; por exemplo, quanto pagarei, em cada caso, por 100 mL?

Copo menor: Se por 300 mL, pago R$ 2,70, então, por 100 mL, pago um terço desse valor, ou seja, R$ 0,90.

Copo maior: Se por 500 mL pago R$ 4,00, então, por 100 mL pago um quinto desse valor, isto é, R$ 0,80.

Isto indica que, considerando-se os preços, é mais vantajoso para o consumidor escolher o copo grande. Observe que, nesse problema, usamos o conceito de proporcionalidade.

3) Duas grandezas, **x** e **y**, relacionam-se pelos valores da tabela seguinte:

| **x** | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 100 | 16 | 4 | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{100}$ |

Ao analisar a tabela, um estudante concluiu que as grandezas **x** e **y** são inversamente proporcionais. Comente a conclusão do estudante.

A conclusão não está correta. Trata-se da ideia equivocada que se "duas grandezas são tais que, à medida que os valores de uma aumentam, os valores da outra diminuem, então essas grandezas são inversamente proporcionais".

É importante estar atento ao fato de que vários estudantes associam, indistintamente, e de maneira errada, decrescimento com proporcionalidade inversa (da mesma forma que associam, indistintamente, crescimento com proporcionalidade direta).

O conceito de grandezas inversamente proporcionais diz que, para qualquer par $(x, y)$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, de valores dessas grandezas, o produto $x \cdot y$ é constante.

É fácil verificar que essa condição não é satisfeita para os pares da tabela:

$$\frac{1}{10} \cdot 100 = 10 \neq \frac{1}{4} \cdot 16 = 4;\ 1 \cdot 1 = 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Por outro lado, uma análise mais cuidadosa mostra que:

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 100 = 1;\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 16 = 1;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 = 1 \text{ etc.}$$

Assim, $x^2 \cdot y = 1$ (constante) e, desse modo, $\mathbf{x^2}$ e **y** são grandezas inversamente proporcionais.

### A dimensão procedimental (como devemos fazer)

Conteúdos procedimentais, na concepção de Antoni Zabala, são um conjunto de ações ordenadas e com um fim, isto é, dirigidas para a realização de um objetivo. Envolvem *aquilo que se aprende a fazer fazendo*.

Por exemplo, fazer uma lista de exercícios em que se pede para resolver equações exponenciais é uma tarefa que mobiliza um conteúdo procedimental. Isso inclui também os chamados *exercícios de fixação*, comuns na Matemática. Cabem, no entanto, duas ressalvas importantes:

1º) É imprescindível que o estudante possua uma correta conceituação do objeto de estudo ao qual se refere tal mecanização.
Por exemplo, não é raro encontrar estudantes que, em um esforço grande para memorizar o desenvolvimento dos produtos notáveis, acabam esquecendo que se trata apenas de efetuar multiplicações para a determinação desse resultado.
Outro exemplo, que se encontra no livro *Fundamentos da didática da Matemática* (de Saddo Ag. Almouloud, Editora UFPR), é o estudo feito pelo matemático francês Bodin (1989) e seu núcleo de pesquisa. Eles perceberam que estudantes, ao acertarem a questão "resolva a equação $7x - 3 = 13x + 15$", não foram capazes de responder à seguinte pergunta: "O número 10 é uma solução da equação $7x - 3 = 13x + 15$?".
O professor deve, portanto, ficar atento ao fato de que instrumentos de avaliação centralizados unicamente na dimensão procedimental podem favorecer automatismos e, desse modo, se transformar em obstáculos para a compreensão dos conceitos.

2º) É imprescindível que se criem momentos em que o estudantes possa usar tais procedimentos para resolver problemas e situações mais complexas, sempre que possível, contextualizadas com vivências do seu dia a dia ou aplicadas em outras áreas do conhecimento. Aproveitando o exemplo da equação exponencial, é preciso saber resolvê-la também para enfrentar problemas mais complexos, como a meia-vida de um isótopo radioativo ou a datação de um material orgânico por carbono-14. (Veja *sugestão de atividade em grupo* nas Orientações Didáticas do volume 1.)

Voltando ao exemplo do caldo de cana vendido na feira, se modificarmos um pouco o enunciado (fornecendo a informação de que os copos são cilíndricos, bem como as dimensões — medida do raio e da altura — desses cilindros), estaremos mobilizando também um conteúdo procedimental — o cálculo do volume do cilindro — para resolver o problema.

### A dimensão atitudinal (como devemos ser)

Conteúdos atitudinais são aqueles que se referem à inserção social do estudante e ao exercício da cidadania, e é necessário que estejam presentes numa avaliação.

> [...] *uma avaliação de estudantes deve considerar dois aspectos importantes, a saber:*
> - *a avaliação quantitativa do desempenho dos estudantes* [...]
> - *a avaliação qualitativa, que é um processo de avaliação contínuo relacionado ao processo educativo, como atitude do aluno, sua participação em tarefas propostas, seu interesse, seu espírito crítico, sua autonomia intelectual e seus níveis de cooperação com colegas.*

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

Não é tarefa simples para o professor avaliar o grau de aprendizagem do estudante, na medida em que se misturam componentes cognitivos, afetivos e de conduta. No entanto, se ele permitir que as aulas sejam o lugar onde se debatam ideias, onde haja espaço para cada estudante expressar sua opinião pessoal, onde se coloquem, de maneira proposital, situações complexas que obriguem o estudante a questionar, argumentar, refletir, ouvir os colegas etc., ele terá maiores possibilidades de analisar os avanços de cada estudante, observando como este se comporta em debates, seminários, atividades em grupo, estudos de campo, comemorações escolares, jogos, entre outras situações.

Quando um professor propõe atividades em grupo, devidamente organizadas, ele mobiliza os estudantes a vivenciar valores como respeito, responsabilidade, cooperação e honestidade, praticando um exercício de alteridade.

Cada vez mais o mercado de trabalho procura profissionais que saibam trabalhar em equipe e sejam imbuídos desses valores.

Nos três volumes desta coleção, especialmente nos textos de leitura da seção *Aplicações*, no boxe *Pense nisto* e na seção *Troque ideias*, há oportunidades para desenvolver um trabalho que favoreça as integrações aluno-aluno e aluno-professor. Além disso, na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. As três dimensões do saber são colocadas em jogo nessas atividades: a conceitual, a procedimental e a atitudinal. Essas atividades podem fornecer elementos para o professor avaliar os seus estudantes: cabe a ele avaliar a produção e o empenho das equipes, a correta aplicação dos conceitos e das técnicas procedimentais. O professor deve dirigir seu olhar também às atitudes dos estudantes no que se refere ao respeito aos colegas e professores.

## Instrumentos de avaliação

### A comunicação escrita dos estudantes

É importante que o registro que o estudante produz durante todo o ano letivo contemple, entre outros:

- as anotações diárias das aulas no caderno, acompanhadas de observações que ele próprio produz a partir das discussões ocorridas em aula, durante a construção dos conceitos que estão sendo formados;
- exemplos, exercícios resolvidos em sala de aula e exercícios feitos como tarefas de casa;

- fichas de resumo, que podem ser construídas com a participação do professor ou em grupos de estudantes e que têm a função de ajudar na seleção e organização dos assuntos mais relevantes;
- relatórios que o estudante pode produzir a partir de uma proposta de aula com leitura prévia. Trata-se de antecipar um determinado tema (ou apenas um recorte dele) que será apresentado e discutido na aula seguinte. O professor solicita aos estudantes, com a devida antecedência, que façam uma leitura do livro didático, ou pesquisem alguma outra fonte, sobre certo tema. Então, para a data combinada, os estudantes tentam produzir, com as próprias palavras, um pequeno relatório sobre o que entenderam em relação à leitura feita, ainda que tal compreensão tenha sido parcial. Acreditamos que esse tipo de estratégia possa contribuir para a autonomia intelectual do estudante, favorecendo habilidades importantes como leitura, interpretação e a comunicação matemática escrita.

Se essas atividades ou alguma outra similar, como pedir ao estudante um relatório ao final de determinado capítulo ou assunto, forem feitas com alguma frequência durante o ano escolar, cada estudante terá construído um portfólio próprio, no qual comunica, por escrito, ideias matemáticas. Esse portfólio permite acompanhar a evolução e o crescimento do estudante por meio do modo como este se comunica na linguagem matemática.

## Avaliações escritas

As avaliações escritas, como as provas, por exemplo, também são instrumentos de avaliação.

A aplicação de provas, sejam elas na forma de questões de múltipla escolha, sejam na de questões dissertativas, pode ser uma das maneiras de fazer a avaliação dos estudantes. É preciso que elas sejam elaboradas considerando-se os objetivos de aprendizagem que se pretendem alcançar.

## Autoavaliação

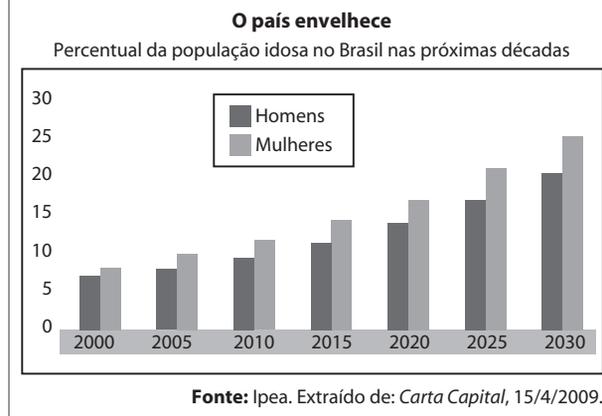
É importante que o professor ouça os estudantes sobre o modo pelo qual eles se relacionam com a Matemática, como estudam, como relacionam a Matemática ao seu cotidiano, quais são as dificuldades que enfrentam no processo de aprendizagem, quais avanços conseguem identificar, tanto no aspecto informativo como no formativo, entre outros.

Se os estudantes tiverem a oportunidade de manifestar suas necessidades, dificuldades, avanços, anseios, formas de aprender e estudar, maiores serão as possibilidades de o professor (e a escola, em geral) encontrar caminhos para enfrentar problemas de aprendizagem e propor ações para os estudantes refletirem sobre os próprios processos de aprendizagem.

## A comunicação oral dos estudantes

O ato de comunicar oralmente ideias matemáticas pode ocorrer em atividades como apresentação de trabalhos e seminários organizados pelos estudantes. Vejamos uma situação-problema que envolve esse aspecto.

Você precisa relatar uma situação descrita pelo gráfico seguinte a uma pessoa que não dispõe dele no momento.

**Fonte:** Ipea. Extraído de: *Carta Capital*, 15/4/2009.

Naturalmente, o estudante deverá ser capaz de identificar e relatar do que trata o gráfico, quais são as grandezas associadas, que tendência se evidencia, quais os dados representados nas estimativas para homens e nas para mulheres etc.

Em se tratando de representações gráficas, atividades similares a essa podem ser realizadas no estudo da Estatística Descritiva e também no estudo introdutório das funções, no que diz respeito à leitura e interpretação de gráficos (em geral, gráficos em que uma das grandezas é o tempo são adequados para o estudo das funções).

Outro assunto que favorece atividades em que os estudantes são convidados a expressar-se oralmente é a Geometria, na descrição e comparação de figuras. Veja estas duas situações:

- No início do estudo dos sólidos geométricos, podem-se espalhar vários sólidos sobre a mesa (ou projetar imagens de sólidos) e pedir aos estudantes para agrupá-los segundo algum critério. Provavelmente, eles separarão os poliedros dos corpos redondos. Outra possibilidade é separar os sólidos em dois grupos: os que possuem vértice e os que não possuem. Em seguida, eles deverão argumentar, oralmente, com o repertório disponível, o critério que usaram na classificação. O professor pode experimentar pedir aos estudantes que repitam a argumentação, depois da formalização dos conceitos.
- Podem-se mostrar aos estudantes, no início do estudo dos poliedros, um prisma e uma pirâmide e pedir que eles descrevam verbalmente esses sólidos, estabelecendo em quê são parecidos (entre outras, eles devem apontar que ambos são formados por polígonos) e em quê são diferentes (entre outras, a pirâmide tem uma só base e o prisma tem duas bases congruentes).

Outra possibilidade é levar para a sala de aula prismas retos e oblíquos e pedir à turma que descreva, oralmente, a diferença entre eles.

Depois de estudados os conceitos, a classificação, os elementos etc., pode-se refazer a atividade e ver quanto a comunicação oral do estudante, na caracterização desses sólidos, avançou.

(Para complementar, sugerimos a atividade de Geometria Analítica proposta na parte específica das Orientações Didáticas do volume 3).

Em relação aos seminários, uma das possibilidades é explorar os textos da seção *Aplicações*, que constam nos três volumes de nossa coleção, e convidar os estudantes a preparar seminários, produzir novos materiais e promover discussões com a turma. Essas atividades devem mobilizar os estudantes a fazer outras pesquisas, aprofundando e ampliando os contextos dos assuntos que são abordados.

Outra possibilidade interessante é a proposta de uma aula preparada por um grupo de estudantes aos demais colegas da turma. Devem-se selecionar alguns recortes do conteúdo para serem pesquisados, e que sejam compatíveis com os conhecimentos dos estudantes. Na data estabelecida, cada equipe apresenta sua aula ao resto da classe. É fundamental que o professor esteja disponível para esclarecer dúvidas e trocar ideias e sugestões com as equipes no período de preparação dos seminários.

Esse tipo de atividade promove a autonomia dos estudantes, valoriza a leitura e a pesquisa, a comunicação oral e o trabalho em equipe.

Para exemplificar, no estudo de áreas das figuras planas, podem-se informar as áreas de várias figuras (triângulos, quadriláteros, círculo e suas partes) às equipes e pedir a cada uma delas que prepare uma aula com a dedução de fórmulas, exemplos e exercícios elaborados a partir dessas informações. Essa atividade pode se transformar em um valioso instrumento de avaliação e dinamização das aulas.

Já no estudo das progressões, temos outro exemplo: é possível separar a turma em equipes, ficando cada equipe responsável pela apresentação de um seminário, na forma de roteiro completo de aula (incluindo problematização inicial, exemplos, demonstrações de fórmulas, se houver, e exercícios).

## Atividade em grupo

Conforme já mencionado anteriormente, as atividades em grupo podem mobilizar as três dimensões dos conteúdos: conceitual, procedimental e atitudinal. Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. Quando possível, proponha atividades a partir de alguma matéria publicada em jornal, revista, internet etc. Acreditamos que o recurso de usar reportagens veiculadas na mídia pode ser bastante motivador para o estudante, especialmente nos casos de mobilizar competências ligadas a representação e comunicação, investigação e compreensão ou recontextualização sociocultural.

Veja este exemplo de atividade que pode ser proposta sobre a tabela de contribuição mensal do INSS:

A tabela de contribuição mensal é utilizada para a consulta sobre as faixas de salários e respectivas alíquotas de incidência para o cálculo da contribuição a ser paga ao INSS.

**Tabela de contribuição mensal para fins de recolhimento ao INSS (vigente de 01/01 a 31/12/2015)**

| Salário de contribuição (R$) | Alíquota (%) |
|---|---|
| Até 1 399,12 | 8 |
| De 1 399,13 até 2 331,88 | 9 |
| De 2 331,89 até 4 663,75 | 11 |

Atenção: Em 2015, o valor máximo do INSS do segurado era R$ 513,01.

**Fonte:** <www.portaltributario.com.br/guia/tabela_inss_empregados.html>. Acesso em: 26 abr. 2016.

A tabela é o ponto de partida para várias discussões e questões, entre as quais destacamos:

1. O que é INSS?

Resp.: INSS é a sigla de Instituto Nacional do Seguro Social, um órgão governamental responsável por receber as contribuições dos trabalhadores e fazer o pagamento de aposentadorias, auxílio-doença, pensões e outros benefícios previstos por lei.

2. O que é aposentadoria? Quais as regras atuais da aposentadoria para o trabalhador?

Resp.: Aposentadoria é uma remuneração recebida pelo trabalhador após cumprir alguns requisitos. Para conhecer as regras atuais para a aposentadoria, consulte o site <www.mtps.gov.br/aposentadoria>, acesso em 24 maio 2016.

3. Qual é o valor atual mensal do teto da aposentadoria?

Resp.: O teto máximo da aposentadoria é corrigido anualmente, em 2015 era de 4 663,75 reais. Consulte o *site* <www.mtps.gov.br>, acesso em 24 maio 2016, para obter o valor atualizado.

4. Quais são os benefícios dos contribuintes do INSS?

Resp.: Os contribuintes do INSS têm direito a alguns benefícios, como aposentadoria, auxílio-doença, pensão por morte, salário-maternidade etc. Veja mais no *site* <www.mtps.gov.br/todos-os-servicos-do-inss>, acesso em 24 maio 2016.

5. Determine a contribuição ao INSS paga por um trabalhador cujo salário bruto mensal é de:

a) R$ 1 000,00 (Resp.: R$ 80,00)

b) R$ 2 200,00 (Resp.: R$ 198,00)

c) R$ 4 000,00 (Resp.: R$ 440,00)

6. O que a informação "o valor máximo do INSS do segurado é R$ 513,01", logo após a tabela, indica?

Resp.: Como $0,11 \cdot 4\,663,75 \simeq 513,01$, qualquer salário superior a R$ 4 663,01 contribui com o valor de R$ 513,01 ao INSS.

7. Qual é a lei da função que relaciona o valor mensal (**y**) pago ao INSS e o salário mensal (**x**), ambos expressos em reais?

Resp.:

$$y = \begin{cases} 0{,}08 \cdot x; \text{ se } 0 < x \leqslant 1\,399{,}12 \\ 0{,}09 \cdot x; \text{ se } 1\,399{,}13 \leqslant x \leqslant 2\,331{,}88 \\ 0{,}11 \cdot x; \text{ se } 2\,331{,}89 \leqslant x \leqslant 4\,663{,}75 \\ 513{,}01; \text{ se } 4\,663{,}76 \leqslant x \end{cases}$$

## Resolução de problemas

É fundamental que seja trabalhada em aula uma grande diversidade de problemas (inclusive aqueles sem solução ou que admitem mais de uma resposta), mobilizando todas as quatro etapas desse processo, segundo G. Polya, em *A arte de resolver problemas* (1978):

- compreender o problema;
- estabelecer um plano, relacionando os dados;
- executar o plano;
- fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Na avaliação da resolução de problemas, é importante levar em consideração a evolução dos estudantes no processo. Para isso, é fundamental que esse tipo de avaliação esteja incorporado à prática do professor; não pode ser uma atividade esporádica. É preciso valorizar a criatividade na busca de soluções, a socialização de diferentes maneiras de resolver um problema, analisando todos os passos da resolução (e não apenas a resposta final) e incentivar e encorajar os estudantes na busca da sulução.

## Textos complementares – Avaliação

Pensando em um momento de pausa, estudo, reflexão e formação para o professor, reproduzimos a seguir alguns trechos do capítulo inicial do livro *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens, entre duas lógicas*, de Philippe Perrenoud.

### Uma avaliação a serviço da seleção?

*A avaliação é tradicionalmente associada, na escola, à criação de hierarquias de excelência. Os alunos são comparados e depois classificados em virtude de uma norma de excelência, definida no absoluto ou encarnada pelo professor e pelos melhores alunos. Na maioria das vezes, essas duas referências se misturam, com uma dominante: na elaboração das tabelas, enquanto alguns professores falam de exigências preestabelecidas, outros constroem sua tabela* a posteriori*, em função da distribuição dos resultados, sem todavia chegar a dar sistematicamente a melhor nota possível ao trabalho "menos ruim".*

*No decorrer do ano letivo, os trabalhos, as provas de rotina, as provas orais, a notação de trabalhos pessoais e de dossiês criam "pequenas" hierarquias de excelência, sendo que nenhuma delas é decisiva, mas sua adição e acúmulo prefiguram a hierarquia final:*

*– seja porque se fundamenta amplamente nos resultados obtidos ao longo do ano, quando a avaliação contínua não é acompanhada por provas padronizadas ou exames;*

*– seja porque a avaliação durante o ano funciona como um treinamento para o exame (Merle, 1996).*

*Essa antecipação desempenha um papel maior no contrato didático celebrado entre o professor e seus alunos, assim como nas relações entre a família e a escola. Como mostrou Chevallard (1986a), no que tange aos professores de matemática do secundário, as notas fazem parte de uma* negociação *entre o professor e seus alunos ou, pelo menos, de um* arranjo*. Elas lhes permitem fazê-los trabalhar, conseguir sua aplicação, seu silêncio, sua concentração, sua docilidade em vista do objetivo supremo: passar de ano. A nota é uma* mensagem *que não diz de início ao aluno o que ele sabe, mas* o que pode lhe acontecer *"se continuar assim até o final do ano". Mensagem tranquilizadora para uns, inquietante para outros, que visa também aos pais, com a demanda implícita ou explícita de intervir "antes que seja tarde demais". A avaliação tem a função, quando se dirige à família, de* prevenir*, no duplo sentido de impedir e de advertir. Ela alerta contra o fracasso que se anuncia ou, ao contrário, tranquiliza, acrescentando "desde que continue assim!". Quando o jogo está quase pronto, prepara os espíritos para o pior; uma decisão de reprovação ou de não admissão em uma habilitação exigente apenas confirma, em geral, os prognósticos desfavoráveis comunicados bem antes ao aluno e à sua família.*

*Assim como os pequenos mananciais formam grandes rios, as pequenas hierarquias se combinam para formar hierarquias globais, em cada disciplina escolar, depois sobre o conjunto do programa, para um trimestre, para um ano letivo e, enfim, para o conjunto de um ciclo de estudos. Referindo-se a formas e normas de excelência bem diversas, essas hierarquias têm em comum mais informar sobre a posição de um aluno em um grupo ou sobre sua distância relativa à norma de excelência do que sobre o conteúdo de seus conhecimentos e competências. Elas dizem sobretudo se o aluno é "melhor ou pior" do que seus colegas. A própria existência de uma escala a ser utilizada cria hierarquia,* às *vezes a partir de pontos pouco significativos. Amigues e Zerbato-Poudou lembram esta experiência simples: dá-se um lote de trabalhos heterogêneos a serem corrigidos por um conjunto de professores; cada um estabelece uma distribuição em forma de sino, uma aproximação da famosa curva de Gauss. Retiram-se então todos os trabalhos situados na parte mediana da distribuição e dão-se os restantes a outros corretores. Poder-se-ia logicamente esperar uma distribuição bimodal. Isso não acontece, cada avaliador recria uma distribuição "normal". Obtém-se o mesmo resultado quando se conserva apenas a metade inferior ou superior de um primeiro lote. Os examinadores criam variações que se referem mais à escala e ao princípio da classificação do que às variações significativas entre os conhecimentos ou as competências de uns e outros.*

*Uma hierarquia de excelência jamais é o puro e simples reflexo da "realidade" das variações. Elas existem realmente, mas a avaliação escolhe, em um momento definido, segundo critérios definidos, dar-lhe uma* imagem pública*; as mesmas variações podem ser dramatizadas ou banalizadas conforme a lógica de ação em andamento, pois não se avalia por avaliar, mas para fundamentar uma decisão. Ao final do ano letivo ou do ciclo de estudos, as hierarquias de excelência escolar comandam o prosseguimento normal do curso ou, se houver seleção, a orientação para esta ou aquela habilitação. De modo mais global, ao longo de todo o curso, elas regem o que se chama de êxito ou fracasso escolares. Estabelecida de acordo com uma escala muito*

diferenciada – às vezes, apenas um décimo de ponto de diferença –, uma hierarquia de excelência se transforma facilmente em dicotomia: basta introduzir um ponto de ruptura para criar conjuntos considerados homogêneos; de um lado, aqueles que são reprovados são relegados às habilitações pré-profissionais ou entram no mercado de trabalho aos 15-16 anos; de outro, os que avançam no curso e se orientam para os estudos aprofundados.

A outra função tradicional da avaliação é certificar aquisições em relação a terceiros. Um diploma garante aos empregadores em potencial que seu portador recebeu formação, o que permite contratá-lo sem fazer com que preste novos exames. Uma forma de certificação análoga funciona também no interior de cada sistema escolar, de um ciclo de estudos ao seguinte, até mesmo entre anos escolares. Isso é menos visível, pois não existe o equivalente em um mercado de trabalho; o mercado da orientação permanece controlado pelo sistema educativo.

Uma certificação fornece poucos detalhes dos saberes e das competências adquiridos e do nível de domínio precisamente atingido em cada campo abrangido. Ela garante sobretudo que um aluno sabe globalmente "o que é necessário saber" para passar para a série seguinte no curso, ser admitido em uma habilitação ou começar uma profissão. Entre professores dos graus ou ciclos de estudos sucessivos, entre a escola e os empregadores, o nível e o conteúdo dos exames ou da avaliação são, é claro, questões recorrentes. Todavia, no âmbito do funcionamento regular do sistema, "age-se como se" aqueles que avaliam soubessem o que devem fazer e a eles é concedida uma certa confiança. A vantagem de uma certificação instituída é justamente a de não precisar ser controlada ponto por ponto, de servir de passaporte para o emprego ou para uma formação posterior.

Dentro do sistema escolar, a certificação é sobretudo um modo de regulação da divisão vertical do trabalho pedagógico. O que se certifica ao professor que recebe os alunos oriundos do nível ou do ciclo anterior é que ele poderá trabalhar como de hábito. O que isso recobre não é totalmente independente do programa e das aquisições mínimas. Isso pode variar muito de um estabelecimento para outro, em função do nível efetivo dos alunos e da atitude do corpo docente.

Em todos os casos, a avaliação não é um fim em si. É uma engrenagem no funcionamento didático e, mais globalmente, na seleção e na orientação escolares. Ela serve para controlar o trabalho dos alunos e, simultaneamente, para gerir os fluxos.

### Ou a serviço das aprendizagens?

A escola conformou-se com as desigualdades de êxito por tanto tempo quanto elas pareciam "na ordem das coisas". É verdade que era importante que o ensino fosse corretamente distribuído e que os alunos trabalhassem, mas a pedagogia não pretendia nenhum milagre, ela não podia senão "revelar" a desigualdade das aptidões (Bourdieu, 1996). Dentro dessa perspectiva, uma avaliação formativa não tinha muito sentido: a escola ensinava e, se tivessem vontade e meios intelectuais, os alunos aprendiam. A escola não se sentia responsável pelas aprendizagens, limitava-se a oferecer a todos a oportunidade de aprender: cabia a cada um aproveitá-la! A noção de desigualdade das oportunidades não significou, até um período recente, nada além disto: que cada um tenha acesso ao ensino, sem entraves geográficos ou financeiros, sem inquietação com seu sexo ou sua condição de origem.

Quando Bloom, nos anos 60, defendeu uma pedagogia do domínio (1972, 1976, 1979, 1988), introduziu um postulado totalmente diferente. Pelo menos no nível da escola obrigatória, ele dizia, "todo mundo pode aprender": 80% dos alunos podem dominar 80% dos conhecimentos e das competências inscritos no programa, com a condição de organizar o ensino de maneira a individualizar o conteúdo, o ritmo e as modalidades de aprendizagem em função de objetivos claramente definidos. De imediato, a avaliação se tornava o instrumento privilegiado de uma regulação contínua das intervenções e das situações didáticas. Seu papel, na perspectiva de uma pedagogia de domínio (Huberman, 1988), não era mais criar hierarquias, mas delimitar as aquisições e os modos de raciocínio de cada aluno o suficiente para auxiliá-lo a progredir no sentido dos objetivos. Assim nasceu, senão a própria ideia de avaliação formativa desenvolvida originalmente por Scriven (1976) em relação aos programas, pelo menos sua transposição à pedagogia e às aprendizagens dos alunos.

O que há de novo nessa ideia? Não se servem todos os professores da avaliação durante o ano para ajustar o ritmo e o nível global de seu ensino? Não se conhecem muitos professores que utilizam a avaliação de modo mais individualizado, para melhor delimitar as dificuldades de certos alunos e tentar remediá-las?

Toda ação pedagógica repousa sobre uma parcela intuitiva de avaliação formativa, no sentido de que, inevitavelmente, há um mínimo de regulação em função das aprendizagens ou, ao menos, dos funcionamentos observáveis dos alunos. Para se tornar uma prática realmente nova, seria necessário, entretanto, que a avaliação formativa fosse a regra e se integrasse a um dispositivo de pedagogia diferenciada. É esse caráter metódico, instrumentado e constante que a distancia das práticas comuns. Portanto, não se poderia, sob risco de especulação, afirmar que todo professor faz constantemente avaliação formativa, ao menos não no pleno sentido do termo.

Se a avaliação formativa nada mais é do que uma maneira de regular a ação pedagógica, por que não é uma prática corrente? Quando um artesão modela um objeto, não deixa de observar o resultado para ajustar seus gestos e, se preciso for, "corrigir o alvo", expressão comum que designa uma faculdade humana universal: a arte de conduzir a ação pelo olhar, em função de seus resultados provisórios e dos obstáculos encontrados. Cada professor dispõe dela, como todo mundo. Ele se dirige, porém, a um grupo e regula sua ação em função de sua dinâmica de conjunto, do nível global e da distribuição dos resultados, mais do que das trajetórias de cada aluno. A avaliação formativa introduz

*uma ruptura porque propõe* deslocar essa regulação ao nível das aprendizagens e individualizá-la.

*Nenhum médico se preocupa em classificar seus pacientes, do menos doente ao mais gravemente atingido. Nem mesmo pensa em lhes administrar um tratamento coletivo. Esforça-se para determinar, para cada um deles, um diagnóstico individualizado, estabelecendo uma ação terapêutica sob medida.* Mutatis mutandis, *a avaliação formativa deveria ter a mesma função em uma pedagogia diferenciada. Com essa finalidade, as provas escolares tradicionais se revelam de pouca utilidade, porque são essencialmente concebidas em vista mais do desconto do que da análise dos erros, mais para a classificação dos alunos do que para a identificação do nível de domínio de cada um. "Seu erro me interessa", diria um professor que leu Astolfi (1997). Uma prova escolar clássica suscita erros deliberadamente, já que de nada serviria se todos os alunos resolvessem todos os problemas. Ela cria a famosa curva de Gauss, o que permite dar boas e más notas, criando, portanto, uma hierarquia. Uma prova desse gênero não informa muito como se operam a aprendizagem e a construção dos conhecimentos na mente de cada aluno, ela* sanciona *seus erros sem buscar os meios para* compreendê-los *e para trabalhá-los. A avaliação formativa deve, pois, forjar seus próprios instrumentos, que vão do teste criterioso, descrevendo de modo analítico um nível de aquisição ou de domínio, à observação* in loco *dos métodos de trabalho, dos procedimentos, dos processos intelectuais do aluno.*

*O diagnóstico é inútil se não der lugar a uma ação apropriada. Uma verdadeira avaliação formativa é necessariamente acompanhada de uma intervenção* diferenciada, *com o que isso supõe em termos de meios de ensino, de organização dos horários, de organização do grupo-aula, até mesmo de transformações radicais das estruturas escolares. As pedagogias diferenciadas estão doravante na ordem do dia e a avaliação formativa não é mais uma quimera, já que propiciou inúmeros ensaios em diversos sistemas.*

*[...]*

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Para a última parte de nossa proposta de proporcionar ao professor um momento de reflexão e estudo, reproduzimos um trecho do livro *Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas*, de Vasco Pedro Moretto. O autor defende a ideia de que não é a extinção da prova escrita ou oral que melhorará a aprendizagem, mas a ressignificação do método numa nova perspectiva pedagógica.

## Avaliar com eficácia e eficiência

*Avaliar a aprendizagem tem sido um tema angustiante para professores e estressante para alunos. Nas conversas com professores, orientadores e diretores, o assunto avaliação é sempre lembrado com um suspiro de desânimo e uma frase eloquente: "Esse é o problema! Aí está o nó!".*

*Muito se tem escrito e falado sobre a avaliação da aprendizagem. As dúvidas continuam, os pontos de vista se multiplicam e as experiências se diversificam. O sistema escolar gira em torno desse processo e tanto professores como alunos se organizam em função dele. Por isso a verdade apresentada é: professores e pesquisadores precisamos estudar mais, debater com profundidade e conceituar com segurança o papel da avaliação no processo da aprendizagem.*

*A avaliação da aprendizagem é angustiante para muitos professores por não saber como transformá-la num processo que não seja uma mera cobrança de conteúdos aprendidos "de cor", de forma mecânica e sem muito significado para o aluno. Angústia por ter que usar um instrumento tão valioso no processo educativo, como recurso de repressão, como meio de garantir que uma aula seja levada a termo com certo grau de interesse. Sentenças como 'anotem, pois vai cair na prova', 'prestem atenção nesse assunto porque semana que vem tem prova', 'se não ficarem calados vou fazer uma prova surpresa', 'já que vocês não param de falar, considero matéria dada e vai cair na prova', e outras que se equivalem, são indicadores da maneira repressiva que tem sido utilizada na avaliação da aprendizagem.*

*Se para o professor esse processo gera ansiedade, podemos imaginar o que representa para os alunos. 'Hora do acerto de contas', 'A hora da verdade', 'A hora de dizer ao professor o que ele quer que eu saiba', 'A hora da tortura', são algumas dentre as muitas representações em voga entre os alunos. Enquanto não há prova 'marcada' muitos alunos encontram um álibi para não estudar. E se por acaso o professor anunciar que a matéria dada não irá cair na prova... então para que estudar?, perguntarão os alunos.*

*Para grande parte dos pais, a prova também não cumpre seu real papel. Se a nota foi razoável ou ótima, os pais dão-se por satisfeitos, pois pressupõem que a nota traduz a aprendizagem correspondente, o que nem sempre é verdade. E os alunos sabem disso. Se a nota foi de aprovação, o aluno a apresenta como um troféu pelo qual 'deve receber a recompensa': saídas autorizadas, aumento de mesada, passeios extras etc. Lembrar que o dever foi cumprido... ah! Isso nem vem ao caso.*

*Diante de tal diagnóstico, a avaliação precisa ser analisada sob novos parâmetros e tem de assumir outro papel no processo da intervenção pedagógica, em consequência da redefinição dos processos de ensino e de aprendizagem.*

*A avaliação é parte integrante do ensino e da aprendizagem. O ensinar, um dia, já foi concebido como transmitir conhecimentos prontos e acabados, conjunto de verdades a serem recebidas pelo aluno, gravadas e devolvidas na hora da prova. Nessa visão de ensino, o aprender tem sido visto como gravar informações transcritas para um caderno (cultura cadernal) para devolvê-las da forma mais fiel possível ao professor na hora da prova. Expressões como 'o que será que o professor quer com essa questão?', 'professor, a questão sete não estava no caderno de ninguém, o senhor tem que anular', 'professora, dá para explicar o que a senhora quer com a questão 3?', 'professor, eu decorei todo o questionário que o senhor deu e na prova o senhor perguntou tudo diferente' são indicadores de que a preocupação dos alunos é satisfazer os professores, é tentar responder tudo o que o professor quer para, com isso, obter nota.*

*Nesta visão, que classificamos de tradicional por ainda ser, a nosso ver, a que domina o processo de ensino nos dias de hoje,*

*a avaliação de aprendizagem é encarada como um processo de 'toma lá dá cá', em que o aluno deve devolver ao professor o que dele recebeu e de preferência exatamente como recebeu, o que Paulo Freire chamou educação bancária. Nesse caso não cabe criatividade, nem interpretação. A relação professor-aluno vista dessa forma é identificada como uma forma de dominação, de autoritarismo do professor e de submissão do aluno, sendo por isso uma relação perniciosa na formação para a cidadania.*

*A perspectiva construtivista sociointeracionista propõe uma nova relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Ela parte do princípio de que o aluno não é um simples acumulador de informações, ou seja, um mero receptor-repetidor. Ele é o construtor do próprio conhecimento. Essa construção se dá com a mediação do professor, numa ação do aluno que estabelece a relação entre suas concepções prévias e o objeto de conhecimento proposto pela escola. Assim, fica claro que a construção do conhecimento é um processo interior do sujeito da aprendizagem, estimulado por condições exteriores criadas pelo professor. Por isso dizemos que cabe a este o papel de catalisador do processo da aprendizagem. Catalisar/mediar/facilitar são palavras que indicam o novo papel do docente no processo de interação com o aluno, como vimos em capítulos anteriores.*

***Prova: um momento privilegiado de estudo***

*Avaliar aprendizagem tem um sentido amplo. A avaliação é feita de formas diversas, com instrumentos variados, sendo o mais comum deles, em nossa cultura, a prova escrita. Por esse motivo, em lugar de apregoarmos os malefícios da prova e levantarmos a bandeira de uma avaliação sem provas, procuramos seguir o princípio: se tivermos que elaborar provas, que sejam benfeitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes.*

*É preciso ressaltar, no entanto, que a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a forma de ensinar. Se a abordagem no ensino foi dentro dos princípios da construção do conhecimento, a avaliação da aprendizagem seguirá a mesma orientação. Nessa linha de pensamento, propomos alguns princípios que sustentam nossa concepção de avaliação da aprendizagem:*

- *A aprendizagem é um processo interior ao aluno, ao qual temos acesso por meio de indicadores externos.*
- *Os indicadores (palavras, gestos, figuras, textos) são interpretados pelo professor e nem sempre a interpretação corresponde fielmente ao que o aluno pensa.*
- *O conhecimento é um conjunto de relações estabelecidas entre os componentes de um universo simbólico.*
- *O conhecimento construído significativamente é estável e estruturado.*
- *O conhecimento adquirido mecanicamente é instável e isolado.*
- *A avaliação da aprendizagem é um momento privilegiado de estudo e não um acerto de contas.*

[...]

MORETTO, Vasco P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 8ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

## Sugestões para o professor

Hoje, para coordenar um curso de Matemática rico e aberto, o professor precisa conhecer a Matemática além do seu programa curricular: deve ter acesso a informações sobre a história da descoberta matemática, estar sintonizado com tendências da Educação Matemática, conhecer curiosidades e divertimentos lógico-matemáticos, dispor de livros paradidáticos para aprofundamento, conhecer e usar recursos tecnológicos em sala de aula como forma de diversificar estratégias de aprendizagem etc.

Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir alguns livros, revistas, recursos digitais e *sites* que podem contribuir para a melhor formação dos colegas.

### Sugestões de livros para a formação continuada

- *A Matemática na arte e na vida*, de Paulo Roberto Martins Contador. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa com profundidade a complexidade da proporção áurea e suas manifestações na natureza, na arquitetura, nas artes plásticas, enfim, onde há harmonia, beleza e equilíbrio.

- *Coleção do Professor de Matemática*

Trata-se da coleção IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio. Os assuntos são apresentados e discutidos com elevado rigor matemático, em linguagem precisa e objetiva. Há ainda uma seção de exercícios, em vários dos quais são pedidas demonstrações.

Os seguintes títulos compõem a coleção:

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Nos volumes de 1 a 3 são apresentados, de modo aprofundado, os principais tópicos dos programas da Matemática do Ensino Médio; no volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos três volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Construções Geométricas*, de Eduardo Wagner. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Introdução à geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

- *Progressões e Matemática Financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

- *Trigonometria e Números Complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

• *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*

A coleção apresenta, em 11 volumes, um estudo detalhado e rigoroso dos eixos trabalhados no Ensino Médio: Funções, Álgebra, Números, Geometria, Estatística, contagem e probabilidade, além de Matemática Financeira e Introdução ao Cálculo.

Nos livros, encontramos uma grande variedade e quantidade de exercícios, podendo servir de referencial teórico e prático para o professor do Ensino Médio. Os seguintes livros compõem a coleção:

- *Conjuntos*, *Funções*, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 1. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda os conjuntos numéricos, a noção de função e o estudo de algumas das funções elementares.

- *Logaritmos*, de Osvaldo Dolce, Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 2. São Paulo: Atual, 2013.

Sintetiza o assunto potências e o estudo das funções exponencial e logarítmica.

- *Trigonometria*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 3. São Paulo: Atual, 2013.

Estudo completo das funções circulares, das relações entre elas, das transformações, das equações e inequações trigonométricas, das funções circulares inversas e da trigonometria nos triângulos.

- *Sequências, matrizes, determinantes, sistemas*, de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 4. São Paulo: Atual, 2013.

Trata do estudo de progressões, de matrizes, de determinantes e de sistemas lineares.

- *Combinatória, probabilidade*, de Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 5. São Paulo: Atual, 2013.

Estuda problemas de contagem e o binômio de Newton e faz um estudo completo sobre probabilidades.

- *Complexos, polinômios, equações*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 6. São Paulo: Atual, 2013.

São estudados os números complexos, os polinômios e as equações polinomiais.

- *Geometria analítica*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 7. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda o estudo analítico das retas, das circunferências e das cônicas.

- *Limites, derivadas, noções de integral*, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado. 9ª ed. v. 8. São Paulo: Atual, 2013.

Uma abordagem simplificada de limites, de derivadas e funções de uma variável, das aplicações de derivadas e de uma introdução à noção de integral definida.

- *Geometria Plana*, de Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2013.

Trata, com rigor, detalhes e profundidade, da Geometria Plana usualmente trabalhada no Ensino Fundamental.

- *Geometria Espacial*, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 10. São Paulo: Atual, 2013.

Faz um estudo completo e axiomático da Geometria de Posição Espacial. Na Geometria Métrica são estudados poliedros, corpos redondos, inscrição e circunscrição de sólidos.

- *Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*, de Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David M. Degenszajn. 9ª ed. v. 11. São Paulo: Atual, 2013.

No livro são estudadas matemática comercial e financeira, além da estatística descritiva.

• *Fundamentos da Aritmética*, de Hygino H. Domingues. 1ª ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

Podemos encontrar na obra a origem da ideia de número, os primeiros sistemas de numeração, o conceito de congruência, representação decimal dos racionais e irracionais e o corpo dos números complexos. A obra contempla elementos da história da Matemática.

• *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

• *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

• *Os elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

Trata-se da primeira tradução completa para a Língua Portuguesa a partir do texto grego. A obra da Antiguidade Clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria Plana e Espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

• *Probabilidade*: um curso moderno com aplicações, de Sheldon Ross. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Uma obra completa e aprofundada sobre probabilidade, com grande variedade de exercícios.

• *Uma história da simetria em Matemática*, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O autor conta como uma sucessão de matemáticos e físicos, à procura de soluções para equações algébricas, acabou por construir o conceito de simetria, que revolucionou nossa visão sobre o Universo.

- *Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica*, de Dorival A. Mello, Renate G. Watanabe. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

A obra contempla o estudo de vetores, dependência linear e bases, produto escalar e vetorial, sistemas de coordenadas no espaço, estudo do plano, superfície esférica e um apêndice sobre cônicas.

## História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em quatro milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento da criatividade de quem considera o cinema um agente de ideias plurais sobre História, Educação e Matemática.

- *Coleção História da Matemática para professores*

Com seus dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática, agrupados nos seguintes tópicos: história dos problemas e conceitos matemáticos; história das relações entre Matemática, Ciências Naturais e Técnicas; biografias de matemáticos e educadores matemáticos; análise de fontes literárias.

A seguir, destacamos duas obras dessa coleção:

- *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

Neste livro, a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações.

- *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (Org.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro contém aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como Medidas.

- *Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*

Esta coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em seis volumes, entre os quais destacamos:

- *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Geometria*, de Howard Eves. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

Em cada volume é abordada a história da criação e desenvolvimento de um grande tema matemático. O volume é dividido em tópicos bastante curtos (de no máximo oito páginas), denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado ao tema. Assim, por exemplo, no volume sobre Geometria, existe uma cápsula contendo várias demonstrações do teorema de Pitágoras.

- *História concisa das matemáticas*, de Dirk J. Struik. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

Na obra, o autor, além de narrar fatos, datas e passagens da vida de matemáticos, procura relacionar o trabalho de cada um deles, relatando descobertas que aconteciam, concomitantemente, em lugares diferentes, privilegiando o caráter cultural da produção do conhecimento em Matemática.

- *História da Matemática em atividades didáticas*, de Arlete de Jesus Brito, Antonio Miguel e Dione Lucchesi de Carvalho. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra tem como eixo principal o ensino da Matemática nos campos de Geometria, Trigonometria e números irracionais por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce um papel central, mostrando que ela pode ser uma grande aliada na reinvenção de uma didática em que o estudante assume uma postura mais ativa na produção de conhecimento.

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Uma das obras mais consagradas, sendo referência para professores, estudantes de graduação e pós-graduação em Matemática. Nesta nova edição, destacamos dois novos capítulos: Legados do Século Vinte e Tendências Recentes, que discorrem, entre outros assuntos, sobre o Último Teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1ª ed. Campinas: Unicamp, 2004.

Uma das mais completas obras na área de História da Matemática. Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

A autora lança um olhar crítico sobre como a História da Matemática vem sendo abordada nos últimos tempos, pretendendo derrubar a ideia de que a matemática é essencialmente abstrata e com uma estrutura rígida. A obra aborda diferentes "sistemas matemáticos", desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram, procurando soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *História em Educação Matemática*: propostas e desafios, de Antônio Miguel e Maria Ângela Miorim. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

A obra aborda a história da Matemática, a história da Educação Matemática e de que maneira elas se relacionam. O próprio conceito de história é discutido na obra.

- *Matemática*: uma breve história, de Paulo Roberto Martins Contador. 4ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra está organizada em três volumes: o volume I tem início nas descobertas mais primitivas do conhecimento humano, dos primórdios das civilizações à idade medieval; o volume II vai do Renascimento ao século XVIII; e o volume III aborda, de forma teórica atual, tudo o que foi visto nos dois primeiros volumes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

- *Relatos de memórias* — A trajetória histórica de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, de Nancy Campus Muniz. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A obra visa à recuperação, preservação e difusão da trajetória da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

## Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Polya. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

O livro analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas em sala de aula.

- *A resolução de problemas na Matemática Escolar*, de Stephen Krulik e Robert E. Reys, traduzido por Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Editora Atual, 1998.

A obra reúne 22 artigos do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que poderão ajudar o professor a lidar com a resolução de problemas.

- Coleção Explorando o Ensino – Matemática. Disponível no *site* do MEC em: <portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/destaques?id=12583:ensino-medio>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Trata-se de uma coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM), uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o apoio da Universidade de São Paulo.

Na obra são apresentadas sugestões de abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e uma grande variedade de situações cotidianas em que a Matemática se faz presente. Há artigos envolvendo a História da Matemática, Números, Geometria, Álgebra, ensino e crônicas. O professor tem a oportunidade de enriquecer as discussões em sala de aula, envolvendo e mobilizando os estudantes nas atividades de resolução de problemas.

São três volumes envolvendo assuntos geralmente abordados no Ensino Fundamental e Médio: volume 1 (dividido em 6 capítulos), volume 2 (dividido em 4 partes) e volume 3 (dividido em 6 capítulos).

- *Coleção Tendências em Educação Matemática*

A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação Matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção explora ainda tópicos do programa de Matemática que se transformam em novas tendências no Ensino Médio. O conselho editorial da coleção é formado por professores pesquisadores da Unesp e da UFMG e o coordenador da coleção é Marcelo de Carvalho Borba. Até o início de 2016, a coleção contava com quase 30 obras, entre as quais destacamos:

- *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos, de Helena Noronha Cury. 2ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

A autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica, se os estudantes forem levados a refletir e questionar as próprias soluções.

- *Informática e Educação Matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado. 5ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

Na obra, são apresentados exemplos de uso da informática com estudantes e professores através dos quais debatem-se temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e outras questões epistemológicas e pedagógicas.

- *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David. 1ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008.

Pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o Ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2005.

O livro mostra os objetivos, as etapas e o encaminhamento da resolução de problemas e apresenta os vários tipos de problemas existentes. A obra sugere ainda como propor enunciados e como conduzir os problemas em sala.

- *Educação em Ciências e Matemáticas*: debates contemporâneos sobre ensino e formação de professores, de Terezinha Valim Oliver Gonçalves, Francisco Cristiano da S. Macêdo e Fábio Lustosa Souza. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Na obra, são apresentados e analisados resultados de pesquisa sobre a prática docente, abordagens metodológicas e formação de professores. O livro traz também textos que discutem a relação entre ciência, tecnologia e sociedade e os desafios da Educação Matemática (e científica) nas instituições de ensino no século XXI.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23ª ed. Campinas: Papirus, 2014.

O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (Orgs.). 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2012.

Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação Matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do campus de Rio Claro-SP. Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem suas ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área. São destaques do texto a diversidade de pensamento e da produção matemática

em uma série de contextos socioculturais, a compreensão dessa produção e seu efeito na ação de ensinar.

Em particular, no capítulo *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*, encontramos um levantamento histórico das reformas do ensino da Matemática no mundo e no Brasil e uma reflexão sobre ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

- *Educação Matemática*: uma (nova) introdução, organizado por Silvia Dias Alcântara Machado. 3ª ed. São Paulo: Educ, 2008.

Na obra, são mencionadas oito noções que introduzem o leitor no discurso pedagógico da Matemática.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

Elaborada por educadores espanhóis e traduzida para o português, a obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens em um ensino centrado em competências

- *Elementos de didática da Matemática*, de Bruno D'Amore. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa várias abordagens da Educação Matemática e as principais propostas do pesquisador para a didática da Matemática.

- *Ensaios sobre a Educação Matemática*, de John A. Fossa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra traz vários capítulos ligados ao tema, entre os quais destacamos o uso da História da Matemática como um instrumento pedagógico.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

Esta obra apresenta e discute a etnomatemática – teoria que concebe o ensino de Matemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Fundamentos da didática da Matemática*, de Saddo Ag Almouloud. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

Na obra, são analisados os fenômenos de ensino e de aprendizagem em Matemática num ambiente didático: um meio social concebido para o ensino.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

Nesta obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades. Levantar conjecturas, refletir e formalizar conhecimentos são aspectos discutidos pelos autores, bem como os papéis de estudantes e professores em sala de aula.

- *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem, de Iran Abreu Mendes. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra aborda de maneira direta e profunda a tendência metodológica de investigação no ensino de Matemática, "tecendo redes cognitivas na aprendizagem".

- *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua, de Nilson José Machado. 6ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

Na obra é feita uma análise detalhada sobre a mediação da língua materna (a primeira que aprendemos) no ensino da Matemática, determinando, entre elas, uma relação de impregnação mútua, ao considerar os pontos comuns entre as funções que desempenham e também os pontos complementares nos objetivos que elas perseguem. Em particular, o autor exemplifica essa relação por meio da estruturação no estudo da Geometria.

- *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas, de Antoni Vila e Maria Luz Callejo. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2006.

Por meio de reflexões e relatos de práticas, o livro busca respostas a questões do tipo "Em que consiste realmente o saber resolver problemas?" ou "O que são crenças?".

- *Matemática*. Práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Modelagem em Educação Matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

O livro leva o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação Matemática, destacando que, nesses processos, o estudante ocupa lugar central na escolha de seu currículo.

- *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: pesquisas e práticas educacionais, de Jonei Cerqueira Barbosa, Ademir Donizeti Caldeira e Jussara de Loiola Araújo. 1ª ed. Recife: SBEM, 2007.

A obra, escrita por 23 nomes de destaque no assunto, está dividida em 4 partes: aspectos teóricos da modelagem matemática; modelagem e prática de sala de aula; modelagem matemática e as tecnologias da informação e comunicação; modelagem matemática e formação de professores.

- *O Ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas, de J. C. Sánchez Huete e J. A. Fernández Bravo. Porto Alegre: Penso, 2005.

O livro traz uma reflexão sobre diversos aspectos do ensino e da aprendizagem em Matemática. Alguns capítulos do livro têm relação direta com o sistema educacional espanhol. No entanto, na segunda metade do livro há um tratamento interessante dado à resolução de problemas e à construção do conhecimento em Matemática, incluindo uma explanação sobre os vários pontos de vista para a definição de um problema em Matemática, sob a ótica de diversos educadores e também dos estudantes.

- *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Org.). 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

O livro resulta, basicamente, dos trabalhos de reflexão e pesquisa em Educação Matemática do grupo da Unesp de Rio Claro-SP. Ele está dividido em cinco partes, a saber: Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática; História da Matemática e Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática; Formação de professores de Matemática; e Informática na Educação Matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação Matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1ª ed. Londrina: EDUEL, 2011.

As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática, destacando possibilidades de trabalho e convidando o leitor a repensar e construir novos significados para o ensino e a aprendizagem.

- *Tecnologias digitais e Educação Matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (Orgs.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

Ligados ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

## Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10ª ed. Petrópolis: Vozes, 2012. (Coleção Na Sala de Aula)

A obra apresenta sugestões de práticas, expondo princípios e discutindo estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1ª ed. São Paulo: Penso, 2002.

O livro traz ao leitor os textos nos quais os autores suíços Perrenoud e Thurler apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação como apoio à aprendizagem*, de Margarita Ballester et al. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Coleção Inovação Pedagógica)

Nesse texto é possível encontrar reflexões e propostas sobre temas de avaliação para o professor recriar seu cotidiano pedagógico.

- *Avaliação das aprendizagens*: sua relação com o papel social da escola, de Claudia de Oliveira Fernandes. 1ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2014.

Na obra, a autora defende a ideia de que os processos atuais avaliativos nas escolas brasileiras são, em geral, baseados em concepções quantitativas de conhecimento e não diferem, essencialmente, de práticas "antigas". Nesse sentido, ela propõe outro olhar à avaliação, desafiando os docentes a abandonar o "velho conhecido".

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2011.

A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor, que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo, que possibilita questionar ações passadas e gerar ações futuras.

- *Avaliação desmistificada*, de Charles Hadji. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é uma detalhada reflexão sobre a essência da avaliação, a qual, segundo o autor, está dividida em duas partes: compreender e agir.

- *Avaliação em Matemática*: história e perspectivas atuais, de Wagner Rodrigues Valente. 1ª ed. Campinas: Papirus, 2015.

A obra aborda a cultura das práticas avaliativas, os formadores dos professores de Matemática e suas práticas, a história escolar da avaliação, entre outros.

- *Avaliação em Matemática:* pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2012.

O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado et al. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2015.

O livro busca trazer parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Avaliação*: novos tempos, novas práticas, de Edmar Henrique Rabelo. 7ª ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

O livro discute as profundas transformações no sistema educacional e seus impactos sobre a avaliação.

- *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*, de Juan Manuel Álvarez Méndez. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2002. (Coleção Inovação Pedagógica)

No texto, o autor destaca a importância da avaliação nos processos de aprendizagem, desde que colocada a serviço do conhecimento. Caso a avaliação seja limitada à prova, ela pode atuar como um instrumento de exclusão.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios Transversais)

O autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

## Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção M³ Matemática Multimídia, disponível em <m3.ime.unicamp.br> (Acesso em: 21 mar. 2016), contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp. Os recursos podem ser buscados pelas mídias: experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios; ou pelos temas centrais: análise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções. Vamos conhecer um pouco mais dessas mídias:

**Experimentos**: São atividades práticas e instigantes em que se constrói algum conceito. Esses experimentos contam com um roteiro metodológico para o professor, uma folha de acompanhamento para os estudantes, entre outros. Destacamos três experimentos para exemplificação:

- *A altura da árvore*, que introduz, experimentalmente, o conceito de tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo, além de propor atividades práticas para medir ângulos e determinar a altura de objetos.

- *Baralhos e torradas*, experimento no qual são apresentados dois jogos envolvendo o conceito de probabilidade condicional. Os estudantes deverão tomar decisões nesse contexto.

- *Escoamento de areia*, que trata de razões e proporcionalidade.

**Vídeos**: Há uma grande variedade de vídeos que duram, em média, dez minutos cada e que podem ser utilizados como um recurso metodológico diferenciado na sala de aula. Os vídeos abordam assuntos estudados no Ensino Médio por meio de situações, ficções e contextualizações. Os vídeos são ricos em representações gráficas que dão suporte ao conteúdo. Além disso, neles são mostrados pequenos documentários que trazem informações interdisciplinares. Alguns vídeos deixam, propositadamente, algumas questões em aberto para o espectador refletir.

Cada vídeo é acompanhado do guia do professor. Na obra, são sugeridos vários desses vídeos para o estudante.

Destacamos a seguir alguns desses vídeos:

- *De malas prontas*: uma passageira está prestes a embarcar e não consegue colocar todas as roupas na mala. Um funcionário da companhia aérea vai ajudá-la usando o princípio fundamental da contagem.

- *Alice e a lei dos cossenos*: narra o sonho da jovem Alice sobre a demonstração da lei dos cossenos (é apresentada uma demonstração diferente da que aparece nesta coleção).

- *Salvador, o hipocondríaco*: ao ler a bula de um medicamento, o personagem Salvador depara com conceitos importantes ligados à função exponencial, como o de meia-vida.

Em geral, os vídeos apresentam uma linguagem informal e compatível com a faixa etária dos estudantes de Ensino Médio, podendo ser usados em vários contextos:

- como introdução de um assunto (ou atividade) que será apresentado na sequência: por exemplo, o vídeo *A Cartomante* pode servir de motivador para o estudo dos agrupamentos em Análise Combinatória. Já o vídeo *A loira do banheiro* envolve ideias de criptografia e pode ser apresentado antes da *atividade 3: Matrizes*, que o professor encontra nos comentários específicos do volume 2.

- como complemento de conteúdos: o vídeo *Lembranças de Sofia*, em que se discutem o planejamento de um experimento e a amostragem em Estatística.

- como objeto da História da Matemática: um exemplo é o vídeo *Esse tal de Bhaskara*, que apresenta a trajetória histórica dos processos de resolução de equações do 2º grau.

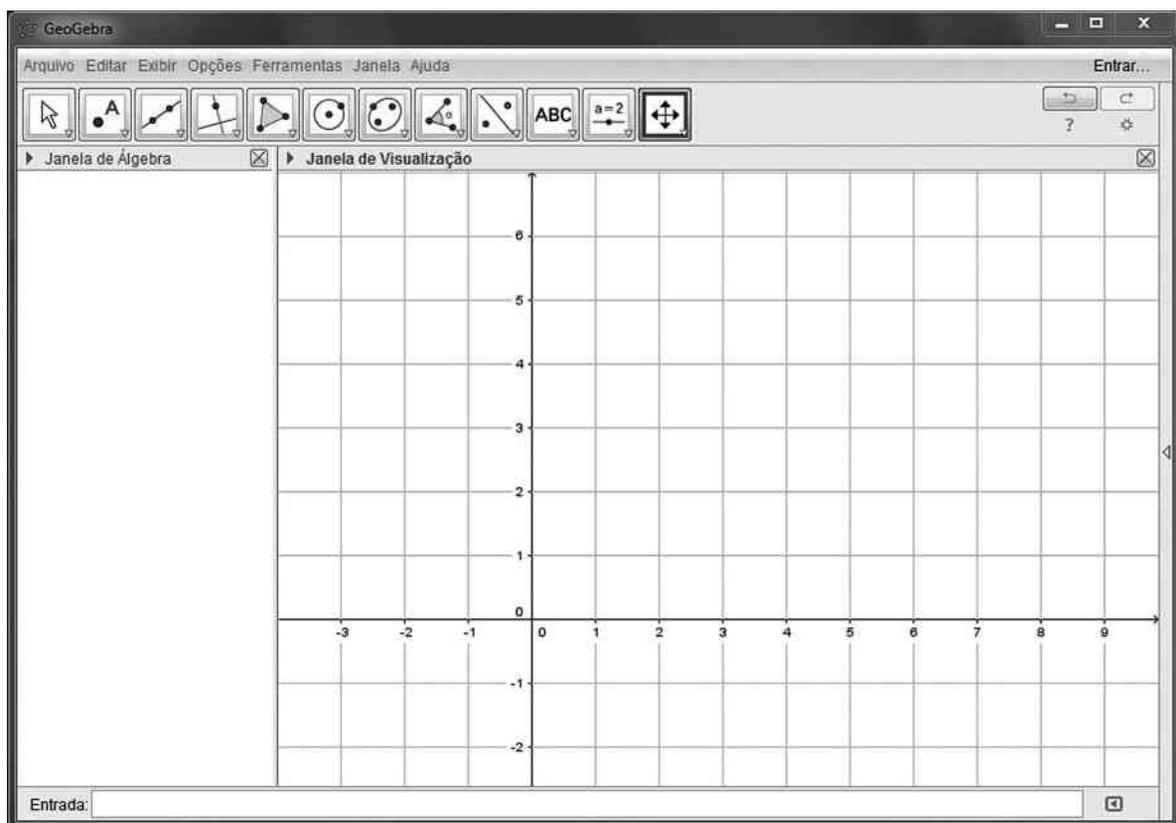
- como instrumento de avaliação, em que o professor encontra nos arquivos (pacote completo) sugestões de atividades que podem ser aplicadas antes ou depois da exibição dos vídeos.

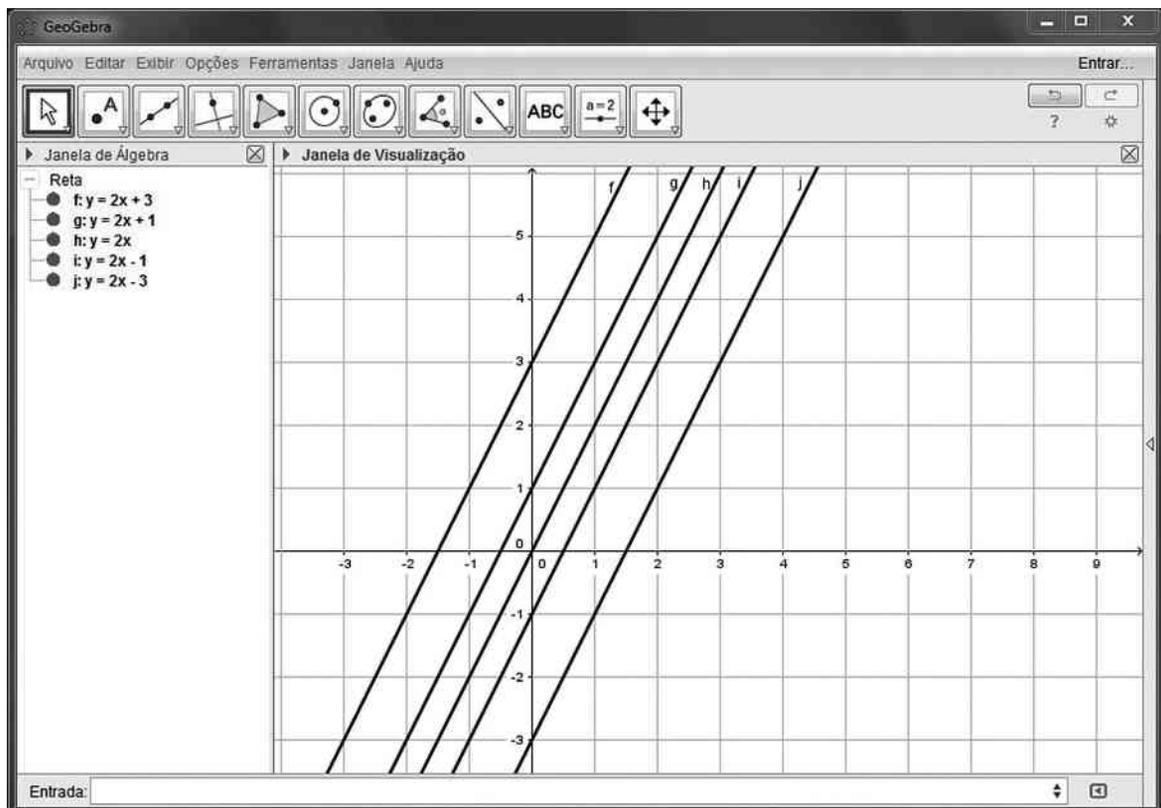
## Sugestões de *softwares* de Matemática

Destacamos a seguir três *softwares* gratuitos que podem ajudar o professor a dinamizar e diversificar as suas estratégias em sala de aula. Dois deles foram utilizados na coleção: o GeoGebra, no estudo de funções nos volumes 1 e 2 e no traçado de cônicas, no volume 3, e o Graphmática, no estudo das funções polinomiais no volume 3.

### GeoGebra

Este *software* pode ser utilizado no trabalho com funções, geometria plana e analítica. Está disponível para instalação em: <www.geogebra.org/download>. Acesso em: 21 maio 2016.

No estudo das funções, por exemplo, o traçado dos gráficos das funções elementares (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica etc.) pode ser facilmente executado, a partir da janela "entrada", como mostra a reprodução da tela a seguir. Basta digitar a lei da função (por exemplo, y = 3x + 1 na função afim; y = x^2, em que a tecla ^ é usada para potenciação, representando a função $y = x^2$; y = abs(x), para a função modular $y = |x|$ e assim por diante).

GEOGEBRA

Uma atividade que propomos, por meio do GeoGebra, é a elaboração de gráficos de várias funções a partir de uma delas. Por exemplo, a partir da função $y = 2x$, podemos construir os gráficos das funções $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos visualizar os gráficos gerados a partir de alguns valores de **k**.

GEOGEBRA

Além de visualizar a translação vertical, cria-se espaço para a compreensão dos coeficientes (angular e linear) das retas obtidas.

- Ao perceberem que as retas do feixe $y = 2x + k$ são paralelas, fica estabelecido que o coeficiente angular dessas retas mantém-se constante e determina a inclinação comum a todas essas retas.
- Ao perceberem que a reta de equação $y = 2x + k$ intersecta o eixo das ordenadas em (0, k), fica estabelecido o papel do coeficiente linear (**k**).

Várias outras possibilidades de trabalho com funções podem ser realizadas com o GeoGebra. Citamos alguns exemplos:

- a construção do gráfico da função exponencial e de sua inversa (a função logarítmica) no mesmo plano cartesiano permite reconhecer a simetria existente entre esses gráficos em relação à reta $y = x$;
- a construção do gráfico da função definida por $y = x^2$ e $y = x^2 + k$, com $k \in \mathbb{R}$; a construção dos gráficos da "família" de parábolas do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$;
- a construção do gráfico de funções modulares, com translação vertical ($y = |x| + k$, a partir do gráfico de $y = |x|$) e horizontal ($y = |x + k|$, a partir do gráfico de $y = |x|$). Lembre que deve ser usado abs(x) para indicar o módulo de **x**;
- a construção do gráfico de funções exponenciais do tipo $y = a^x + k$ ($0 < a$, $a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$).

Na Geometria Analítica, destacam-se possibilidades de trabalho com o plano cartesiano, distâncias, perímetro e área de polígonos, pontos notáveis do triângulo, paralelismo e perpendicularidade.

No livro *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*, de Jorge Cássio Costa Nóbriga e Luís Cláudio Lopes de Araújo (Brasília: Exato, 2010), encontramos várias propostas de utilização do GeoGebra, em linguagem simples e direta.

### Winplot

É um programa usado para elaborar gráficos de funções, definidas em certo intervalo a partir de suas leis. Seu funcionamento é relativamente simples; há opções de ajuda em todas as partes. Este *software* está disponível para instalação em: <math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Sugerimos usá-lo na construção de gráficos de funções usualmente estudadas no Ensino Médio: função afim, quadrática, modular (esse *software* usa abs(x) para representar o módulo de **x**), exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas (o número real $\pi$ deve ser digitado como "pi").

### Graphmática

Similar ao Winplot, este *software* possui uma tabela de pontos (x, y) que é automaticamente preenchida à medida que é colocada a lei da função $y = f(x)$ cujo gráfico se pretende construir. Este *software* está disponível para instalação em: <www.graphmatica.com/>. Acesso em: 21 mar. 2016.

## Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em revista*

É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Até o final de 2015 já haviam sido publicadas 47 revistas. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* <www.sbembrasil.org.br>. Acesso em: 21 mar. 2016.

- Revista *Carta na Escola*

Lançada em 2006, a revista é uma publicação dirigida a educadores do Ensino Médio. São artigos, reportagens e sugestões de temas para discussões em sala de aula. Embora não exista uma seção específica para a Matemática em cada exemplar, é possível extrair boas ideias para a sala de aula. Acessando o *site* <www.cartaeducacao.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), pode-se conhecer um pouco mais da revista, em sua versão *on-line*.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

É uma publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Encontramos relatos de experiências em sala de aula, problemas que suscitam questões pouco conhecidas, uma nova abordagem de um assunto, entre outros. Além dos artigos há as seções: Problemas, O leitor pergunta, Livros, Cartas do leitor e Painéis.

Até o início de 2016, já haviam sido publicadas quase 90 revistas. No *site* <www.rpm.org.br>, o leitor encontrará informações mais detalhadas.

- Revista *Nova Escola*

A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. No *site* <revistaescola.abril.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), é possível conhecer um pouco mais sobre a revista, incluindo os planos de aula de Matemática para alunos do Ensino Médio, blogues, vídeos, jogos etc.

- *Revista Pátio* – Ensino Médio, Profissional e Tecnológico

Essa revista tem periodicidade trimestral e faz parte dos periódicos publicados pelo Grupo A. Nela são discutidos temas variados e atuais em Educação, incluindo temas diversificados com enfoque interdisciplinar. Para mais informações, acesse <www.grupoa.com.br/revista-patio>. Acesso em: 21 mar. 2016.

## Sugestões de *sites*

- *Associação de Professores de Matemática (Portugal)*

Disponível em: <www.apm.pt>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal. Há textos para reflexão, propostas de atividades, recursos educativos, que direcionam a atividades variadas em Matemática e *softwares* para *download*, publicações etc.

- *Banco Internacional de Objetos Educacionais*

Disponível em: <objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em: 22 abr. 2016.

*Site* do Banco Internacional de Objetos Educacionais, com quase 20 000 objetos (recursos digitais) em vários formatos de arquivo e de acesso público. Há diversas opções de recursos, como animação/simulação, áudio, hipertexto, imagem, *softwares* educacionais ou vídeos. Esses objetos podem ser acessados isoladamente na seção Modalidade de Ensino, ou por meio das seções a seguir: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional e Educação Superior.

- *Educação Matemática e Tecnologia Informática* (Instituto de Matemática – UFRGS)

Disponível em: <turing.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O *site* Educação Matemática e Tecnologia Informática apresenta material que usa a tecnologia da informática no âmbito da educação matemática escolar.

Na opção *Software* são listados aplicativos que podem auxiliar o trabalho com Geometria, Álgebra e Funções, além de *softwares* recreativos. Na opção Atividades, encontramos propostas de trabalho que fazem uso desses *softwares*. O *site* também apresenta uma relação de *links* que oferecem possibilidades de trabalho, bem como artigos sobre o Ensino de Matemática.

- *iMática*

Disponível em: <www.matematica.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O iMática (A Matemática Interativa na Internet) é um *site* mantido por professores e estudantes do IME-USP. É composto de quatro seções:

– História da Matemática (é possível encontrar bons textos, seja por uma linha do tempo, biografia ou por tópicos);

– Problemas-desafios (geralmente relacionados à seção Problemas da Revista do Professor de Matemática (RPM);

– Programas (é possível encontrar *softwares* gratuitos, voltados ao ensino e à aprendizagem em Matemática, entre eles o iGeom, de geometria dinâmica, o iGraf, de funções, e o iHanoi, que trata do problema da Torre de Hanói);

– Cursos (é possível encontrar centros que oferecem cursos à comunidade interna e externa da USP).

- *Laboratório de Educação Matemática (UFC)*

Disponível em: <www.ledum.ufc.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Educação Matemática da UFC. Na opção Produtos, são disponibilizados trabalhos de conclusão de curso, dissertações, trabalhos em congressos, entre outros.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (UFMG)*

Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Ensino de Matemática da UFMG. Apresenta propostas de jogos e atividades, bem como um amplo acervo, com publicações em assuntos variados, como resolução de problemas, Educação Matemática, lógica etc.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp)*

Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

*Site* do laboratório de Ensino da Matemática da Unicamp (IMECC – Unicamp). Há indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica. Na seção Publicações, encontramos artigos sobre temas que podem contribuir para a formação de professores, como a história do conceito de função, a prática avaliativa nas salas de aula de Matemática e o que é Etnomatemática. Na seção Jornal do Professor de Matemática, há sugestões de leitura e atividades para a sala de aula.

- *Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp)*

Disponível em: <www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Há também a seção intitulada Eureka, que é aberta à comunidade geral e discute a resolução de problemas.

A seção Artigos apresenta publicações recentes relacionadas ao ensino e à aprendizagem em Matemática; já a seção História da Matemática destaca a vida de grandes matemáticos e suas contribuições ao desenvolvimento dessa ciência.

- *Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (UFF)*

Disponível em: <www.lante.uff.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Universidade Federal Fluminense há informações e detalhes sobre a especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, na modalidade a distância. O curso é inteiramente gratuito e tem como objetivo apresentar recursos para o Ensino da Matemática, introduzir novas tecnologias e instrumentar o professor para o ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio.

- *Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências (UFRJ)*

Disponível em: <www.limc.ufrj.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

*Site* do laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ. Apresenta diversos materiais para uso em sala de aula, incluindo um *software* de geometria dinâmica (o Tabulae Colaborativo).

- *Olimpíada Brasileira de Matemática*

Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática, sob responsabilidade do Impa (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; nível 3: Ensino Médio e nível universitário) e fases (1ª, 2ª e 3ª). O grau de dificuldade aumenta à medida que se avança a fase. Pode ser uma interessante fonte para o trabalho com resolução de problemas, ainda que muitas questões apresentem um elevado grau de dificuldade.

- *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*

Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um extenso e variado banco de questões, separadas por níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; e nível 3: Ensino Médio). É uma excelente oportunidade para o professor promover o hábito de resolver problemas na sala de aula.

O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, onde são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados. O acesso é livre e gratuito.

- *Revista Nova Escola*

Disponível em: <revistaescola.abril.com.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* são sugeridas aulas e atividades diferenciadas na seção Planos de aula. Os planos são divididos por segmentos (Educação Infantil, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio) e por área de conhecimento (Ciências da Natureza e Matemática). Na Matemática do Ensino Médio, os assuntos encontram-se divididos em três blocos: Álgebra, Geometria e Análise de dados. As atividades são desenvolvidas a partir de matérias de revistas, estabelecendo um elo entre a Matemática e as notícias do cotidiano. Além disso, o *site* permite que você compartilhe sua opinião sobre os planos de aula com outros colegas de profissão, por meio de redes sociais. O *site* contém ainda uma grande variedade de artigos sobre educação: gestão escolar, planejamento e avaliação, formação, políticas públicas, inclusão, criança e adolescente.

- *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*

Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática existe o calendário atualizado de concursos e eventos da área de pesquisa em Educação Matemática. Há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais.

Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação Matemática de todas as regiões.

Na opção Biblioteca em Educação Matemática, há uma vasta bibliografia com publicações recentes na área. Você também tem acesso a vários grupos de trabalho (GTs) e pesquisa reunidos pela SBEM.

## Sugestões de livros paradidáticos

As coleções seguintes podem servir de base para relembrar alguns conceitos estruturantes do Ensino Fundamental.

- *Aprendendo a matemática com o GeoGebra*, de Luís Cláudio Lopes de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga. 1ª ed. São Paulo: Exato, 2010.

Os autores, buscando superar as limitações do uso da lousa (quadro e giz), procuraram escrever um livro autoinstrutivo voltado para o estudante para que ele possa desenvolver, de maneira independente, as construções. Caberia, então, ao professor, a partir da manipulação das figuras, auxiliar o estudante na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

No volume 1 da coleção, o livro pode auxiliar os estudantes nas aprendizagens em Geometria Plana (teorema de Tales, teorema de Pitágoras, áreas, função afim e função quadrática); e, no volume 2, na aprendizagem da trigonometria em triângulos quaisquer.

- *Coleção Pra que serve Matemática?*

Essa coleção busca responder à clássica pergunta dos estudantes em qualquer assunto: "Pra que isto serve?". Por meio de exemplos do cotidiano, de jogos e de aplicações, os autores procuram responder à pergunta clássica em cada um dos seguintes temas:

- *Álgebra*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Ângulos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Equação do 2º grau*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Estatística*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2001.

- *Frações e números decimais*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Geometria*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 16ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Números negativos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 21ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Proporções*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 13ª ed. São Paulo: Atual, 2002.

- *Semelhanças*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 14ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Coleção Vivendo a Matemática*

Essa coleção busca despertar o interesse pela Matemática por meio do conhecimento das ligações entre essa ciência e objetos ou fatos do cotidiano. Sugerimos os seguintes volumes:

- *Lógica? É lógico!*, de Nilson José Machado. 9ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

- *Medindo comprimentos*, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*, de Nilson José Machado. 8ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Semelhança não é mera coincidência*, de Nilson José Machado. 7ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

## Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *A Matemática das coisas*: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato (adaptação de Ruth Ribas Itacarambi). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro mostra a Matemática como parte da vida do ser humano. Há 5 eixos no livro: coisas do dia a dia, a terra é redonda, coisas secretas, arte e geometria e coisas matemáticas. Com temas interessantes, desperta a atenção de professores e estudantes.

- *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática, de Alex Bellos. 1ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

Viajando entre diferentes línguas e culturas, o autor investiga as propriedades do jogo Sudoku com seus inventores; conversa com um pesquisador francês especializado no raciocínio quantitativo de tribos indígenas na Amazônia; venera

um guru indiano responsável pelo legado mítico criador do zero; visita a escola japonesa em que professores e estudantes fazem cálculos imaginando o funcionamento de um ábaco; na companhia de um estatístico, aventura-se em um cassino de Nevada para tentar prever os acasos da fortuna; consulta um famoso numerólogo sobre o nome profissional que deve usar.

- *Conexões Matemáticas Educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

Explorando "brincadeiras" com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos e policubos, dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória etc., o livro oferece experiências significativas e prazerosas com a Matemática que podem ser usadas em sala de aula.

- *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos*, de Dimas Monteiro de Barros. 1ª ed. Araçatuba: Novas Conquistas, 2003.

O livro traz uma série de problemas de raciocínio lógico não muito difíceis, acompanhados da resolução comentada. Pode ser uma boa opção para o início de um trabalho sistemático do exercício do raciocínio lógico com os estudantes.

- *Leonardo e a Matemática*, de Giorgio T. Bagani e Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O livro relata a Matemática nos tempos de Leonardo da Vinci e seu interesse por essa ciência.

- *Mania de Matemática 2*: novos enigmas e desafios matemáticos, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nessa obra, há uma grande variedade de desafios, mistérios, paradoxos e quebra-cabeças, construídos em uma linguagem comum e acessível também a leitores não habituados com temas de Matemática.

Do mesmo autor, destacamos também: *Almanaque das curiosidades matemáticas*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões. O livro está estruturado em três partes: triângulos e recreações, materiais pedagógicos manipuláveis e miscelânea, apresentando situações-problema, atividades, recreações. Há conexões com a teoria dos grafos, expansões binomiais, geometria plana e espacial.

## Referências bibliográficas

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218. (Seminários & Debates)

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*, Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

_____. *Ensino Médio Inovador*. Brasília, 2009. Disponível em: <portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CAMPOS, F. C. A. V.; SANTORO, F. M.; BORGES, M. R. S. A.; SANTOS, N. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003. (Coleção Educação a Distância)

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2001. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

FAZENDA, I. C. A. *Integração e Interdisciplinaridade no ensino brasileiro*: efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 2011.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1999.

MORETTO, V. P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 9ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2010.

PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2009.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

_____; THURLER, M. G. *Competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

TOMAZ, V. S. *Práticas de transferência de aprendizagem situada em uma atividade interdisciplinar*. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

# COMENTÁRIOS ESPECÍFICOS

Iniciamos este volume com quatro capítulos dedicados à Geometria Analítica. Embora cada um deles apresente um ente geométrico particular — ponto, reta, circunferência e cônicas —, as oportunidades de relacionar uns aos outros sempre são aproveitadas.

No capítulo 5, sobre Estatística básica, continuamos o estudo iniciado no volume 1 desta coleção. Fazemos uma rápida revisão sobre os conceitos iniciais (variável, população, amostra etc.), sobre a organização de dados em tabelas de frequência e sobre a construção e interpretação de gráficos estatísticos e, na sequência, são apresentadas as medidas de centralidade (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (amplitude, variância, desvio padrão e desvio médio).

O capítulo 6 aborda a Matemática Financeira, colocando o estudante em contato com temas ligados à educação financeira e contribuindo para a construção da cidadania.

Os números complexos são apresentados no capítulo 7. Iniciamos esse estudo destacando o contexto histórico em que se discute a necessidade, o aparecimento e o reconhecimento dos números complexos na história da Matemática.

Os capítulos 8, sobre polinômios, e 9, sobre equações polinomiais, encerram a parte de Álgebra da coleção.

## Objetivos específicos

### Geometria

Os objetivos apresentados a seguir referem-se à Geometria Analítica.

- Localizar pontos no plano cartesiano, por meio de suas coordenadas e vice-versa.
- Reconhecer as vantagens do uso do plano cartesiano para localização de pontos, retas e circunferências em situações-problema.
- Determinar a distância entre dois pontos e aplicá-la na resolução de problemas.
- Determinar o ponto médio de um segmento.
- Verificar analiticamente a condição de alinhamento de três pontos.
- Revisar conceitos de Geometria Plana como mediana e baricentro de um triângulo sob a ótica da Geometria Analítica.
- Calcular a área de um triângulo.
- Reconhecer a forma reduzida da equação de uma reta, interpretando os seus coeficientes.
- Reconhecer a forma geral da equação de uma reta.
- Estabelecer a correspondência entre a equação de uma reta e a função afim.
- Determinar interseções entre retas.
- Reconhecer retas paralelas a partir de suas equações.
- Revisar base média de um triângulo e suas propriedades.
- Reconhecer retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Resolver problemas envolvendo altura de um triângulo, distâncias entre retas paralelas etc.
- Relacionar o estudo das inequações do 1º grau com duas variáveis a problemas de otimização estudados pela programação linear.
- Estabelecer a equação de uma circunferência dada.
- Reconhecer na equação de uma circunferência as coordenadas do centro e a medida do raio.
- Transformar em reduzida a forma geral da equação de uma circunferência e vice-versa.
- Estudar posições relativas entre ponto e reta, ponto e circunferência, reta e circunferência, circunferência e circunferência.
- Determinar a equação de uma circunferência que passa por três pontos relacionando à determinação do circuncentro de um triângulo.
- Compreender o traçado das cônicas com auxílio de *softwares* livres e associá-las a imagens do mundo real.
- Estabelecer a equação de uma cônica dada, com eixos paralelos aos de um sistema cartesiano ortogonal.
- Identificar os elementos principais de cada cônica a partir de sua equação.
- Reconhecer as cônicas por meio de suas equações reduzidas.
- Relacionar a parábola (com eixo de simetria paralelo ao eixo **y**) ao gráfico de uma função quadrática.
- Relacionar a equação de uma hipérbole equilátera particular ao gráfico de uma função recíproca e às grandezas inversamente proporcionais.

### Números

O eixo de números é retomado neste volume com a apresentação dos números complexos, cujos objetivos estão listados a seguir.

- Compreender o contexto histórico que envolve o surgimento e reconhecimento dos números complexos.
- Identificar os números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica, bem como representá-los no plano de Argand-Gauss.
- Efetuar as operações básicas envolvendo números complexos na forma algébrica.
- Estabelecer relações entre o módulo de um número complexo e a Geometria Analítica.

### Álgebra

Os objetivos relacionados ao eixo da Álgebra podem ser agrupados em polinômios e em equações, conforme segue.

#### Polinômios:

- Iniciar o estudo dos polinômios utilizando-os, por exemplo, para representar áreas de figuras planas e volumes e áreas de sólidos geométricos.
- Reconhecer polinômios com uma única variável.

- Relacionar um polinômio a uma função polinomial e identificar o seu grau.
- Estabelecer a condição de igualdade entre polinômios e reconhecer o polinômio nulo.
- Relacionar a divisão de números inteiros à divisão de polinômios.
- Determinar os polinômios quociente q(x) e resto r(x) obtidos na divisão de um polinômio f(x) por g(x), com $g(x) \neq 0$, e estabelecer as relações entre eles.

Equações:

- Ampliar o conjunto universo de uma equação algébrica para o universo $\mathbb{C}$ dos números complexos.
- Resolver algumas equações de grau superior a dois por meio de fatoração e saber que apenas algumas equações podem ser assim resolvidas.
- Usar os números complexos na resolução de equações.
- Efetuar a fatoração (decomposição) de um polinômio em função de suas raízes.
- Usar a divisão de polinômios para a obtenção de outras raízes de um polinômio a partir de alguma raiz conhecida.
- A partir de alguma informação dada sobre as raízes de um polinômio, aplicar as relações entre coeficientes e raízes para determinação de uma ou mais raízes.
- Analisar a quantidade de raízes complexas não reais de uma equação com coeficientes reais.
- Pesquisar raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros.
- Resolver problemas sobre equações polinomiais a partir da análise do gráfico, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, das funções correspondentes.

### Estatística, contagem e probabilidade

Neste volume, os objetivos específicos desse eixo estão relacionados, principalmente, à Estatística.

- Reconhecer a importância da Estatística no cotidiano e suas contribuições às mais diversas áreas.
- Revisar os conceitos de: população, amostra, variável, tabelas de frequência e gráficos.
- Determinar as medidas de centralidade (ou posição): média, mediana e moda para os valores de uma variável quantitativa e discutir em que situações o uso de uma dessas medidas é mais (ou menos) adequado.
- Resolver problemas em situações cotidianas envolvendo média aritmética simples e ponderada.
- Compreender a necessidade de definir uma medida que revele o grau de variabilidade ou dispersão de um conjunto de dados.
- Calcular a amplitude de um conjunto de dados e usá-la criticamente para comparar, quanto à variabilidade, dois conjuntos de valores.
- Calcular variância e desvio padrão de uma relação de dados e usá-los, criticamente, para comparar o grau de dispersão (em torno da média) de dois conjuntos de valores.
- Realizar cálculos estatísticos usando *softwares* de planilhas eletrônicas (ver atividade 6, sobre esse assunto, nas *Sugestões de atividades em grupo*).

### Matemática Financeira

- Reconhecer a importância da Matemática comercial e financeira na construção da cidadania do estudante.
- Construir conhecimentos de educação financeira, tais como a importância de poupar, a escolha entre pagamento à vista ou a prazo, as vantagens e desvantagens na escolha entre poupar e consumir etc.
- Calcular porcentagens de certo valor usando procedimentos diversos: cálculo exato, aproximado, mental e com auxílio de calculadora simples.
- Resolver problemas comuns no comércio, tais como: cálculo de descontos ou acréscimos, variação percentual etc.
- Usar a calculadora comum para resolver problemas cotidianos como: determinação do valor de um produto após um aumento (ou desconto), cálculo do aumento (ou desconto) percentual etc.
- Distinguir juros simples de compostos e resolver problemas que envolvam essas modalidades de juros.
- Identificar e calcular juros simples (juros de mora) cobrados no atraso do pagamento de contas de consumo.
- Reconhecer e calcular juros compostos em investimentos financeiros, financiamentos, dívidas de cartão de crédito etc.
- Usar os conceitos aprendidos para tomada de decisões como: pagar à vista ou a prazo?
- Relacionar juros simples e compostos às progressões aritmética (função afim) e geométrica (função exponencial), respectivamente.
- Relacionar a expressão do montante dos juros compostos à função exponencial e usar logaritmos para resolver situações-problema de Matemática Financeira.
- Utilizar o conceito de valor atual (ou valor presente) de uma sequência de pagamentos para compreensão do mecanismo dos financiamentos.

## Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais

### Geometria

No estudo da Geometria Analítica, é importante que os estudantes consigam relacionar a Álgebra à Geometria, usando equações algébricas para representar e caracterizar propriedades geométricas e, reciprocamente, compreender as equações por meio das figuras geométricas.

Nesse estudo, é recomendável que se criem situações em que os estudantes percebam as vantagens do uso de um sistema de coordenadas cartesianas para localizar, por exemplo, algum estabelecimento ou alguma rua em um bairro, cidades em um mapa etc. Em alguns exercícios, entre as atividades propostas, são apresentados problemas dessa natureza. Na *atividade 1: O cálculo de área de figuras planas*, no tópico *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas, a utilização de um sistema de coordenadas ajuda na descrição oral de uma figura geométrica. Essa pode ser uma interessante atividade avaliativa.

No estudo da Geometria Analítica, o professor deve revisar alguns tópicos e propriedades da Geometria Plana geralmente estudados no Ensino Fundamental II, tais como: altura do triângulo, base média do triângulo, baricentro e sua propriedade principal (dividir a mediana na razão de 2 : 1), simetria, propriedade da reta tangente e da reta secante a uma circunferência, circuncentro do triângulo etc. Alertamos também para o uso indiscriminado de fórmulas, quando essas são apresentadas sem qualquer justificativa. É necessário que elas sejam construídas com os estudantes para que a aprendizagem seja mais efetiva. Na resolução de vários problemas, a construção de figuras para representar as informações dadas pode ser um apoio importante na busca dos procedimentos a serem feitos, bem como na previsão do número de soluções do problema.

No estudo da reta, a ênfase maior deve ser dada às formas geral (obtida a partir da condição de alinhamento de três pontos) e reduzida (interpretando seus coeficientes), ao estudo das posições relativas de duas retas no plano e suas aplicações (por exemplo, na determinação da medida da altura de um triângulo e na correspondência entre a equação de uma reta e a função afim), abrindo-se também espaço para a revisão de sistemas lineares $2 \times 2$ na discussão do número de interseções de duas retas.

O estudo da resolução gráfica das inequações do 1º grau com duas incógnitas pode ser feito contextualizando-o com uma introdução à programação linear – veja o texto na seção *Aplicações* – capítulo 2 (Uma introdução à programação linear) do livro-texto.

Nestas Orientações Didáticas há outra proposta de atividade envolvendo problemas de otimização, estudados pela programação linear, apresentada nas *Sugestões de atividades em grupo*.

Uma possibilidade de atividade diferenciada, a qual pode ser usada como instrumento de avaliação, envolve o cálculo da área de um triângulo, triângulos semelhantes e matrizes de transformações geométricas no plano. Seu desenvolvimento está detalhado na *atividade 3: Geometria Analítica, semelhança de triângulos e matrizes*, apresentada no item *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas.

No estudo da circunferência é importante que o estudante compreenda como é obtida a sua equação e saiba determinar a medida do raio e o centro a partir dela. No estudo das posições relativas entre reta e circunferência, algumas propriedades da Geometria Plana devem ser lembradas.

Na seção *Troque Ideias* – capítulo 1 (Resolvendo um problema com o circuncentro do triângulo) temos a oportunidade de revisar algumas construções geométricas com régua e compasso, para a determinação do circuncentro de um triângulo, a partir de uma situação-problema.

Muitas vezes falta tempo para o estudo completo das cônicas; entretanto, há nele algumas ideias centrais que devem receber maior destaque:

- Colaborar para que o estudante consiga perceber que todas as cônicas resultam de algum tipo de seção de uma superfície cônica circular reta por um plano.
- Utilizar *softwares* livres de matemática na construção das cônicas auxilia o estudante na compreensão de seus traçados, na identificação de seus elementos etc.
- Auxiliar o estudante a notar que toda cônica tem uma equação e a mostrar ao menos a equação reduzida de cada cônica (com centro na origem).
- Relacionar a equação da parábola à função quadrática.

## Estatística, contagem e probabilidade

Uma das grandes competências que permeiam o estudo da Estatística é a contextualização sociocultural, no sentido de que ela permite ao jovem estudante fazer uma leitura consciente e crítica das questões do cotidiano e dos problemas de nossa sociedade e, desse modo, o prepara para intervir e propor soluções para problemas diversos. Não é difícil enumerar temas que podem ser discutidos no estudo da Estatística: saúde e bem-estar, meio ambiente, violência urbana, desigualdades sociais e regionais, trabalho, comunicação, mundo digital, economia, entre outros.

Nesse sentido, é recomendável que o professor, no planejamento das aulas e das atividades, mobilize os estudantes a buscar gráficos, tabelas, textos e reportagens extraídos de jornais, revistas, internet e outros veículos de comunicação. Desse modo, o estudante poderá comunicar-se oralmente e por escrito (utilizando a linguagem matemática) para relatar, analisar e discutir as questões do mundo real. Aliás, a Estatística é um dos tópicos do programa que melhor possibilita avaliar a comunicação oral do estudante.

Uma possibilidade de atividade introdutória, que tem como objetivo revisar os conceitos iniciais da Estatística, como variável, tabelas de frequência e representações gráficas, é levantar e tabular dados a partir de informações colhidas na aula, através das respostas dos estudantes: por exemplo, fazer um levantamento sobre o tempo (em horas) diário de uso da internet. Em *Sugestões de atividades em grupo* são apresentadas, de modo mais detalhado, propostas de atividades similares, além de outras mais complexas, que também podem servir como instrumento de avaliação.

No livro-texto, uma leitura merece destaque, pois contribui para a construção da cidadania dos estudantes, a da seção *Aplicações* – capítulo 5 (As pesquisas eleitorais), que trata da interpretação dos resultados de uma pesquisa eleitoral. No texto são apresentadas ideias básicas sobre margem de erro e intervalos de confiança, fundamentais para um cidadão fazer a correta leitura de uma pesquisa eleitoral.

O estudo das medidas de centralidade e dispersão de um conjunto de dados não deve se limitar, unicamente, ao cálculo dessas medidas. É necessário que os estudantes façam a correta interpretação dos números obtidos e que sejam criadas situações em que eles possam analisar, de modo crítico, a medida de centralidade mais conveniente para resumir e caracterizar um conjunto de dados.

Não podemos deixar de explorar diversos problemas cotidianos que envolvem o cálculo da média aritmética simples e ponderada.

É importante reconhecer a necessidade de medidas de dispersão e que elas sejam usadas para comparar dois conjuntos de valores quanto à homogeneidade. Também é importante que os estudantes saibam calcular as medidas de centralidade e de dispersão quando os dados são apresentados em intervalos. O professor deve deixar que os estudantes sugiram meios para fazer esse cálculo antes de apresentar o procedimento usando o ponto médio do intervalo.

Sugerimos também que as atividades em Estatística ocorram, de modo geral, com o uso da calculadora, pois invariavelmente aparecerão cálculos complexos (especialmente no cálculo da variância, desvio padrão, média com decimais etc.) e, obviamente, o objetivo não é avaliar destreza nos cálculos, mas sim a compreensão do cálculo e das relações envolvidas. Alertamos para o fato de que, sem a calculadora, o estudante pode desviar o foco real do problema estatístico.

## Matemática Financeira

O capítulo 6 é de grande relevância para a formação da cidadania dos estudantes, pois oferece a oportunidade de trabalhar assuntos ligados à Educação Financeira: a importância de poupar e consumir conscientemente; a importância de pesquisar e comparar preços e condições na hora da compra; os processos que envolvem aumentos e descontos e a variação percentual; a necessidade de estar atento a juros abusivos, cobrados, muitas vezes, em operações com cartão de crédito; o uso do limite do cheque especial etc.

Uma estratégia motivadora para o professor iniciar as discussões é levar para a sala de aula encartes de supermercados e comparar preços de um mesmo produto. Por exemplo, suponhamos que, no supermercado **X**, o preço de um produto seja R$ 32,00 e, no supermercado **Y**, o mesmo produto custe R$ 40,00. A diferença, em valores absolutos, é de R$ 8,00. Mas, em valores relativos, a que porcentagem corresponde essa diferença?

A diferença corresponde a R$ 8,00 e, em comparação com o valor desse produto no supermercado **X**, representa:

$$\frac{\text{R\$ } 8{,}00}{\text{R\$ } 32{,}00} = 0{,}25 = 25\%$$

É essencial mostrar aos estudantes que, embora seja uma diferença de R$ 8,00, percentualmente ela é de 25% (uma diferença muito significativa). É uma oportunidade de alertá-los sobre o consumo sem planejamento, que pode trazer consequências indesejáveis, como o endividamento (uma realidade de muitos brasileiros).

Muitas vezes, uma diferença de centavos pode representar um valor percentual significativo: imagine o mesmo produto vendido por R$ 1,20 no supermercado **X** e R$ 1,80 no supermercado **Y**. Ao comprar no supermercado **Y**, pagamos 50% a mais do que pagaríamos no supermercado **X**.

Não se trata de despertar nos estudantes sentimentos como avareza e mesquinharia, mas sim, de construir ferramentas que lhes permitam fazer escolhas conscientes e críticas nas questões relacionadas ao dinheiro.

Os estudantes precisam construir conhecimentos de Matemática, a partir de situações comuns no dia a dia, como a apresentada anteriormente, para valorizar o dinheiro, consumindo de maneira consciente, poupando e planejando seu futuro financeiro.

No estudo da Matemática comercial, destacamos a importância de resolver problemas comuns no comércio, como: cálculo do preço de um produto após um aumento (ou desconto), cálculo de porcentagens e variações percentuais, aumentos (ou descontos) sucessivos etc.

É importante que sejam incluídas, nesse estudo, atividades que valorizem o cálculo mental, o cálculo aproximado e o uso da calculadora comum.

No estudo da Matemática Financeira destacamos os seguintes tópicos: a compreensão do modo como são cobrados juros e multa em uma conta de consumo; o entendimento do que é a caderneta de poupança (ou algum outro investimento) e como seu saldo é atualizado mensalmente (regime de capitalização acumulada); a importância de identificar os altos juros geralmente embutidos em compras parceladas; a escolha entre pagamento à vista ou pagamento a prazo em situações diversas; o entendimento do cálculo de juros em financiamentos do tipo “entrada + uma parcela” e financiamentos de várias parcelas (comuns no comércio e na aquisição de bens de consumo), valendo-se do conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos; a tomada de decisões em simulações de investimento, levando-se em conta rentabilidade e impostos etc.

Se forem levados para a sala de aula anúncios sobre as condições da compra financiada de um automóvel, por exemplo, os estudantes poderão, apoiados no conceito de valor atual de uma sequência de pagamentos, calcular o preço à vista desse bem e perceber, em geral, a diferença no desembolso total.

Os textos da seção *Aplicações* – capítulo 6 (Compras à vista ou a prazo II: Financiamentos) e as atividades da seção *Troque ideias* – capítulo 6 (Compras à vista ou a prazo I) dão o suporte necessário para essa atividade, favorecendo a compreensão do regime de juros compostos.

Por fim, é imprescindível que o estudo de Matemática Financeira seja relacionado ao estudo das funções afim, exponencial (e logarítmica) na apresentação dos conceitos ligados aos juros simples e compostos, respectivamente. O uso de logaritmos e suas propriedades deve ser explorado em problemas que envolvam a fórmula dos juros compostos.

## Números e Álgebra

Os capítulos referentes a números complexos, polinômios e equações algébricas apresentam os assuntos com poucas relações com o cotidiano e com aplicações práticas. Assim, achamos importante destacar, nesses capítulos, os assuntos de maior relevância. O conjunto dos números complexos deve ser apresentado, no contexto da História da Matemática, pela necessidade de um novo campo para a resolução de equações que não apresentam solução no universo dos números reais, por exemplo, $x^2 + 4 = 0$. Os estudantes deverão ser capazes de efetuar as operações básicas com números complexos na forma algébrica, evitando exageros. É importante que a interpretação geométrica dos números complexos seja apresentada e os conceitos de módulo e de argumento sejam vistos pelo viés geométrico. Nesse ponto, há a possibilidade de relacionar os números complexos à Geometria Analítica.

Por exemplo, se $z = x + i \cdot y$ (com **x** e **y** reais e **i** a unidade imaginária) é um número complexo cujo módulo é 2, então **z** dista duas unidades da origem, e o conjunto de pontos que satisfaz essa condição são os pontos da circunferência de centro na origem e raio 2, cuja equação é $x^2 + y^2 = 4$. Os números complexos deverão ser usados, na sequência, na resolução das equações polinomiais.

Para a introdução dos polinômios, sugerimos a atividade em grupo na seção *Troque ideias* – capítulo 8 (Problemas com polinômios).

Além de contextualizar o uso dos polinômios, temos a oportunidade de rever assuntos de Geometria Plana e Métrica Espacial.

No trabalho com polinômios é importante que se faça, desde o início, a observação de que, muitas vezes, ao falarmos de um polinômio, estaremos nos referindo à função polinomial e vice-versa. Desse modo, conceitos como raiz de um polinômio podem ser facilmente relacionados com o que já foi estudado sobre as raízes das funções polinomiais do 1º e do 2º graus.

A ênfase no capítulo 8 deve ser a divisão de polinômios, uma vez que ela será usada no capítulo seguinte. A divisão de polinômios mantém uma interessante analogia com a divisão entre números inteiros, e este pode ser o ponto de partida para o início das discussões.

Embora tenhamos apresentado no livro mais de um processo para dividir polinômios, é importante lembrar que o método da chave é o processo mais geral de divisão e não há ressalvas em apresentar unicamente esse processo.

Por fim, no capítulo sobre equações polinomiais, é importante lembrar aos estudante que no Ensino Médio não se apresentam fórmulas resolutivas para as equações do 3º e do 4º graus, bem como explicar que a partir do grau 5 não existe fórmula resolutiva geral (sugerimos a leitura do texto sobre a resolução de equações no boxe *Um pouco de História* – capítulo 9) e que, em vários exercícios, conseguiremos determinar o conjunto solução a partir de alguma informação sobre o polinômio, lembrando sempre que o conjunto universo em que estamos trabalhando é $\mathbb{C}$. Não podemos deixar de destacar o fato de que, se um polinômio f(x) se escreve como o produto de outros dois, isto é, $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, então f(x) é divisível por g(x) (ou h(x)) e o quociente dessa divisão é h(x) (ou g(x)). Esse fato será muito empregado para encontrar todas as raízes de um polinômio quando uma ou mais raízes forem conhecidas.

No estudo das equações algébricas apresentamos também as relações entre coeficientes e raízes, a discussão do número de raízes reais em uma equação com coeficientes reais e a pesquisa de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros.

É natural que os estudantes questionem sobre a construção dos gráficos de funções polinomiais de grau maior ou igual a 3. A construção desses gráficos requer conceitos de cálculo, como derivada e limite de uma função, que optamos por não incluir nesta obra. No entanto, é pertinente que, em alguns momentos, seja feita a análise do gráfico de uma função polinomial, especialmente no que diz respeito ao número de raízes reais do polinômio (número de vezes em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas).

Para isso, na seção *Troque ideias* – capítulo 9 (Interpretando e construindo gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 com um *software* livre) é proposta uma atividade de integração aluno-aluno e aluno-professor, na qual os estudantes aprendem a construir gráficos de funções polinomiais com auxílio de um *software* livre (Graphmática) de Matemática e, em seguida, a partir da análise do gráfico, respondem perguntas sobre o polinômio em questão.

Na *atividade 6: Construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais com auxílio de um* software *livre de matemática*, apresentado nas *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas, há outras propostas de exercícios, caso os professores queiram aprofundar o assunto.

## Orientações específicas para a seção *Troque ideias*

### Resolvendo um problema com o circuncentro de um triângulo (Capítulo 1)

Nessa atividade, o estudante é levado a determinar o circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes) de um triângulo, usando tanto a Geometria Analítica quanto o Desenho Geométrico, a partir de uma situação-problema.

A determinação do ponto **P** equidistante de três pontos dados $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$, com uso da Geometria Analítica, pode ser feita, simplesmente, impondo-se as igualdade das distâncias: $PF_1 = PF_2 = PF_3$.

Na segunda parte da atividade, entra em jogo o conceito de mediatriz de um segmento, o que deve levar o estudante a buscar outra solução para o problema: determinar, com régua e compasso, o circuncentro do triângulo $F_1F_2F_3$. É também uma ótima oportunidade de revisar algumas construções geométricas, geralmente estudadas no Ensino Fundamental.

A construção das mediatrizes do triângulo $F_1F_2F_3$, feita em um papel quadriculado, leva ao circuncentro do triângulo, que é o ponto procurado. Caso o professor julgue importante, ele pode pedir às equipes que, por meio da Geometria Analítica, determinem o circuncentro do triângulo usando a interseção de duas de suas mediatrizes; é um bom exercício para checar a resposta encontrada. Temos:

- Para o lado $\overline{F_1F_2}$: $m = \dfrac{-1 - 15}{-8 - 0} = 2$ e ponto médio $(-4, 7)$.
  Assim, a equação de mediatriz de $\overline{F_1F_2}$ é:
  $y - 7 = -\dfrac{1}{2} \cdot (x + 4) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 5$ (1)
- Para o lado $\overline{F_1F_3}$:
  $m = \dfrac{11 - 15}{8 - 0} = -\dfrac{1}{2}$ e ponto médio (4, 13).
  Assim, a equação da mediatriz de $\overline{F_1F_3}$ é:
  $y - 13 = 2 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 2x + 5$ (2)
  De (1) e (2), obtemos:
  $-\dfrac{1}{2}x + 5 = 2x + 5 \Rightarrow x = 0$ e $y = 5$; o circuncentro é (0, 5).

A atividade proposta nesta seção contribui para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática na medida em que o estudante deve: reconhecer a natureza de um problema e decidir pela utilização das formas algébrica, numérica ou geométrica para encontrar sua solução; identificar as informações relevantes; elaborar estratégias a fim de encontrar as possíveis soluções; e utilizar diferentes instrumentos para efetuar medidas ou cálculos, tais como réguas, esquadros e compasso.

**Solução:**

a) Seja P(x, y) o ponto procurado $d_{PF_1} = d_{PF_2} = d_{PF_3}$

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + (y - 15)^2}}_{1} = \underbrace{\sqrt{(x + 8)^2 + (y + 1)^2}}_{2} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{(x - 8)^2 + (y - 11)^2}}_{3}$$

Considerando a igualdade entre 1 e 2:

$\sqrt{x^2 + (y - 15)^2} = \sqrt{(x + 8)^2 + (y + 1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (y - 15)^2 = (x + 8)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y = 10$

Considerando a igualdade entre 2 e 3:

$\sqrt{(x + 8)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 8)^2 + (y - 11)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 8)^2 + (y + 1)^2 = (x - 8)^2 + (y - 11)^2 \Rightarrow$

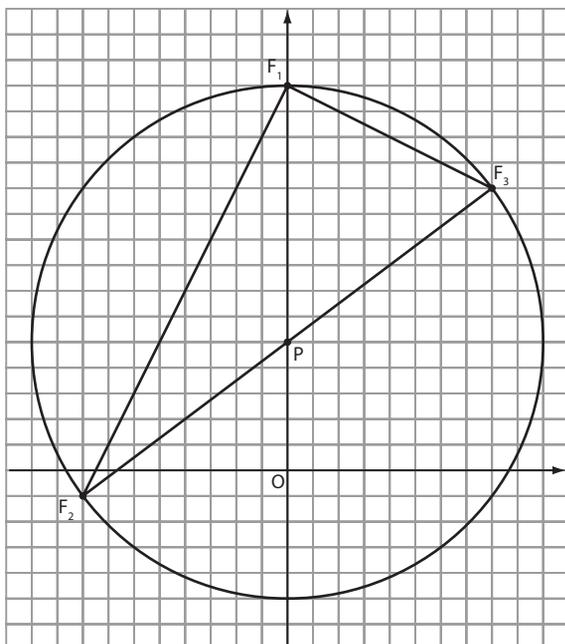
$\Rightarrow 4x + 3y = 15$

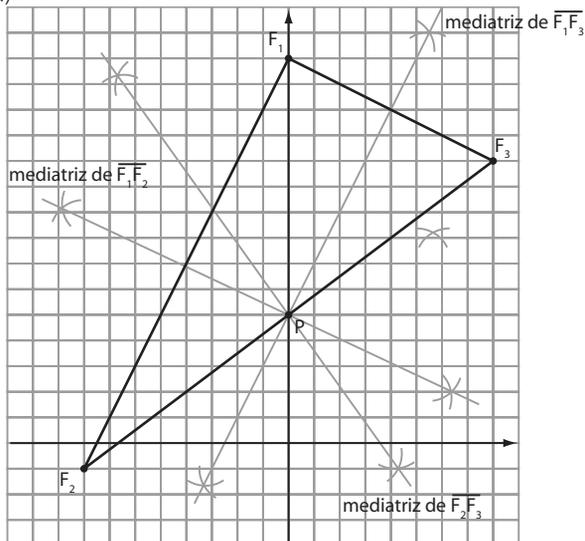
Segue o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$, que, resolvido, fornece $x = 0$ e $y = 5$.

Assim, o ponto procurado é P(0, 5).

b) Tomando $\mathbf{F_1}$, por exemplo, é fácil ver que $d_{PF_1} = 10$.

Assim, a distância real é 10 km.

c)

A circunferência também passa por $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$, isto é, **P** é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $F_1F_2F_3$.

d)

É possível observar que o centro da circunferência na representação feita para o item *c* é o circuncentro do triângulo representado neste item.

## Compras à vista ou a prazo (I) (Capítulo 6)

Essa é a primeira de algumas atividades e leituras que envolvem tomada de decisões em situações de compra à vista ou a prazo.

A atividade desenvolvida nesta seção contribui para o desenvolvimento da competência de representação e comunicação em Matemática. Ela demanda que o estudante seja capaz de compreender as informações da situação apresentada, analisar e julgar cálculos sobre dados econômicos, de vendas a prazo, e emitir opiniões de forma analítica e crítica, posicionando-se e argumentando diante da situação proposta.

Nessa atividade, é apresentada uma situação em que uma pessoa pode comprar um pacote de viagem à vista, ou pode pagar a prazo, aplicando o recurso que seria usado no pagamento à vista na caderneta de poupança, recebendo juros e fazendo retiradas mensais para pagar as prestações. Os estudantes, divididos em grupos, farão as simulações necessárias (com uma calculadora comum) para decidir qual é a melhor opção. Isso envolve cálculos simples que os estudantes deverão fazer sem maiores dificuldades. Na 2ª parte da atividade, na hipótese de que o preço à vista é igual ao preço total parcelado, os estudantes poderão verificar, por meio de cálculos, a vantagem de, nessas condições, manter o recurso aplicado e pagar a prazo.

É importante que as discussões sobre compras à vista ou a prazo não se encerrem nessa atividade. As questões envolvendo financiamentos (entrada mais 1 parcela, ou entrada mais várias parcelas, ou, ainda, várias parcelas sem entrada no ato da compra) complementam o trabalho. O texto da seção *Aplicações* – capítulo 6 (Compras à vista ou a prazo II – Financiamentos), que introduz o conceito de valor atual (ou presente) de uma sequência de pagamentos pode ser o ponto de partida para a compreensão dos financiamentos em várias parcelas. Na parte específica destas Orientações Didáticas há outras propostas de atividades em grupo que aprofundam o trabalho.

O objetivo de todas essas atividades é que os estudantes estejam preparados e "munidos de argumentos" para analisar e julgar cálculos sobre juros, financiamentos, investimentos, dívidas de cartão de crédito, enfim, situações presentes no dia a dia.

Vale a pena lembrar que, em muitas famílias brasileiras, o assunto dinheiro é, ainda, um tabu, cabendo à escola a tarefa de trazer temas ligados à Educação Financeira para os estudantes.

**Solução:**

a)

| Tempo | Saldo inicial da poupança | + | Juros recebidos | − | Retirada para pagar a prestação | Saldo final da poupança |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ato da compra | 2 500,00 | + | 0 | − | 0 | 2 500,00 |
| 1 mês depois | 2 500,00 | + | $0{,}006 \cdot 2\,500{,}00 = 15{,}00$ | − | 520,00 | 1 995,00 |
| 2 meses depois | 1 995,00 | + | $0{,}006 \cdot 1\,995{,}00 = 11{,}97$ | − | 520,00 | 1 486,97 |
| 3 meses depois | 1 486,97 | + | $0{,}006 \cdot 1\,486{,}97 \simeq 8{,}92$ | − | 520,00 | 975,89 |
| 4 meses depois | 975,89 | + | $0{,}006 \cdot 975{,}89 \simeq 5{,}86$ | − | 520,00 | 461,75 |
| 5 meses depois | 461,75 | + | $0{,}006 \cdot 461{,}75 \simeq 2{,}77$ | − | 520,00 | −55,48 |

b) Se optar pelo pagamento parcelado, Márcia terá que desembolsar R$ 55,48 para pagar a última prestação. Desse modo, vale a pena Márcia pagar à vista, usufruindo o desconto oferecido.

c)

| Tempo | Saldo inicial da poupança | + | Juros recebidos | − | Retirada para pagar a prestação | Saldo final da poupança |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ato da compra | 2 500,00 | + | 0 | − | 0 | 2 500,00 |
| 1 mês depois | 2 500,00 | + | $0{,}006 \cdot 2\,500{,}00 = 15{,}00$ | − | 500,00 | 2 015,00 |
| 2 meses depois | 2 015,00 | + | $0{,}006 \cdot 2\,015{,}00 = 12{,}09$ | − | 500,00 | 1 527,09 |
| 3 meses depois | 1 527,09 | + | $0{,}006 \cdot 1\,527{,}09 \simeq 9{,}16$ | − | 500,00 | 1 036,25 |
| 4 meses depois | 1 036,25 | + | $0{,}006 \cdot 1\,036{,}25 \simeq 6{,}22$ | − | 500,00 | 542,47 |
| 5 meses depois | 542,47 | + | $0{,}006 \cdot 542{,}47 \simeq 3{,}25$ | − | 500,00 | 45,72 |

Nessas condições, Márcia poderá usufruir de 45,72 reais a mais, caso opte por aplicar o valor na poupança.

## Problemas com polinômios (Capítulo 8)

Por se tratar de um assunto mais teórico e relevante no contexto da própria Matemática, sugerimos que, ao menos na apresentação dos polinômios, sejam usadas situações concretas, vinculadas a contextos cotidianos e que podem "conversar" com outros eixos do programa de Matemática. Uma das possibilidades de introduzir polinômios é recorrer às funções. Por exemplo, se o salário de um vendedor é composto por uma parte fixa de R$ 850,00 e um adicional de 2% sobre o total (**x**) de vendas no mês, seu salário mensal pode ser expresso pela lei $850{,}00 + 0{,}02x$, que é um exemplo de polinômio (as funções afim e quadrática são exemplos de polinômios familiares aos estudantes). Outra possibilidade é recorrer aos polinômios para descrever áreas de figuras planas ou espaciais, como o volume de alguns poliedros, como é proposto nessa atividade integradora.

Além de dar um significado maior ao estudo dos polinômios, é uma oportunidade de integração com o eixo Geometria, revisando conceitos estudados nos anos anteriores. De modo geral, a atividade apresenta um grau de dificuldade bastante compatível com o "repertório" de um estudante do 3º ano do Ensino Médio, sendo que, provavelmente, a atividade decorra sem maiores interferências e mediações do professor.

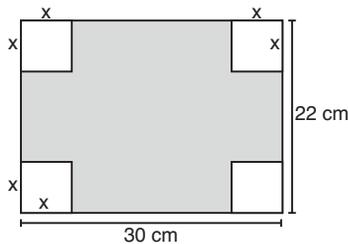
A atividade desenvolvida nesta seção possibilita ao estudante interpretar, utilizar e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações, além de permitir que ele estabeleça conexões entre os diferentes conteúdos da Matemática, sistematizando as diferentes linguagens e contribuindo para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática.

**Solução:**

a) **A**: $2x^2$

**B**: $\dfrac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2$

**C**: $\underbrace{3x^2}_{\text{3 quadradinhos inteiros}} + \underbrace{2x^2}_{\text{4 quadradinhos pela metade}} + \underbrace{\dfrac{2x \cdot x}{2}}_{\text{área de um triângulo}} = 6x^2$

b) i)

A área pedida, em cm², é: $30 \cdot 22 - 4 \cdot x^2 =$
$= 660 - 4x^2$

ii) O paralelepípedo retângulo tem dimensões $30 - 2x$, $22 - 2x$ e **x**, e seu volume, em cm³, é:

$x \cdot (22 - 2x) \cdot (30 - 2x) = 4x^3 + 104x^2 + 660x$

c) $V = x \cdot 2x \cdot (x + 10) - 4 \cdot \underbrace{1}_{\text{volume do cubo unitário}}$

$V = 2x^3 + 20x^2 - 4$

d) i) Devemos calcular a diferença entre o volume de um paralelepípedo de dimensões $x + 3$, $x + 1$ e $2x$ e o de um paralelepípedo de dimensões **x**, $x + 1$ e $(x + 3) - (x + 1) = 2$:

$V = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x + 3) - x \cdot (x + 1) \cdot 2$

$V = 2x^3 + 6x^2 + 4x$

ii) Base inferior:

$(x + 3) \cdot (x + 1) = x^2 + 4x + 3$ (1)

Base superior:

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (2)

"Base intermediária":

$2 \cdot (x + 1) = 2x + 2$ (3)

Dois retângulos congruentes, cada um com lados $x + 1$ e **x**, totalizando:

$2x^2 + 2x$ (4)

Dois hexágonos congruentes, cada um com área $[(x + 3) \cdot x + (x + 1) \cdot x]$, totalizando:

$4x^2 + 8x$ (5)

Um retângulo de lados $x + 1$ e $2x$:

$2x^2 + 2x$ (6)

A área total é dada pela adição de (1), (2), (3), (4), (5) e (6):

$10x^2 + 20x + 6$

## Interpretando e construindo gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 com *software* livre (Capítulo 9)

Para a realização dessa atividade, será necessário usar os computadores da escola com o programa Graphmática já instalado. Esse *software* de Matemática pode ser baixado, gratuitamente, na internet, através do *site* <www.graphmatica.com> (acesso em 19 abr. 2016). Se necessário, o professor pode dividir a turma de acordo com a quantidade de computadores disponíveis.

Com essa atividade, pretendemos que o estudo das equações polinomiais não seja visto, unicamente, pelo viés algébrico, mas sim, que ele seja vinculado à análise e interpretação dos gráficos das funções que os representam. A proposta é que os grupos analisem o gráfico das funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, para responder às questões sobre o polinômio. Se possível, é interessante permitir que os estudantes utilizem o Graphmática para fazer, eles mesmos, a construção dos gráficos. É importante lembrar que a construção do gráfico de funções polinomiais de grau maior que 2 requer que o estudante tenha conhecimento dos conceitos de limite e de derivada de uma função – assuntos normalmente não estudados no Ensino Médio. Sem o uso desse recurso tecnológico, os estudantes não poderiam visualizar os gráficos dessas funções, o que seria um limitador no estudo das equações algébricas.

A análise dos gráficos permitirá aos estudantes determinar: o número de raízes reais (e complexas não reais) de uma equação com coeficientes reais; as interseções do gráfico com os eixos coordenados e sua interpretação; possíveis candidatos a raízes racionais (nas equações com coeficientes inteiros); intervalos em que a função é crescente ou decrescente etc.

Assim, a atividade sintetiza e unifica todos os conceitos estudados nesse capítulo e também no capítulo sobre polinômios. Ela também contribui para o desenvolvimento da competência de representação e comunicação em Matemática, pois requer que o estudante transforme a linguagem gráfica na linguagem algébrica.

**Solução:**

a) i) 3 raízes reais.

ii) Eixo **x**: $(-3, 0)$, $(2, 0)$ e $(5, 0)$; eixo **y**: $(0, 30)$.

iii) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 30 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - 11x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x^2 - 4x - 11) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 - 4x - 11 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{15} \simeq -1{,}87$ ou $x = 2 + \sqrt{15} \simeq 5{,}87$

Logo, $f(x) = 30$ para $x = 0$ ou $x \simeq -1{,}87$ ou $x \simeq 5{,}87$. Confira esses três valores no gráfico.

b) i) 1

ii)

| −4 | 1 | 8 | 21 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 5 | 0 |

$x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$

As raízes são: $-4$, $-2 + i$ e $-2 - i$

iii) $x = 0 \Rightarrow y = 20$; o ponto é $(0, 20)$.

c) As três raízes da função são $-1$, 2 e 3. Usando a forma fatorada, escrevemos:

$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ (*)

Como o ponto $(0, -12)$ pertence ao gráfico, temos:

$-12 = a \cdot (0 + 1) \cdot (0 - 2) \cdot (0 - 3) \Rightarrow a = -2$

Em (*), obtemos a lei:

$f(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 12$

d) O polinômio $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ apresenta como raízes reais $-2$ e 3 e é divisível por $(x + 2) \cdot (x - 3) = x^2 - x - 6$:

$$\begin{array}{rl|l} \cancel{x^4} - \cancel{x^3} - 5x^2 - x - 6 & & x^2 - x - 6 \\ \cancel{-x^4} + \cancel{x^3} + 6x^2 \phantom{- x - 6} & & x^2 + 1 \\ \hline \cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{6} & & \\ -\cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{6} & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

As demais raízes decorrem de $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$.

e) O gráfico mostra que **f** possui 2 raízes reais (uma é 3 e a outra pertence ao intervalo ]0, 1[).

Vamos pesquisar possíveis raízes racionais de **f**:

Candidatos: $\pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - 5 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 0$$

Dividindo f(x) por $(x - 3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$, obtemos como quociente $2x^2 + 2x + 2$.

As demais raízes são:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Sugestões de atividades em grupo

A seguir, são propostas sugestões de atividades que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor, no intuito de dar continuidade às atividades propostas na seção *Troque ideias*, no livro-texto.

As atividades em grupo possibilitam aos estudantes:

- ouvir, discutir e refletir sobre a opinião dos colegas;
- respeitar as diferenças individuais quanto ao tempo de compreensão e assimilação dos conteúdos;
- socializar diferentes pontos de vista e resoluções diversas para um mesmo problema e estabelecer consensos;
- promover situações de ajuda e de ensino-aprendizagem entre os colegas;
- dividir tarefas e responsabilidades;
- promover maior integração social.

Veja as sugestões a seguir para atividades em grupo.

### Atividade 1: O cálculo de área de figuras planas

#### Objetivos

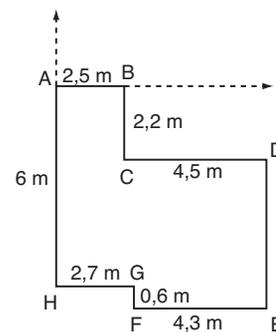
- Reconhecer a importância do sistema de coordenadas cartesianas para localizar pontos em um plano.
- Revisar o cálculo de áreas de figuras planas.

#### Material

- Material escolar básico (papel, lápis, borracha).

**Número de aulas:** 1 a 2.

#### Desenvolvimento

O professor deve dividir a turma em duplas e fornecer, para cada dupla, a reprodução da figura a seguir, que representa a planta baixa de uma sala comercial.

Em seguida, deve pedir a cada dupla que calcule a área da superfície limitada pela sala comercial e disponibilizar um tempo adequado para que apresente suas resoluções.

Há várias maneiras de se calcular a área desse octógono. Segue uma sugestão: prolongando-se $\overleftrightarrow{DE}$ obtemos o ponto **I** pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$, tal que:

$A_{BCDI} = (2,2 \text{ m}) \cdot (4,5 \text{ m}) = 9,9 \text{ m}^2$

Prolongando-se $\overleftrightarrow{FE}$ obtemos o ponto **J** que pertence à reta $\overleftrightarrow{AH}$, tal que:

$A_{HGFJ} = (2,7 \text{ m}) \cdot (0,6 \text{ m}) = 1,62 \text{ m}^2$

A área do octógono é dada por:

$A_{AIEJ} - (A_{BCDI} + A_{HGFJ})$, isto é:

$[(7 \text{ m}) \cdot (6,6 \text{ m})] - 9,9 \text{ m}^2 - 1,62 \text{ m}^2 = 34,68 \text{ m}^2$

Depois, o professor deve ler o seguinte problema para a turma:

> Imagine que você precisa descrever, oralmente, a forma e as dimensões dessa sala para um arquiteto que não dispõe, no momento, da planta dela.
>
> Poderíamos começar dizendo que a sala pode ser representada por um polígono de oito lados (octógono) ABCDEFGH. Para desenhar esse octógono, uma opção é inserir um sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares), tendo como unidade de medida o metro e origem no vértice **A**. Desse modo, os vértices consecutivos desse polígono são:
>
> B(2,5; 0), C(?; ?), D(?; ?), ...

Cada dupla deverá determinar as coordenadas dos outros seis vértices do octógono. Depois, o professor deve fazer a correção na lousa (quadro de giz).

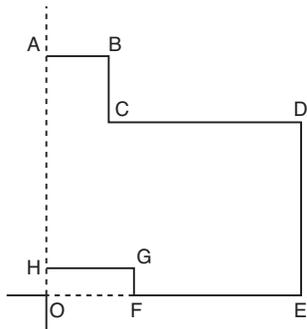
**Solução:**

C(2,5; −2,2), D(7; −2,2), E(7; −6,6), F(2,7; −6,6), G(2,7; −6) e H(0; −6).

O professor deve, agora, propor o seguinte problema:

> É possível descrever cada um dos vértices desse octógono usando apenas coordenadas não negativas? Apresente uma solução, obtendo os vértices do octógono.

**Solução:**

O problema apresenta infinitas soluções.

Uma solução simples é adotar como origem do novo sistema cartesiano o ponto **O**, dado pela interseção das retas $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$. (Veja a figura acima.) Nesse caso, os vértices passariam a ser:

H(0; 0,6), E(7; 0), B(2,5; 6,6), G(2,7; 0,6), D(7; 4,4), A(0; 6,6), F(2,7; 0) e C(2,5; 4,4).

(Atividade elaborada com base em: *Aplicações da matemática escolar* – Trabalho conjunto da *Mathematical Association of America. National Council of Teachers of Mathematics*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.)

## Atividade 2: Programação linear

### Objetivo

- Aprofundar o estudo das inequações do 1º grau com duas incógnitas vinculado a um contexto cotidiano e relacioná-lo ao texto introdutório de programação linear da seção *Aplicações* – capítulo 2(Uma introdução à programação linear) .

### Material

- Material escolar básico (lápis, borracha, papel sulfite e régua).

**Número de aulas:** 1 a 2.

### Desenvolvimento

O professor deve dividir a turma em duplas e distribuir a cada uma, além de folhas de sulfite, o texto seguinte:

> (Obmep) Um galinheiro com área igual a 240 m² deve abrigar galinhas e pintinhos [havendo a possibilidade de se ter só galinhas ou só pintinhos], sendo desejável que haja espaço livre de 4 m² para cada galinha e 2 m² para cada pintinho. Além disso, cada pintinho come 40 g de ração por dia e cada galinha come 160 g por dia, sendo permitido um gasto diário máximo de 8 kg de ração.
>
> a) Represente algebricamente as condições do problema.
>
> b) Represente graficamente as condições acima no plano cartesiano xOy.
>
> c) Esse galinheiro comporta 20 galinhas e 80 pintinhos? E 30 galinhas e 100 pintinhos?
>
> d) Qual o número máximo de galinhas que podem ser colocadas no galinheiro, respeitando os espaços desejáveis e o gasto máximo de ração? E de pintinhos?

**Solução:**

Sejam **x** e **y**, respectivamente, o número de galinhas e pintinhos no galinheiro.

Observemos que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ com **x** e **y** naturais (1).

a) De acordo com a condição sobre o espaço desejável, podemos escrever:

$4x + 2y = 240 \Rightarrow 2x + y = 120$ (2)

De acordo com a condição sobre a ração, podemos escrever:

$160x + 40y \leqslant \underbrace{8\,000}_{8\text{ kg}} \Rightarrow 4x + y \leqslant 200$ (3)

b) Observe que:

(1) representa o primeiro quadrante do plano, incluindo-se os semieixos positivos horizontal e vertical;

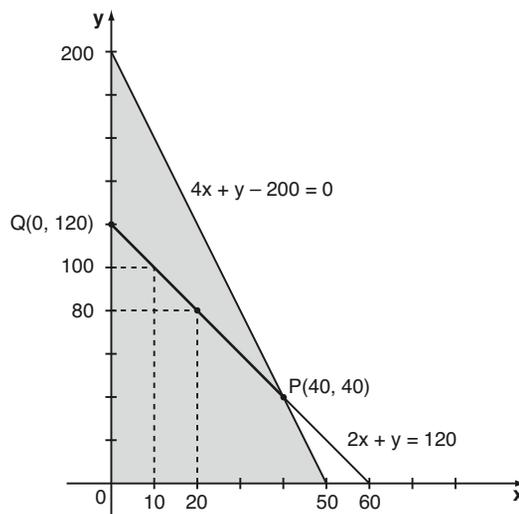
(2) representa a equação de uma reta. Para construí-la, podemos montar a seguinte tabela:

| x | y |
|---|---|
| 10 | 100 |
| 20 | 80 |

(3) representa uma inequação do 1º grau com duas incógnitas. Em $4x + y - 200 \leqslant 0$ testamos a origem a fim de conhecer qual dos semiplanos determinados pela reta $4x + y - 200 = 0$ devemos escolher:

$4 \cdot 0 + 0 - 200 \leqslant 0 \Leftrightarrow -200 \leqslant 0$ (Verdadeiro); o semiplano procurado contém a origem. Para construir a reta de equação $4x + y - 200 = 0$, podemos usar a tabela:

| x | y |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 50 | 0 |

A região sombreada no gráfico seguinte corresponde aos pontos do primeiro quadrante, tais que $4x + y - 200 \leqslant 0$.

O conjunto de pontos comuns a (1), (2) e (3) é o segmento de reta $\overline{PQ}$, em que Q(0, 120) é o ponto de interseção da

reta $2x + y = 120$ com o eixo **y** e **P** é o ponto de interseção das retas $2x + y = 120$ e $4x + y - 200 = 0$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + y - 120 = 0 \\ 4x + y = 200 \end{cases}$, obtemos $x = 40$ e $y = 40$. Assim, P(40, 40).

c) $\begin{cases} 20 \text{ galinhas} \\ 80 \text{ pintinhos} \end{cases} \Rightarrow x = 20 \text{ e } y = 80;$

Testando (2) e (3):

(2): $2 \cdot 20 + 80 = 120$ (Verdadeiro)

(3): $4 \cdot 20 + 80 \leqslant 200$ (Verdadeiro)

Logo, é possível ter 20 galinhas e 80 pintinhos.

$\begin{cases} 30 \text{ galinhas} \\ 100 \text{ pintinhos} \end{cases} \Rightarrow x = 30 \text{ e } y = 100;$

Testando:

(2): $2 \cdot 30 + 100 = 160 \neq 120$

Logo, não é possível ter 30 galinhas e 100 pintinhos.

d) Do gráfico, considerando o segmento $\overline{PQ}$, temos que:

$x_{máximo} = 40$

Em (2): $2 \cdot 40 + y = 120 \Rightarrow y = 40$

Teríamos 40 galinhas e 40 pintinhos.

Do gráfico, considerando o segmento $\overline{PQ}$, temos:

$y_{máximo} = 120$

Em (2): $x = \dfrac{120 - y}{2} = \dfrac{120 - 120}{2} = 0$

Teríamos 120 pintinhos e nenhuma galinha.

Assim, o número máximo possível para as galinhas é 40 e, para os pintinhos, o número máximo é 120.

## Atividade 3: Geometria Analítica, semelhança de triângulos e matrizes

### Objetivos

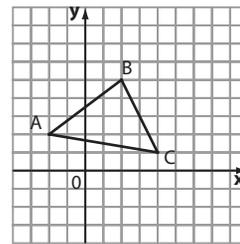
- Revisar transformações geométricas bidimensionais usando matrizes.
- Revisar semelhança de triângulos, bem como a razão entre as medidas de seus lados homólogos e a razão entre suas áreas.
- Integrar assuntos diversos do programa em uma mesma atividade.

### Material

- Material escolar básico (papel, lápis, borracha) e folhas de papel quadriculado.

  **Número de aulas:** 2 a 3.

### Desenvolvimento

O professor deve dividir a turma em grupos de 3 ou 4 estudantes. Cada grupo deve receber o quadriculado seguinte, contendo o triângulo ABC.

Em seguida, o professor deve propor o seguinte problema:

1) Considere a transformação geométrica em que cada ponto (x, y) do triângulo é transformado no ponto (x′, y′) por meio da equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas dos vértices **A**′, **B**′ e **C**′ do triângulo obtido por essa transformação. Represente, em um mesmo quadriculado, os triângulos ABC e A′B′C′.

O professor deve ficar atento caso exista necessidade de fazer uma rápida revisão sobre multiplicação de matrizes, bem como mencionar as três transformações geométricas estudadas no volume 2 desta coleção (translação, rotação e escala).

**Solução:**

A(−2, 2) é transformado em $A'(x'_A, y'_A)$:

$$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Logo, A′(−6, 6).

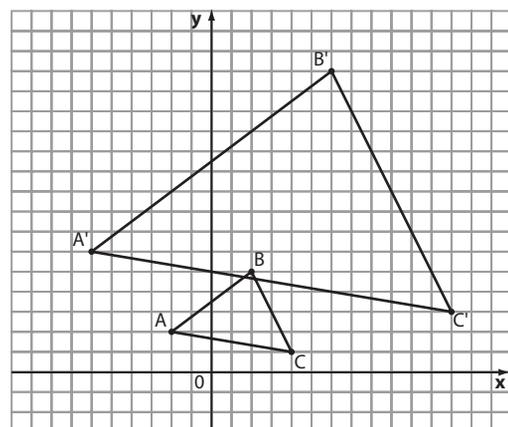
B(2, 5) é transformado em $B'(x'_B, y'_B)$:

$$\begin{pmatrix} x'_B \\ y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Logo, B′(6, 15).

C(4, 1) é transformado em $C'(x'_C, y'_C)$:

$$\begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Logo, C′(12, 3).

Após representar os dois triângulos em um mesmo quadriculado, os estudantes deverão reconhecer que a transformação geométrica em questão é a **escala**. Na questão 2, os estudantes devem identificar que a transformação "gerou" triângulos semelhantes.

2) Determine as medidas dos lados do triângulo ABC e do triângulo A′B′C′. O que se pode concluir em relação aos dois triângulos?

**Solução:**

$\triangle ABC$: A(−2, 2);B(2, 5) e C(4, 1)

$AB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

$BC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$

$\triangle A'B'C'$: A′(−6, 6); B′(6, 15) e C′(12, 3)

$A'B' = \sqrt{(-12)^2 + 9^2} = 15$

$B'C' = \sqrt{(-6)^2 + 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$A'C' = \sqrt{(-18)^2 + 3^2} = \sqrt{333} = 3\sqrt{37}$

Como $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{3}$, os triângulos ABC e A′B′C′ são semelhantes, pois têm lados proporcionais (caso LLL de semelhança).

3) Determine a medida da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$ no $\triangle ABC$ e a medida da mediana relativa ao lado $\overline{A'C'}$ no $\triangle A'B'C'$ e estabeleça a razão entre elas.

**Solução:**

$\triangle ABC$:

Seja **P** o ponto médio de $\overline{AC}$:

$$P\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = P\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$d_{BP} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(5 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{53}{4}\right)} = \frac{\sqrt{53}}{2}$$

$\triangle A'B'C'$:

Seja **P**′ o ponto médio de $\overline{A'C'}$:

$$P'\left(\frac{-6+12}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = P'\left(3, \frac{9}{2}\right)$$

$$d_{B'P'} = \sqrt{(6-3)^2 + \left(15 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{477}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{53}}{2}$$

A razão pedida é:

$$k = \frac{\frac{\sqrt{53}}{2}}{\frac{3\sqrt{53}}{2}} = \frac{1}{3} \text{ (igual à razão encontrada na questão 2)}$$

É importante lembrar que, se dois triângulos são semelhantes, a razão entre medidas lineares (lados, alturas, mediana etc.) correspondentes é constante.

4) Determine o baricentro **G** do $\triangle ABC$ e, usando a matriz de transformação, determine **G**′, baricentro do $\triangle A'B'C'$. Comprove os valores obtidos para as coordenadas de **G**′ fazendo o cálculo a partir das coordenadas dos vértices do $\triangle A'B'C'$.

**Solução:**

$\triangle ABC$:

$$G\left(\frac{-2+2+4}{3}, \frac{2+5+1}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

G′(x′, y′) é tal que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Comprovando:

$$G'\left(\frac{-6+6+12}{3}, \frac{6+15+3}{3}\right) = G'(4, 8)$$

5) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$?

**Solução:**

Como os triângulos são semelhantes, são congruentes os ângulos $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$; $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}'C'$; e $A\hat{C}B$ e $A'\hat{C}'B'$. Assim, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ são paralelas. Também são paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$, e as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$.

Podemos calcular os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$:

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-2}{4+2} = -\frac{1}{6}$$

$$m_{A'C'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'_C - y'_A}{x'_C - x'_A} = \frac{3-6}{12+6} = -\frac{1}{6}$$

6) Calcule a área dos triângulos ABC e A′B′C′, obtendo a razão entre elas.

**Solução:**

$\triangle ABC$:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-22| \Rightarrow A_{ABC} = 11 \text{ u.a.}$$

$\triangle A'B'C'$:

$$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 6 & 15 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -198 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot |-198| \Rightarrow A_{A'B'C'} = 99 \text{ u.a.}$$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

O objetivo dessa questão é permitir que o estudante relembre que, se dois triângulos são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

## Atividade 4: Tratamento da informação — Estatística

### Objetivos

- Levar o estudante a revisar alguns conceitos estatísticos e construir novos por meio de informações que dizem respeito ao seu dia a dia e que são coletadas no ambiente escolar:
  - Classificação das variáveis.
  - Coleta de dados e construção de tabelas de frequência.
  - Construção de gráficos para apresentação dos resultados.
  - Associação de medidas de centralidade (posição) e dispersão (variabilidade).
- Apresentar os trabalhos produzidos pelos estudantes em uma feira cultural ou em algum outro evento.

### Material

- Papel, lápis, borracha, caneta, calculadora. Para a construção de gráficos, sugerimos o uso de planilhas eletrônicas. Neste caso, será necessário usar os computadores do colégio. Caso o professor prefira, poderá pedir aos

estudantes que façam as representações gráficas com auxílio de régua, compasso e transferidor.

**Número de aulas:** 3 a 4.

## Desenvolvimento

### 1ª etapa

A proposta dessa etapa é trabalhar com variáveis qualitativas e suas representações gráficas. O professor deverá escolher uma ou mais questões que representem variáveis qualitativas ligadas ao dia a dia do estudante (pode-se também pedir sugestões à turma). Citamos aqui algumas possíveis perguntas:

- Qual é o meio de transporte que você utiliza para chegar à escola? Como respostas esperadas, podemos citar: a pé, de ônibus, de trem, de metrô (se houver em sua cidade) ou de carro particular.
- Para que time você torce?
- Qual é a sua disciplina favorita?
- Qual é o seu lazer preferido? Nesse caso, recomenda-se que o professor forneça algumas opções de respostas como: praticar esportes, tocar algum instrumento musical, jogar *videogame*, acessar a internet, reunir-se na casa de amigos etc.
- Qual é a rede social que você mais usa?

O professor deve dividir a turma em grupos de 3 ou 4 estudantes e pedir a eles que respondam à(s) questão(ões) escolhida(s) em um pedaço de papel, imitando uma antiga cédula eleitoral. (É interessante que cada estudante responda secretamente a cada questão, a fim de não haver interferência da opinião dos colegas.) Dá-se início à apuração dos resultados. Cada resposta possível corresponde a uma realização (ou "valor" assumido) da variável. Cabe ao professor organizar essa contagem na lousa, a fim de que todos possam utilizá-la.

Os grupos devem iniciar a construção de tabelas de frequência para organizar os dados reunidos na classe e mostrados na lousa. Para cada realização da variável a tabela deve conter:

- frequência absoluta (contagem);
- frequência relativa na forma decimal e de porcentagem.

Vale lembrar que nessa atividade os estudantes deverão usar calculadoras.

O professor deve fazer a correção da tabela na lousa; eventuais erros devem ser esclarecidos e corrigidos para o prosseguimento da atividade.

Em seguida, os estudantes devem iniciar a construção das representações gráficas para resumo e apresentação dos dados coletados pela classe. Daremos ênfase a três tipos de gráficos: o de setores (ou *pizza*), o gráfico de barras (horizontais) e o gráfico de colunas (verticais).

É importante que os gráficos construídos sejam guardados para uma posterior apresentação da produção da turma no mural da classe ou em outros ambientes escolares.

Cabe ao professor percorrer a classe e verificar como o trabalho das equipes está sendo desenvolvido, além de esclarecer dúvidas.

Opcionalmente, os estudantes poderão construir esses gráficos com a ajuda de programas de planilhas eletrônicas, na sala de informática.

### 2ª etapa

O ponto central dessa etapa é o estudo das variáveis quantitativas (especialmente aquelas cujos valores são obtidos por contagem) e as medidas de centralidade (média, moda e mediana) e dispersão (amplitude, variância e desvio padrão) associadas a variáveis dessa natureza.

Nesse sentido, o professor deve escolher, a partir de sugestões da turma, uma questão que retrate valores assumidos por uma variável desse tipo.

A seguir, damos algumas sugestões:

- Quantos irmãos você tem?
- Com que frequência semanal você pratica alguma atividade física?
- Quantas vezes por semana você vai à praia (se for uma cidade litorânea)?; ou por mês (se for uma cidade próxima)?; ou por ano (se for uma cidade muito afastada do litoral)?
- Quantos livros você leu no último ano?

Após dividir a turma em grupos, como feito na primeira etapa, os estudantes devem responder à(s) questão(ões) determinada(s) pelo professor.

Os grupos, munidos de calculadoras, devem realizar os cálculos das medidas de centralidade: média aritmética, mediana e moda.

Em seguida, os resultados obtidos pelos diversos grupos são confrontados por meio da correção que o professor deve fazer na lousa. É interessante que se dê espaço para reflexão e discussão dos estudantes sobre a medida de centralidade mais representativa para resumir a tendência central dos valores obtidos para uma determinada variável que está sendo estudada. A resposta irá depender da natureza dos dados colhidos: se houver valores discrepantes e, dependendo do número total de valores obtidos, sabemos que a média pode sofrer distorções.

Além disso, é fundamental que os estudantes compreendam o significado das medidas obtidas.

Por exemplo, com relação à pergunta "Com que frequência semanal você pratica alguma atividade física?", digamos que a média, a moda e a mediana sejam, respectivamente, 2,5, 3 e 3. O que significa o valor 3 encontrado para a mediana? Significa que metade da turma pratica atividade física até 3 vezes por semana e a outra metade pratica 3 ou mais vezes por semana.

Para trabalhar com as medidas de dispersão (variância, desvio padrão e amplitude) podemos recorrer a outras questões. São particularmente interessantes perguntas como: "Em relação à aids, qual é o seu conhecimento quanto aos meios de prevenção? E quanto às possíveis formas de contágio?".

Utilize para cada uma das questões uma escala de 0 a 5 (use apenas valores inteiros), sendo que o 0 significa total desconhecimento e o 5 representa domínio absoluto do assunto.

Lança-se, então, as seguintes questões:

- Sobre qual dos temas levantados — prevenção ou contágio — a turma parece demonstrar maior conhecimento? (cálculo da média)

- E para qual deles parece haver maior uniformidade (homogeneidade) nas respostas? (cálculo do desvio padrão)

Nesse momento, o professor destaca a importância de se estabelecer medidas de dispersão a um conjunto de dados.

A seguir, damos outra sugestão de questão desse tipo.

- Que nota você atribui aos programas de TV, direcionados aos adolescentes, que são exibidos em determinada emissora **X**? E na emissora **Y**? (Aqui 0 significa péssimo e 5 significa excelente.)

Nesse caso, as questões que podem ser lançadas seriam:

- Qual emissora recebeu melhor avaliação?
- Em qual emissora as notas de avaliação variam menos?

Após serem divididos em grupos, os estudantes devem responder à questão selecionada.

Os grupos iniciam os cálculos solicitados (amplitude, média, variância e desvio padrão) com o auxílio do professor, que deverá transitar pela classe.

A correção deve ser feita e as dúvidas esclarecidas.

O professor deve destacar que a amplitude (diferença entre o maior e o menor valor registrado) também é uma medida de variabilidade que pode fornecer, em vários casos, informações relativas ao grau de homogeneidade de um conjunto de dados.

**3ª etapa**

O professor deve continuar o trabalho com as variáveis quantitativas, destacando aquelas cujos valores são obtidos por mensuração (embora a análise com dados agrupados, que será desenvolvida nesta etapa, possa ocorrer também com variáveis quantitativas, como as da segunda etapa).

A seguir, são dados exemplos de questões que podem ser propostas:

- Qual é a sua altura?
- Qual é a sua massa?
- Qual foi sua nota na última prova de Matemática?
- Quanto você costuma gastar por dia na compra de lanche na escola?
- Qual o seu IMC (Índice de Massa Corporal)? Lembre que o IMC é dado pela razão $\frac{\text{massa}}{(\text{altura})^2}$, sendo massa em quilogramas e altura em metros.

Os valores assumidos por esse tipo de variável são números racionais (não inteiros, em geral) que ficam distribuídos em determinado intervalo real, não havendo praticamente repetição (coincidência) de valores. Nesse caso, lança-se à classe a pergunta: "Qual é a maneira mais adequada de trabalhar com esses dados?".

Então, discute-se a análise com dados agrupados em classes de valores (intervalos), destacando: amplitude de cada intervalo, número de intervalos, convenções e nomenclaturas.

Definida(s) a(s) questão(ões) com a turma, os estudantes passam a respondê-la(s) como feito na primeira etapa.

Os dados brutos devem ser colocados na lousa pelo professor e as equipes devem iniciar a construção da tabela de frequência.

O professor confere, na lousa, a tabela e sugere que os grupos representem tais informações em um gráfico. Nesse momento, deve ser apresentado à turma o histograma (gráfico muito parecido com a representação de barras verticais com que o estudante já trabalhou na primeira etapa). A classe é convidada a fazer o histograma para representar os dados contidos na tabela.

Os gráficos devem ser socializados entre os grupos.

O professor deve dar prosseguimento à atividade, explorando as seguintes questões:

- Uma vez que os dados já se encontram agrupados em intervalos, como podemos proceder para associar a eles medidas de centralidade e dispersão?
- O que se perde nessa situação?
- Quais as suposições necessárias para se efetuar tais cálculos?

Neste momento, deve ser apresentado o cálculo da média e do desvio padrão, com base no ponto médio de cada intervalo.

**4ª etapa**

É hora de apresentar toda a produção dos estudantes nas etapas anteriores dessa atividade. Sugerimos que os gráficos e as tabelas das questões respondidas pelos estudantes e das medidas de centralidade e dispersão sejam colocados no mural da classe (ou no mural dos corredores) ou em uma mostra da produção escolar (feira cultural) promovida pelo colégio para toda a comunidade (pais, alunos, professores e funcionários).

## Atividade 5: Matemática Financeira

### Objetivos

- Reconhecer a importância da Matemática Financeira em situações do cotidiano.
- Aprofundar as discussões levantadas nas atividades da seção *Troque ideias* (Compras à vista ou a prazo (I)) e no texto *Aplicações* (Compras à vista ou a prazo II – Financiamentos) do capítulo 6.
- Decidir entre pagamento à vista ou a prazo.
- Identificar eventuais exageros e distorções que podem ocorrer em financiamentos praticados no comércio em geral.
- Utilizar o conceito de valor atual (ou presente) de um conjunto de pagamentos a serem realizados em datas futuras na resolução de problemas de financiamento.
- Aprofundar o conceito de juros compostos e rever progressão geométrica.

### Material

- Calculadora (científica, de preferência).
- Lápis, borracha, folha sulfite.
- Jornais e revistas que contenham anúncios de venda de produtos com opção de pagamento à vista e a prazo (complementação de atividade).

**Número de aulas:** 3 a 4.

## Desenvolvimento

**1ª etapa**

O professor deve dividir a classe em grupos, ler e explicar à classe o seguinte problema:

> Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 6 prestações mensais de R$ 500,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, o preço cobrado é R$ 2 850,00. Qual é a melhor alternativa de pagamento para um comprador que pode comprar o sofá à vista, mas que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 1% a.m.?

No início de 2016 havia aplicações financeiras cujo rendimento mensal era próximo de 1% (aplicações atreladas à taxa de juros). Se necessário, o professor pode adequar essa taxa à realidade do momento de aplicação dessa atividade.

Após apresentar o problema, o professor deve pedir a cada grupo para simular a situação da possível compra a prazo destacando, em cada mês, o saldo inicial, os juros recebidos na aplicação, a retirada para pagamento da prestação e o saldo final.

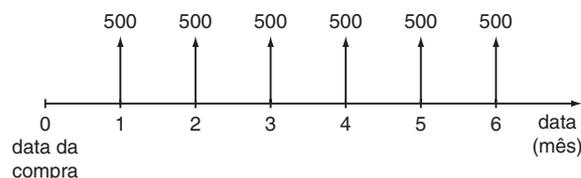
É possível sugerir aos grupos que organizem os cálculos na seguinte tabela, que deverá ser preenchida como segue:

| | Saldo inicial para aplicação | Juros recebidos | Retirada | Saldo final da aplicação |
|---|---|---|---|---|
| **Ato da compra** | 2 850,00 | | | |
| **1 mês depois** | | $0{,}01 \cdot 2\,850{,}00 = 28{,}50$ | 500 | 2 378,50 |
| **2 meses depois** | 2 378,50 | $0{,}01 \cdot 2\,378{,}50 = 23{,}79$ | 500 | 1 902,29 |
| **3 meses depois** | 1 902,29 | $0{,}01 \cdot 1\,902{,}29 = 19{,}02$ | 500 | 1 421,31 |
| **4 meses depois** | 1 421,31 | $0{,}01 \cdot 1\,421{,}31 = 14{,}21$ | 500 | 935,52 |
| **5 meses depois** | 935,52 | $0{,}01 \cdot 935{,}52 = 9{,}36$ | 500 | 444,88 |
| **6 meses depois** | 444,88 | $0{,}01 \cdot 444{,}88 = 4{,}45$ | 500 | −50,67 |

A partir dos dados da tabela, o estudante deve decidir qual é a opção mais vantajosa.

Naturalmente, eles deverão optar pelo pagamento à vista, pois faltou dinheiro na simulação acima. Observa-se que deixar o dinheiro aplicado e fazer retiradas mensais obriga o comprador a desembolsar R$ 50,67 a mais para pagar a última prestação.

Depois, o professor deve solicitar aos estudantes que refaçam a questão proposta na 1ª etapa da atividade, valendo-se agora do conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos.

Para facilitar, se houver necessidade, o professor pode montar, na lousa, um esquema representando os valores das prestações a serem pagas em cada data.

É importante que o professor faça a correção na lousa ou chame algum estudante disposto a explicar o raciocínio usado. A resposta correta é:

$$V = \frac{500}{1{,}01} + \frac{500}{1{,}01^2} + \ldots + \frac{500}{1{,}01^6}$$

$V \simeq 495{,}05 + 490{,}15 + 485{,}30 + 480{,}49 + 475{,}73 + 471{,}03$

$V \simeq 2\,897{,}75$ reais

Qual é a conclusão?

Como o valor atual do pagamento parcelado (2 897,75 reais) é maior que o valor à vista (2 850,00 reais), o comprador deve optar pelo pagamento à vista.

**2ª etapa**

Cada equipe deverá receber um anúncio de venda de carros como este:

> **Carro Veloz 1.4 completo**
> Ar-condicionado, direção hidráulica, travas e vidros elétricos.
> Por R$ ■ ou
> R$ 16 400,00 + 60 prestações de R$ 563/mês

O valor à vista do carro foi propositadamente oculto.

O professor deve propor às equipes que determinem o valor à vista do carro, sabendo que a concessionária operava com uma taxa de juros compostos de 1,09% a.m. e admitindo que a primeira parcela de R$ 563,00 deva ser paga um mês depois da data da compra.

**Solução:**

É preciso encontrar o valor atual dos pagamentos que serão efetuados nesse financiamento.

O valor atual desses pagamentos é: 16 400 + v', sendo:

$$v' = \frac{563}{1{,}0109} + \frac{563}{1{,}0109^2} + \dots + \frac{563}{1{,}0109^{60}}$$

$$v' = 563 \cdot \left(\frac{1}{1{,}0109} + \frac{1}{1{,}0109^2} + \dots + \frac{1}{1{,}0109^{60}}\right) \ (*)$$

A sequência $\left(\frac{1}{1{,}0109}; \frac{1}{1{,}0109^2}; \dots; \frac{1}{1{,}0109^{60}}\right)$ é uma P.G., em que $a_1 = \frac{1}{1{,}0109}$, $q = \frac{1}{1{,}0109}$ e n = 60 termos.

Devemos determinar:

$$S_{60} = \frac{a_1 \cdot (q^{60} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{1{,}0109} \cdot \left[\left(\frac{1}{1{,}0109}\right)^{60} - 1\right]}{\frac{1}{1{,}0109} - 1}$$

$$S_{60} \simeq \frac{\frac{1}{\cancel{1{,}0109}} \cdot (0{,}521805 - 1)}{\frac{-0{,}0109}{\cancel{1{,}0109}}} = \frac{-0{,}478195}{-0{,}0109} =$$

$= 43{,}8711$

Em (*) obtemos:

$v' = 563 \cdot 43{,}8711 = 24\,699{,}43$

Assim, o valor atual dos pagamentos na compra financiada é: 16 400 + 24 699,43 = 41 099,43 (aproximadamente R$ 41 100,00).

É importante destacar a diferença (de quase 10 mil reais) entre o valor total que seria desembolsado na compra a prazo (563 · 60 + 16 400 = 50 180,00) e o valor à vista: 41 100 reais. Se a entrada dada fosse um valor menor, essa diferença seria maior.

Observação final: Os encartes de jornais trazidos pelos estudantes podem proporcionar atividades semelhantes a essa e, devidamente organizados, podem ser usados como um instrumento diversificado de avaliação.

**3ª etapa**

O professor deve dividir a classe em grupos, os quais deverão resolver o seguinte problema:

> Uma empresa tinha uma dívida de R$ 90 000,00 em 10 de janeiro de 2016. Ela renegociou a dívida junto ao credor nas seguintes condições:
> - Pagamento de R$ 62 500,00 em 10 de janeiro de 2017.
> - Pagamento de R$ 62 500,00 em 10 de janeiro de 2018.
>
> Qual a taxa anual de juros compostos que a empresa pagará nessa negociação?

**Solução:**

Seja **i** a taxa anual de juros procurada. Trazendo os pagamentos para o valor presente, temos:

$$\frac{62\,500}{1 + i} + \frac{62\,500}{(1 + i)^2} = 90\,000 \Rightarrow \frac{625}{1 + i} + \frac{625}{(1 + i)^2} =$$

$$= 900 \xRightarrow{1 + i = t} \frac{25}{t} + \frac{25}{t^2} = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36t^2 - 25t - 25 = 0 \Rightarrow t = \frac{25 \pm \sqrt{4225}}{72} = 1{,}25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + i = 1{,}25 \Rightarrow i = 0{,}25 \text{ (25\% ao ano)}$$

**4ª etapa**

Em equipes, os estudantes deverão resolver o seguinte problema:

> O preço à vista de um produto é R$ 102,00. Os clientes podem optar pelo pagamento de duas parcelas iguais, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após essa data. Sabendo que a taxa de juros compostos do financiamento é de 4% ao mês, determine o valor de cada prestação.

**Solução:**

1º modo:

Observe o fluxo de pagamentos:

A soma dos valores presentes dos pagamentos é:

$$p + \frac{p}{1{,}04} = 102 \Rightarrow p \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}04}\right) = 102 \Rightarrow$$

$\Rightarrow p = 52$ reais

2º modo:

Seja **p** o valor de cada parcela. Como a 1ª parcela é paga no ato, o saldo devedor, logo após o pagamento dessa

parcela, é 102 − p. Aplicando 4% de juros sobre esse valor, obtemos o valor da segunda parcela.

$1{,}04 \cdot (102 - p) = p \Rightarrow 106{,}08 = 2{,}04p \Rightarrow p = 52$ reais

## Atividade 6: Construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais com auxílio de um *software* livre de Matemática

### Objetivo

- Dar continuidade à atividade da seção *Troque ideias* – capítulo 9 (Interpretando e construindo gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 com um *software* livre).

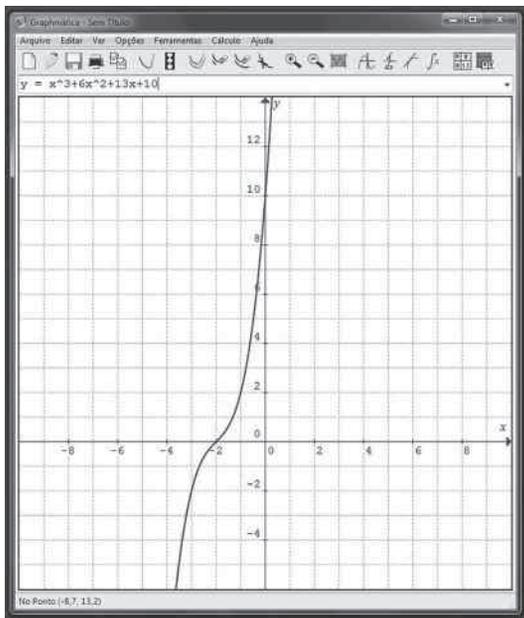
### Material

- Papel, caneta, lápis, borracha e régua.
- Será necessário usar os computadores do laboratório de informática do colégio com o programa Graphmática já instalado. Recomendamos que, no máximo, três estudantes utilizem cada computador disponível.

**Número de aulas:** 2 a 3.

### Desenvolvimento

O professor deve dividir a turma em trios e pedir aos estudantes que construam, no Graphmática, o gráfico da função $y = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$, mostrado a seguir:

2014 KSOFT, INC

Em seguida, os estudantes deverão resolver os seguintes itens:

a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

**Solução:**

Uma única raiz real ($x = -2$), pois o gráfico de **f** intersecta o eixo **x** uma única vez.

b) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com o das ordenadas?

**Solução:**

Eixo das abscissas: $(-2, 0)$; eixo das ordenadas: $(0, 10)$.

Os estudantes deverão lembrar que, se $x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 10$. Na tela, é possível visualizar o ponto de interseção com o eixo **y**.

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$.

**Solução:**

Como −2 é raiz, **f** é divisível por $x + 2$:

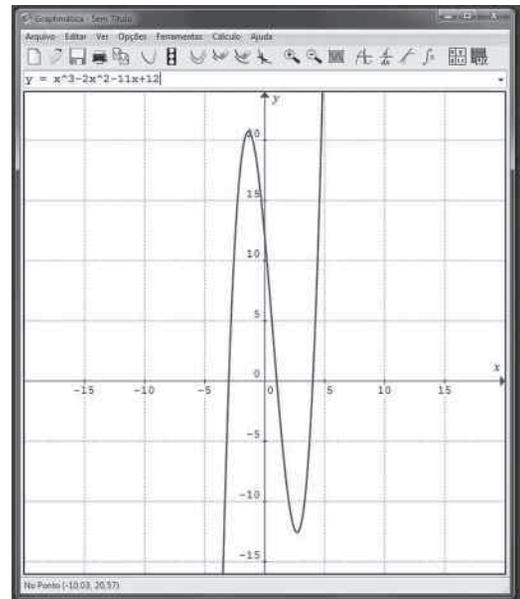
| −2 | 1 | 6 | 13 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 5 | 0 |

As outras raízes de **f** são obtidas de: $x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -2 + i$ ou $x = -2 - i$;

$S = \{-2, -2 + i, -2 - i\}$

A próxima função a ser analisada é dada pela lei $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$.

Será obtido o seguinte gráfico:

2014 KSOFT, INC

Baseados no gráfico, os estudantes resolverão os seguintes itens:

a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

**Solução:**

Como o gráfico de **f** intersecta o eixo das abscissas em três pontos distintos, podemos afirmar que **f** tem três raízes reais: uma negativa e duas positivas. Veja no gráfico que a maior raiz está à esquerda do ponto médio do intervalo [0, 10], que é 5.

b) Pesquise alguma raiz racional de **f**.

**Solução:**

Se houver alguma raiz racional de **f**, ela será um número inteiro pertencente ao conjunto $\{-1, +1, -2, +2, -3, +3, -4, +4, -6, +6, -12, +12\}$.

Espera-se que os estudantes, por meio de verificações simples, encontrem uma raiz para, a partir dela, determinar as outras duas.

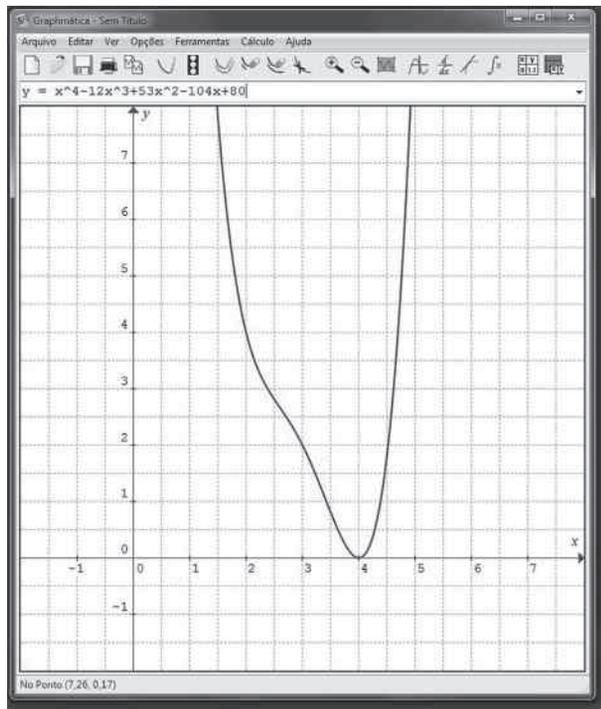
Suponhamos que a primeira raiz encontrada seja $x = 1$. Para determinar as outras raízes, basta dividir o polinômio $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ por $x - 1$:

| 1 | 1 | −2 | −11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −12 | 0 |

As outras raízes seguem de $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$.

$S = \{1, -3, 4\}$

A lei da próxima função que será analisada é

$y = x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 104x + 80$. Será obtido o gráfico seguinte.

a) Qual é o número de raízes reais de **f** ?

**Solução:**

O gráfico de **f** intersecta o eixo **x** em um único ponto, cuja abscissa é próxima de 5.

Assim, há uma única raiz real. Dependendo do formato de exibição do plano cartesiano, pode-se já concluir que essa raiz é 4.

b) Qual é a multiplicidade da(s) raiz(es) real(is)?

**Solução:**

Como a equação $f(x) = 0$ apresenta apenas coeficientes reais e seu grau é 4, podemos ter uma única raiz real com multiplicidade 4. Isso não ocorre, pois, se $x = a$ fosse raiz de multiplicidade 4, teríamos $x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 104x + 80 = (x - a)^4$, isto é, $x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 104x + 80 = x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4$.

Verificamos que não existe $a \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade de polinômios.

Lembrando que não podemos ter uma raiz real e três complexas não reais, nem três raízes reais e uma complexa não real, a única possibilidade é: uma única raiz real com multiplicidade 2 e um par de complexos (não reais) conjugados.

Assim, a multiplicidade dessa raiz real é igual a 2.

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação

$x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 104x + 80 = 0$.

**Solução:**

A maneira mais simples é pesquisar alguma raiz racional (no caso, inteira) da equação. Embora haja muitos candidatos, o gráfico indica que essa raiz é próxima de $x = 5$ e, como $x = 4$ é candidato, é natural que se faça logo essa verificação:

$4^4 - 12 \cdot 4^3 + 53 \cdot 4^2 - 104 \cdot 4 + 80 =$

$= 256 - 768 + 848 - 416 + 80 = 0$

Logo, a raiz real dupla é $x = 4$.

É possível que os estudantes já tenham concluído que $x = 4$ é a raiz dupla, não sendo necessário fazer nenhuma pesquisa.

Outras raízes podem ser obtidas de $q(x) = 0$, em que $q(x)$ é o quociente de divisão de:

$x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 104x + 80$ por $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

Outra possibilidade é usar as relações de Girard. As raízes são: 4, 4, $a + bi$, $a - bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Daí:

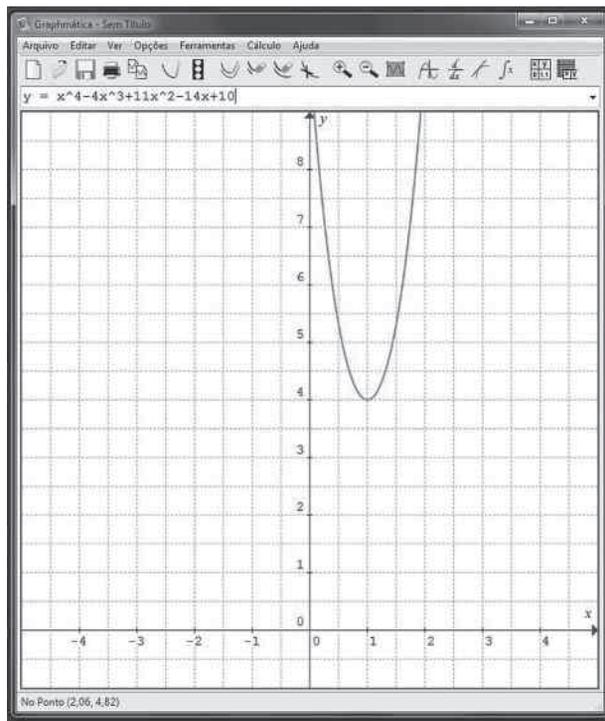
Soma $= \dfrac{-b}{a} \Rightarrow 8 + 2a = 12 \Rightarrow a = 2$

Produto $= \dfrac{e}{a} \Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot (2 + bi) \cdot (2 - bi) = 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^2 - (bi)^2 = 5 \Rightarrow 4 + b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm 1$

Assim, as raízes complexas não reais são: $2 + i$ e $2 - i$.

$S = \{4, 2 + i, 2 - i\}$

Os estudantes deverão digitar a lei da função $y = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$. Será obtido o gráfico seguinte:

a) Qual é o número de raízes reais de **f**?

**Solução:**

Zero, pois o gráfico de **f** não intersecta o eixo das abscissas.

b) **f** é crescente para que valores de **x**?

**Solução:**

Da análise do gráfico, vemos que, se $x > 1$, **f** é crescente.

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $1 - i$.

**Solução:**

Como a equação tem todos os coeficientes reais, se $x = 1 - i$ é raiz, então $x = 1 + i$ também é raiz e o polinômio dado é divisível por
$(x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2$:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^4 & -4x^3 & +11x^2 & -14x & +10 & x^2 - 2x + 2 \\
\oplus & -x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \overline{x^2 - 2x + 5} \\
\hline
 & & -2x^3 & +9x^2 & -14x & +10 & \\
\oplus & & +2x^3 & -4x^2 & +4x & & \\
\hline
 & & & 5x^2 & -10x & +10 & \\
\oplus & & & -5x^2 & +10x & -10 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

De $x^2 - 2x + 5 = 0$ seguem as outras raízes, a saber: $1 + 2i$ e $1 - 2i$.

$S = \{1 - i, 1 + i, 1 + 2i, 1 - 2i\}$

## Atividade 7: Estatística – Calculando medidas de centralidade e de dispersão em planilhas eletrônicas

### Objetivos

- Familiarizar o estudante com o uso de planilhas eletrônicas no cálculo de medidas estatísticas (de centralidade e dispersão).
- Revisar os conceitos trabalhados no capítulo 5.

### Material

- Papel, lápis, borracha e calculdora.
- Computadores com um programa de planilha eletrônica já instalado.

**Número de aulas:** 3 a 5.

Observação: Essa atividade deverá ser desenvolvida na sala de informática do colégio. Se necessário, divida a turma de acordo com a quantidade de computadores disponíveis.

### Desenvolvimento

É possível escolher o número de atividades que serão desenvolvidas. Sugerimos, no entanto, que todas as etapas descritas a seguir sejam cumpridas. Em cada uma delas, há a possibilidade de pedir aos estudantes que façam, sem utilizar o computador, os cálculos das medidas a fim de confirmar os valores obtidos. Para isso, deverão utilizar uma calculadora.

Todas as etapas descritas a seguir serão desenvolvidas no Calc – LibbreOffice. É importante ressaltar que esse recurso pode ser realizado em outras planilhas eletrônicas com algumas diferenças.

**1ª etapa:** *Cálculo da média usando fórmula*

Todos os estudantes deverão receber e ler o texto a seguir.

Dados da Funasa (Fundação Nacional de Saúde) mostram que, em 2010, a população indígena brasileira residente em aldeias era de 600 mil. Esse número vem crescendo, como mostra a tabela seguinte.

**População indígena brasileira**

| Ano | População (em mil habitantes) |
|---|---|
| 2000 | 307 |
| 2001 | 359 |
| 2002 | 382 |
| 2003 | 417 |
| 2004 | 442 |
| 2005 | 454 |
| 2006 | 469 |
| 2007 | 488 |
| 2008 | 547 |
| 2009 | 565 |
| 2010 | 600 |

**Fonte:** Funasa

O professor deve pedir aos estudantes que construam uma planilha eletrônica com base nos dados do texto e, a partir dela, calculem as medidas solicitadas.

Orientações para os estudantes:

Cálculo da média da população indígena no Brasil nesse período.

1º) Inserir, nas colunas **A** e **B** as duas grandezas relacionadas: o ano e a população indígena (em mil habitantes), respectivamente.

2º) Para calcular a média aritmética da população indígena na planilha eletrônica, os estudantes devem selecionar uma célula qualquer (no exemplo, foi selecionada a célula B16). Com a célula selecionada, devem preencher o campo *fx* com a fórmula:

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Observe que o sinal : indica que a soma pedida refere-se aos valores das células B2, B3, ... até B12. A divisão é indicada pelo traço inclinado ( / ).

3º) Na célula selecionada aparece o valor da média calculada: 457,273 mil indígenas.

**2ª etapa:** *Cálculo da média usando as funções do programa*.

Depois que todos já aprenderam a calcular a média de um conjunto de dados em uma planilha eletrônica com o uso de fórmulas, é importante mostrar aos estudantes que os programas apresentam, entre as suas funções, a opção **média**, que calcula automaticamente o resultado procurado.

Na planilha seguinte, está tabulada a quantidade de gols marcados pelo artilheiro de cada Copa do Mundo de Futebol (de 1930 a 2014).

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Copa | Número de gols do artilheiro | | | |
| 2 | 1930 | 8 | | | |
| 3 | 1934 | 5 | | | |
| 4 | 1938 | 8 | | | |
| 5 | 1950 | 9 | | | |
| 6 | 1954 | 11 | | | |
| 7 | 1958 | 13 | | | |
| 8 | 1962 | 4 | | | |
| 9 | 1966 | 9 | | | |
| 10 | 1970 | 10 | | | |
| 11 | 1974 | 7 | | | |
| 12 | 1978 | 6 | | | |
| 13 | 1982 | 6 | | | |
| 14 | 1986 | 6 | | | |
| 15 | 1990 | 6 | | | |
| 16 | 1994 | 6 | | | |
| 17 | 1998 | 6 | | | |
| 18 | 2002 | 8 | | | |
| 19 | 2006 | 5 | | | |
| 20 | 2010 | 5 | | | |
| 21 | 2014 | 6 | | | |
| 22 | | | | | |
| 23 | | | | 7,20 | |
| 24 | | | | | |

Planilha1

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Orientações para os estudantes:

O professor deve pedir aos estudantes que sigam os passos seguintes:

1º) Selecione uma célula qualquer onde o valor da média será exibido. No exemplo, a célula D23 foi a escolhida.

2º) Clique sobre *fx*. A janela *Inserir função* abrirá.

3º) Nessa janela, selecione MÉDIA e clique em *Próximo*.

4º) Na planilha, arraste o *mouse*, com o botão esquerdo pressionado, sobre as células desejadas.

5º) Clique em OK na janela *Assistente de funções*. Na célula D23 encontra-se a média do número de gols do artilheiro por Copa: 7,20 gols.

**3ª etapa:** *Cálculo da mediana*

Orientações para os estudantes:

1º) Para calcular a mediana dessa relação de valores (número de gols), é preciso inicialmente selecionar os valores da coluna **B** e, em seguida, os valores da coluna **A**.

2º) Clique no botão *Classificar em ordem crescente* na barra de ferramentas superior.

Obteremos a relação ordenada mostrada na imagem abaixo.

A2:B21 | 4

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Copa | Número de gols do artilheiro | | | |
| 2 | 1962 | 4 | | | |
| 3 | 1934 | 5 | | | |
| 4 | 2006 | 5 | | | |
| 5 | 2010 | 5 | | | |
| 6 | 1978 | 6 | | | |
| 7 | 1982 | 6 | | | |
| 8 | 1986 | 6 | | | |
| 9 | 1990 | 6 | | | |
| 10 | 1994 | 6 | | | |
| 11 | 1998 | 6 | | | |
| 12 | 2014 | 6 | | | |
| 13 | 1974 | 7 | | | |
| 14 | 1930 | 8 | | | |
| 15 | 1938 | 8 | | | |
| 16 | 2002 | 8 | | | |
| 17 | 1950 | 9 | | | |
| 18 | 1966 | 9 | | | |
| 19 | 1970 | 10 | | | |
| 20 | 1954 | 11 | | | |
| 21 | 1958 | 13 | | | |
| 22 | | | | | |
| 23 | | | | | |
| 24 | | | | | |

Planilha1

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Como são 20 valores, a mediana corresponde à média entre o 10º e o 11º valor, que se encontram nas células B11 e B12: 6 gols.

A ordenação pode ser especialmente útil quando se trabalha com um banco grande de dados numéricos, como ocorre no departamento de Recursos Humanos de várias empresas, por exemplo.

Vale a pena lembrar que há a opção do cálculo direto da mediana, sem a necessidade de ordenação — um processo parecido com o que foi descrito na 2ª etapa: desta vez, a função MEDIANA deve ser selecionada na janela *Inserir função*. A resposta é obtida diretamente. No caso, o valor da mediana é 6.

**4ª etapa:** *Cálculo da média aritmética ponderada*

Na planilha seguinte, estão relacionados os valores das mensalidades pagas pelos alunos de uma academia, de acordo com o plano escolhido.

B9 =((A2*B2)+(A3*B3)+(A4*B4)+(A5*B5))/(A2+A3+A4+A5)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Número de alunos | Valor da mensalidade (em reais) | | | |
| 2 | 78 | 70 | | | |
| 3 | 145 | 105 | | | |
| 4 | 48 | 130 | | | |
| 5 | 15 | 150 | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | 102,0104895105 | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Orientações para os estudantes:

Para conhecermos a média dos valores mensais pagos, será necessário calcular a média aritmética ponderada.

Como as frequências absolutas dos valores 70, 105, 130 e 150 são 78, 145, 48 e 15, respectivamente, temos:

$$x = \frac{78 \cdot 70 + 145 \cdot 105 + 48 \cdot 130 + 15 \cdot 150}{\underbrace{78 + 145 + 48 + 15}_{\text{número total de alunos}}}$$

Veja o procedimento necessário para fazer este cálculo:

1º) Selecione uma célula qualquer onde o valor da média ponderada será exibido. No exemplo, a célula B9 foi a escolhida.

2º) Insira no campo *fx* a fórmula que expressa a média ponderada:

((A2*B2)+(A3*B3)+(A4*B4)+(A5*B5))/(A2+A3+A4+A5)

No programa, o sinal de multiplicação é o asterisco (*) e a divisão é a barra (/).

Ao fim do procedimento, a média ponderada é apresentada na célula escolhida no 1º passo.

No caso, o valor obtido é R$ 102,01.

**5ª etapa:** *Cálculo da variância e do desvio padrão*

Na planilha seguinte, encontramos o número de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nas edições dos Jogos Olímpicos (de 1992 a 2012).

B8

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Olimpíada | Número de medalhas de ouro | | | | | |
| 2 | Londres – 2012 | 3 | | | | | |
| 3 | Pequim – 2008 | 3 | | | | | |
| 4 | Atenas – 2004 | 5 | | | | | |
| 5 | Sydney – 2000 | 0 | | | | | |
| 6 | Atlanta – 1996 | 3 | | | | | |
| 7 | Barcelona – 1992 | 2 | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | |

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Vamos calcular a variância e o desvio padrão do número de medalhas de ouro conquistadas nesse período (1992 a 2012).

Orientações para os estudantes:

1º) Vamos obter a média dos valores que constam nas células B2, B3, ... até B7. Selecionamos uma célula (no exemplo, D2). Já vimos que podemos usar a função MÉDIA, acessível ao clicar em *fx*. Observe que, no exemplo, foi dado o comando:

D2 | =MÉDIA(B2:B7)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Olimpíada** | **Número de medalhas de ouro** | | | | | | |
| 2 | Londres – 2012 | 3 | | 2,666666667 | | 2,222222222 | | 1,490711985 |
| 3 | Pequim – 2008 | 3 | | | | | | |
| 4 | Atenas – 2004 | 5 | | | | | | |
| 5 | Sydney – 2000 | 0 | | | | | | |
| 6 | Atlanta – 1996 | 3 | | | | | | |
| 7 | Barcelona – 1992 | 2 | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |



Na célula D2, encontramos o número médio de medalhas de ouro: 2,6666...

2º) Selecione uma célula qualquer onde o valor da variância será exibido. No exemplo, a célula F2 foi a escolhida. Com a seleção feita, preencha o campo *fx* com a fórmula necessária para o cálculo da variância. O desvio é calculado pelo quadrado da diferença entre cada valor da coluna **B** e a média (guardado na célula D2).

3º) Definidos os comandos para o cálculo dos desvios quadráticos, adicionamos todos.
Veja o comando que representa a expressão do numerador no cálculo de variância:
= ((B2−D2)^2+(B3−D2)^2+...+(B7−D2)^2)

4º) Dividimos a soma obtida por 6.
Veja o comando que representa a expressão para o cálculo da variância:
= ((B2−D2)^2+(B3−D2)^2+...+(B7−D2)^2)/6

5º) Assim, na célula F2 (veja a planilha anterior), encontra-se o valor obtido para a variância: 2,222...

6º) Para obter o desvio padrão, uma vez conhecida a variância (célula F2), basta extrair sua raiz quadrada.
É preciso, para isso, escolher uma célula (no exemplo, H2) e usar a função RAIZ, acessível ao clicar em *fx*.
Escolhida a função, selecione a célula com a variância e clique em OK.

Veja, na planilha seguinte, o desvio padrão na célula H2: 1,4907

G6 | =DESV.MÉDIO(B2:B7)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Olimpíada** | **Número de medalhas de ouro** | | | | | | |
| 2 | Londres – 2012 | 3 | | 2,666666667 | | 2,222222222 | | 1,490711985 |
| 3 | Pequim – 2008 | 3 | | | | | | |
| 4 | Atenas – 2004 | 5 | | | | | | |
| 5 | Sydney – 2000 | 0 | | | | | | |
| 6 | Atlanta – 1996 | 3 | | | | | 1,111111111 | |
| 7 | Barcelona – 1992 | 2 | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |



**6ª etapa:** *Cálculo do desvio médio*

Para finalizar, é possível calcular também o desvio médio do número de medalhas de ouro conquistadas usando diretamente essa opção, disponível geralmente na categoria Estatística dos *softwares* de planilhas eletrônicas.

O procedimento é o mesmo: selecionamos uma célula (no exemplo, G6), clicamos em *fx* e selecionamos as células das quais desejamos obter o desvio médio, a saber:

=DESV.MÉDIO(B2:B7)

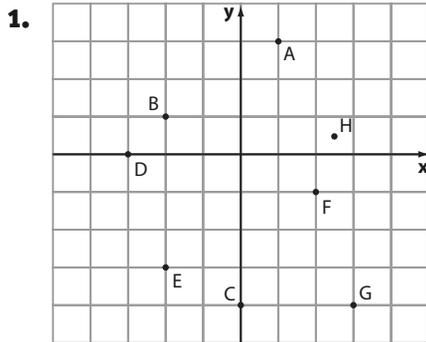
Em G6, encontramos o valor do desvio médio: 1,111...

# RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 1

## O ponto

### Exercícios

**1.**

**2.** H(2, 4) J(1, 1) L(−1, 4) N(1, −3)
I(−2, −4) K(3, 0) M(−3, −2) O(0, 0)

**3.** **a)** **E**, **G**. **c)** **C**, **I**. **e)** **B**, **K**. **g)** **E**, **I**.
**b)** **A**, **L**. **d)** **H**. **f)** **D**, **F**, **J**. **h)** **A**.

**4.** **a)** Positivo. **b)** Negativo. **c)** Positivo. **d)** Nulo.

**5.** $k^2 - 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3$

**6.** **a)** $\left.\begin{matrix} a > 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 4º quadrante **c)** $\left.\begin{matrix} 2a > 0 \\ \frac{b}{3} < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 4º quadrante

**b)** $\left.\begin{matrix} -a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 3º quadrante **d)** $\left.\begin{matrix} -a < 0 \\ -b > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 2º quadrante

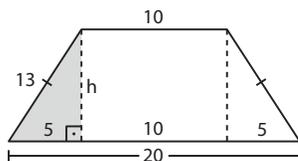
**7.**
- A(3, 0) B(0, 3) C(−3, 0) D(0, −3)
- O raio da circunferência "maior" mede 5; logo:
E(5, 0) F(0, 5) G(−5, 0) H(0, −5)

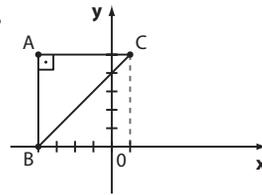
**8.**
- Abscissa negativa: $m < 0$ (1)
- Ordenada negativa: $2m - 1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$ (2)

(1) ∩ (2) $\Rightarrow \{m \in \mathbb{R} \mid m < 0\}$

**9.** As ordenadas de **A**, **B** e **C** devem ser a mesma. Assim, $m = n = 5$.

**10.** As abscissas dos três pontos devem coincidir: $a = b = 3$.

**11.**

$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$
Assim:
A(0, 0) B(5, 12) C(15, 12) D(20, 0)

**12.**

$\overline{AC} \perp \overline{AB}$
$\overline{BC}$ é a hipotenusa.

**13.** △ABC é retângulo em **B**: $AC^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = 6\sqrt{2} = BD$
Assim, $AO = CO = 3\sqrt{2}$; $BO = DO = 3\sqrt{2}$.
As coordenadas pedidas são:
$A(-3\sqrt{2}, 0)$, $B(0, 3\sqrt{2})$, $C(3\sqrt{2}, 0)$ e $D(0, -3\sqrt{2})$.

**14.** **a)** $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
**b)** $\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
**c)** $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
**d)** $\sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$
**e)** $\sqrt{0^2 + 7^2} = 7$
**f)** $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
**g)** $\sqrt{0^2 + 10^2} = 10$
**h)** $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$
**i)** $\sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

**15.** $AB = d_{AB} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$
$BC = d_{BC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
$AC = d_{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
O perímetro é $(5 + \sqrt{34} + \sqrt{53})$ u.c.

**16.** A(4, 4), B(x, 0)
$d_{AB} = 5 \Rightarrow \sqrt{(4 - x)^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (4 - x)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - x = \pm 3 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 7$

**17.** $d_{AE} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$
$d_{BE} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$
$d_{CE} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
$d_{DE} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Como $\sqrt{2} > 1 > \frac{1}{2}$, o mais distante de **E** é o ponto **D**.

**18.** $\sqrt{(3m + 1 - m)^2 + 12^2} = 13 \Rightarrow (2m + 1)^2 = 5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m + 1 = \pm 5 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -3$
Como **B** pertence ao 2º quadrante, devemos ter $m < 0$. Daí $m = -3$. Observe que neste caso A(−8, 15) pertence ao 2º quadrante.

**19.** A(3, 3) $AB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
B(−4, 2) $BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
C(−2, −2) $CD = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

D(4, −4) $AD = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Perímetro:

$5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$

**20.** A medida do raio é a distância entre (−1, 3) e (2, 5):
$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; o diâmetro mede $2\sqrt{13}$.

**21.** Sejam A(2, 4), B(5, 1) e C(6, 5),
$d_{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$d_{AC} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
$d_{BC} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
O triângulo é isósceles, pois AC = BC.
Perímetro:
$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{17})$ u.c.

**22.** Q(q, q); $AQ = BQ \Rightarrow \sqrt{(q-4)^2 + (q-2)^2} =$
$= \sqrt{(q-6)^2 + (q-8)^2} \Rightarrow \cancel{q^2} - 8q + 16 + \cancel{q^2} - 4q + 4 =$
$= \cancel{q^2} - 12q + 36 + \cancel{q^2} - 16q + 64 \Rightarrow 16q = 80 \Rightarrow q = 5$
Assim, Q(5, 5).

**23.** P(0, y)
$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{(-1-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 1 = y^2 - 4y + 4 + 16 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 9$
Assim, P(0, 9).

**24.** P(0, 0), Q(3, 2), R(−1, 4)
$PQ = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$PR = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
$QR = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$
O triângulo é escaleno.

**25.**
- $P \in$ eixo **x** $\Rightarrow P(x, 0)$
- $d_{PA} = d_{PB}$

$\sqrt{(x-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + 2 = \cancel{x^2} - 4x + 13 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$;
$P\left(\frac{11}{2}, 0\right)$

**26.** Aplicando o teorema de Pitágoras no △ABC, obtemos:
$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [(3-1)^2 + (0-1)^2] + [(4-1)^2 + (m-1)^2] =$
$= [(4-3)^2 + (m-0)^2] \Rightarrow$
$\Rightarrow (4 + 1) + (9 + m^2 - 2m + 1) = 1 + m^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 14 \Rightarrow m = 7$

**27.** $d_{MN} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
Seja P(x, y) o ponto procurado.
$d_{PM} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 8$ (*)
$d_{PN} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2 \Rightarrow -4x + 4 = -4y + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y$ (**)
Substituindo-se (**) em (*), temos:
$(x-2)^2 + x^2 = 8 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$
Se $x = 1 + \sqrt{3}$, por (**), obtemos $y = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$
Se $x = 1 - \sqrt{3}$, por (**), obtemos $y = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

**28.** Um ponto P(x, y) é equidistante de **A** e **B** se:
$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} - 8y + 16 =$
$= \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + 1 \Rightarrow 10x - 6y + 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x - 3y + 5 = 0$
Assim, para obter pontos que satisfaçam essa equação podemos, arbitrariamente, atribuir um valor a uma das variáveis e, a partir daí, determinar o valor da outra:
Por exemplo:
Se $x = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 3y + 5 = Q \Rightarrow y = \frac{5}{3}$; o ponto é $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.
Se $x = 2 \Rightarrow 5 \cdot 2 - 3y + 5 = 0 \Rightarrow 15 = 3y \Rightarrow y = 5$; o ponto é (2, 5).
Se $y = 0 \Rightarrow 5x - 3 \cdot 0 + 5 = 0 \Rightarrow x = -1$; o ponto é (−1, 0).
Se $y = -1 \Rightarrow 5x - 3 \cdot (-1) + 5 = 0 \Rightarrow 5x = -8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\frac{8}{5}$; o ponto é $\left(-\frac{8}{5}, -1\right)$ e assim por diante.

**29.** **a)** $x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y_M = \frac{2+4}{2} = 3$; $M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

**b)** $\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

**c)** $\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

**d)** $\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-5+5}{2}\right) = (0, 0)$

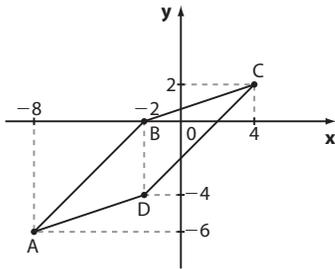
**e)** $\left(\frac{4+10}{2}, \frac{-4+10}{2}\right) = (7, 3)$

**f)** $\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = (3, -1)$

**30.** $\frac{n+4}{2} = 2 \Rightarrow n + 4 = 4 \Rightarrow n = 0$
$\frac{5+m}{2} = 3 \Rightarrow 5 + m = 6 \Rightarrow m = 1$
$\therefore m + n = 1$

**31.** O ponto médio **M** de $\overline{BC}$ é $\left(\frac{-2 + (-4)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) =$
$= (-3, 3)$.
$d_{AM} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

**32.** Seja Q(a, b) o ponto procurado; **O** é o ponto médio de $\overline{PQ}$, sendo **O** o centro da circunferência:
$$\begin{cases} 4 = \frac{7+a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ 2 = \frac{-3+b}{2} \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$
Q(1, 7)

**33.**

1º modo:

$AD = \sqrt{(-8+2)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{40}$

$BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40}$

$AB = \sqrt{(-8+2)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{72}$

$CD = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{72}$

Note que AD = BC e AB = CD.

Recordando: "Todo quadrilátero cujos lados opostos têm medidas iguais é um paralelogramo".

2º modo:

Seja **M** o ponto médio de $\overline{AC}$:

$$M\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-2, -2)$$

**N** é ponto médio de $\overline{BD}$:

$$N\left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) = (-2, -2)$$

Note que M = N.

ABCD é um quadrilátero cujas diagonais se intersectam ao meio. Assim, ABCD é paralelogramo.

**34.** Sejam A(x, 0) e B(0, y) as extremidades desse segmento, temos:

$$-1 = \frac{x+0}{2} \Rightarrow x = -2;\ A(-2, 0)$$

$$2 = \frac{0+y}{2} \Rightarrow y = 4;\ B(0, 4)$$

**35.** **a)** $G\left(\frac{2+4+(-2)}{3}, \frac{-1+(-3)+(-5)}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -3\right)$

**b)** A(2, −1), B(4, −3) e C(−2, −5)

- Mediana $\overline{AM}$

  **M** é o ponto médio de $\overline{BC}$:

  $$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3-5}{2}\right) = (1, -4)$$

  $AM = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

- Mediana $\overline{BN}$

  **N** é o ponto médio de $\overline{AC}$:

  $$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{-1+(-5)}{2}\right) = (0, -3)$$

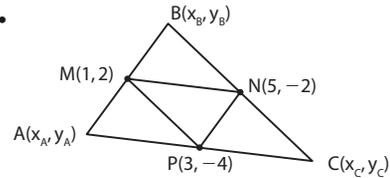
  $BN = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

- Mediana $\overline{CP}$

  **P** é o ponto médio de $\overline{AB}$:

  $$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = (3, -2)$$

  $CP = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

**36.**

Temos:

**M**: $\begin{cases} 1 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 2 & (1) \\ 2 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 4 & (2) \end{cases}$

**N**: $\begin{cases} 5 = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 10 & (3) \\ -2 = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = -4 & (4) \end{cases}$

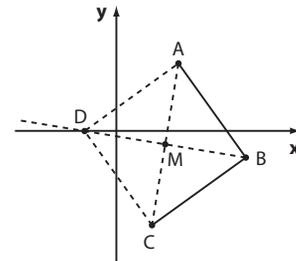
**P**: $\begin{cases} 3 = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = 6 & (5) \\ -4 = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = -8 & (6) \end{cases}$

(1) e (3) $\Rightarrow x_B = 2 - x_A = 10 - x_C \Rightarrow -x_A + x_C = 8$

Em (5) $\begin{cases} x_A + x_C = 6 \\ -x_A + x_C = 8 \end{cases} \Rightarrow x_C = 7,\ x_A = -1 \text{ e } x_B = 3$

Analogamente, obtêm-se: $y_A = 0$, $y_B = 4$ e $y_C = -8$.

Assim, A(−1, 0), B(3, 4) e C(7, −8).

**37.** **a)** A(2, 3), B(5, −1) e C(1, −4).

**M** é o ponto médio de $\overline{AC}$:

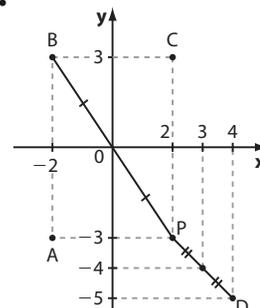
$$M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3-4}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Sendo **D** o quarto vértice, **M** é também ponto médio de $\overline{BD}$:

$$\frac{3}{2} = \frac{5 + x_D}{2} \text{ e } -\frac{1}{2} = \frac{-1 + y_D}{2}$$

Assim, $x_D = -2$, $y_D = 0$ e D(−2, 0).

**b)** $d_{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$

**38.**

**a)** A(−2, −3)
**b)** B(−2, 3)
**c)** C(2, 3)
**d)** D(4, −5)

Note que

$$\frac{x_P + x_D}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ e}$$

$$\frac{y_P + y_D}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

**39. a)** $OA = 6$;

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$8^2 = 6^2 + OB^2 \Rightarrow OB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$; $B(0, 2\sqrt{7})$

**b)** O ponto médio **M** da hipotenusa é:

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2\sqrt{7}+0}{2}\right) = (3, \sqrt{7}).$$

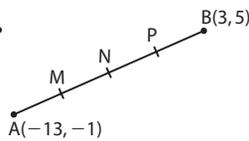
A distância de **M** à origem é:

$$\sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16} = 4$$

Observe que a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

**c)** $G\left(\frac{0+6+0}{3}, \frac{0+2\sqrt{7}+0}{3}\right) = \left(2, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$

$$OG = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{28}{9}\right)} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$$

**40.**

**N** é o ponto médio de $\overline{AB}$:

$$x_N = \frac{-13+3}{2} = -5$$

$$y_N = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$N(-5, 2)$

**M** é o ponto médio de $\overline{AN}$:

$$x_M = \frac{-13+(-5)}{2} = -9$$

$$y_M = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

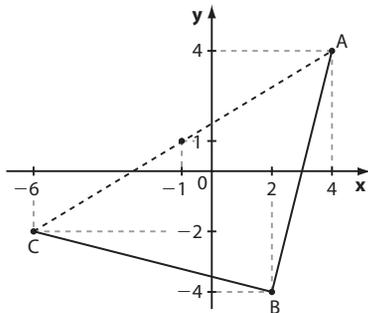
$M\left(-9, \frac{1}{2}\right)$

**P** é o ponto médio de $\overline{BN}$:

$$x_P = \frac{-5+3}{2} = -1$$

$$y_P = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$P\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

**41.**

- $d_{AB} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

  $d_{BC} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$
- **A**, **B** e **C** são vértices consecutivos do losango. $\overline{AC}$ é diagonal.

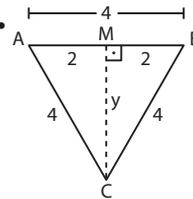
Seja $D(x_D, y_D)$ o quarto vértice, temos:

$$\begin{cases} \frac{x_D + x_B}{2} = -1 \Rightarrow \frac{x_D + 2}{2} = -1 \Rightarrow x_D = -4 \\ \frac{y_D + y_B}{2} = 1 \Rightarrow \frac{y_D - 4}{2} = 1 \Rightarrow y_D = 6 \end{cases}$$

$D(-4, 6)$

A diagonal $\overline{AC}$ mede: $\sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$;

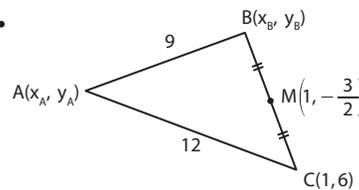
a diagonal $\overline{BD}$ mede: $\sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136}$. Observe que o losango é um quadrado. A área é $\frac{\sqrt{136} \cdot \sqrt{136}}{2} = 68$ u.a.

**42.**

**a)** $4^2 = 2^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

Como **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $M(2, 0)$. Daí, $C(2, -2\sqrt{3})$.

**b)** $A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot CM}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$ cm²

**43.**

Temos:

$$\frac{x_B + x_C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x_B + 1}{2} = 1 \Rightarrow x_B = 1$$

$$\frac{y_B + y_C}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{y_B + 6}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_B = -9$$

$B(1, -9)$

$d_{AB} = 9 \Rightarrow \sqrt{(x_A - 1)^2 + (y_A + 9)^2} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_A - 1)^2 + (y_A + 9)^2 = 81$ (1)

$d_{AC} = 12 \Rightarrow \sqrt{(x_A - 1)^2 + (y_A - 6)^2} = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_A - 1)^2 + (y_A - 6)^2 = 144$ (2)

Subtraindo (2) de (1), obtemos:

$(y_A + 9)^2 - (y_A - 6)^2 = -63 \Rightarrow 18y_A + 81 + 12y_A - 36 =$

$= -63 \Rightarrow 30y_A = -108 \Rightarrow y_A = -\frac{108}{30} = -\frac{18}{5}$

Substituindo em (1), obtemos:

$(x_A - 1)^2 + \left(-\frac{18}{5} + 9\right)^2 = 81 \Rightarrow (x_A - 1)^2 = 81 - \frac{729}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_A - 1)^2 = \frac{1296}{25} \Rightarrow (x_A - 1) = \pm\frac{36}{5} \xRightarrow{x_A < 0}$

$\xRightarrow{x_A < 0} x_A = 1 - \frac{36}{5} = -\frac{31}{5}$

$A\left(-\frac{31}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

**44. a)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -\frac{7}{3} & 1 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} + 3 + \frac{7}{3} + \frac{21}{3} - \frac{2}{3} - 7 = 0$; os pontos estão alinhados.

**b)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 - 16 = -16 \neq 0$; os pontos não estão alinhados.

**c)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 35 - 3 + 14 - 1 + 15 = -8 \neq 0$; os pontos não estão alinhados.

**d)** $\begin{vmatrix} 6 & 12 & 1 \\ -5 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -16 - 20 - 24 + 60 = 0$; os pontos estão alinhados.

**e)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$; os pontos estão alinhados.

**f)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0$; os pontos não estão alinhados.

**45.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 2m + 6 - m = 0 \Rightarrow$

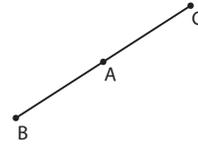
$\Rightarrow -3m + 12 = 0 \Rightarrow m = 4$

**46.** Seja R(x, y) um ponto qualquer alinhado com **P** e **Q**:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 + 5x - y + 3x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$.
Basta escolher, arbitrariamente, um valor de **x** (ou de **y**):
$x = 0 \Rightarrow y = -1$; o ponto é $(0, -1)$.
$x = 1 \Rightarrow y = 1$; o ponto é $(1, 1)$.
$x = -1 \Rightarrow y = -3$; o ponto é $(-1, -3)$.
$x = 2 \Rightarrow y = 3$, o ponto é $(2, 3)$ etc.

**47.** Sim. Para verificar analiticamente, tome três pontos quaisquer entre os 4 fornecidos e verifique que D = 0. Em seguida, tome o "4º ponto" e mais dois usados no cálculo do determinante anterior. Verifique, para esses três novos pontos, que D = 0.

**48.** $d_{AB} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
$d_{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$d_{BC} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
$d_{BC} = d_{AB} + d_{AC}$
Logo, A, B e C estão alinhados.

**49.** Os pontos não podem estar alinhados. Assim, $D \neq 0$:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & \frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 6 - 15 + 2k - 15 - k + 12 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \neq 12$

**50. a)** Devemos ter $\begin{vmatrix} 4 & -15 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 - 15x_p - 4y_p - 5x_p - 4y_p - 60 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -20x_p - 8y_p = 40 \Rightarrow 5x_p + 2y_p = -10$

**b)** O ponto procurado pertence à reta $\overline{AB}$ e possui ordenada nula: $5x_p + 0 = -10 \Rightarrow x_p = -2$, e o ponto é $(-2, 0)$.

**51.** Como $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cat. oposto a } \alpha}{\text{cat. adjacente a } \alpha}$, escrevemos:

$\frac{2}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 4$; a ordenada de **P** é 4.

**a)** $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$; **O**, **P** e **Q** não estão alinhados.

**b)** $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 900 & 600 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\,600 - 3\,600 = 0$; **O**, **P** e **Q** estão alinhados.

**52.** $\begin{cases} A(2, 1) \\ B(4, 5) \\ P(x, y) \text{ é ponto de } \overline{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 2y + 6 = 0$
ou, ainda, $-2x + y + 3 = 0$ (1).

$\begin{cases} C(5, 3) \\ D(3, 4) \\ P(x, y) \text{ é ponto de } \overline{CD} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - 2y + 11 = 0$ (2)

O ponto comum aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pela solução do sistema formado por (1) e (2):

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ -x - 2y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{17}{5} \text{ e } y = \frac{19}{5}; \left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right)$$

**53.** $M(0, y_M)$, N(3, 1) e P(4, 2) estão alinhados:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_M & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y_M + 6 - 4 - 3y_M = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_M = -2$

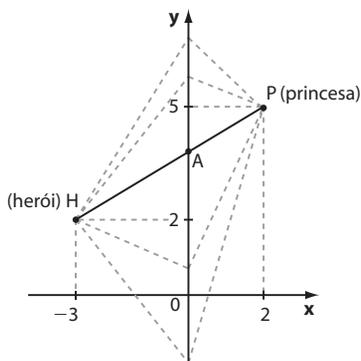
M(0, −2); a ordenada de **M** é −2.

**54. a)** A(0, 0), B(α, 0), C(α, β) e D(0, β).

**b)** Basta, por exemplo, determinar o ponto médio de $\overline{AC}$, a saber: $\left(\frac{0 + \alpha}{2}, \frac{0 + \beta}{2}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

**c)** **A**, **C** e **P** estão alinhados se $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha y - \beta x = 0$

**55.**

Seja A(0, y) o ponto procurado sobre o rio. Há infinitos caminhos que unem **H** a **P**. O de menor tempo de viagem corresponde ao caso em que **H**, **P** e **A** estão alinhados, isto é:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -15 + 2y + 3y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = \frac{19}{5}$

O ponto é $\left(0, \frac{19}{5}\right)$.

### Desafio

**a)** Como a escala é de 1 : 2 000, cada centímetro no plano representa 2 000 cm, ou seja, 20 m de medida real. Assim, se a distância real é de 100 m, no plano ela deve ser representada por um segmento de medida (100 ÷ 20) cm = 5 cm.
Como G(0, y), temos:
$FG = 5 \Rightarrow \sqrt{4^2 + y^2} = 5 \overset{y > 0}{\Longrightarrow} y = 3$; G(0, 3)

**b)** $d_{FP} = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2} =$
$= 5 \cdot 1{,}4 = 7 \Rightarrow d_{FP} = 7$ cm; a distância real é de
$7 \cdot (20\text{ m}) = 140$ m.
$d_{GP} = \sqrt{[0 - (-3)]^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{13} \simeq 3{,}6 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{GP} = 3{,}6$ cm; a distância real é de $3{,}6 \cdot (20\text{ m}) =$
$= 72$ m.

**c)** Observe que, no plano cartesiano dado, a avenida 3 é representada pela bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Assim, um ponto qualquer da avenida 3 tem coordenadas A(a, a).
Devemos ter: $d_{AF} = d_{AG} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(a - 4)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (a - 3)^2} \Rightarrow -8a + 16 =$
$= -6a + 9 \Rightarrow 7 = 2a \Rightarrow a = \frac{7}{2}$; o ponto procurado é $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

# CAPÍTULO 2 A reta

### Exercícios

**1. a)** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 2y - 4 = 0$ ou $x - 2y + 4 = 0$

**b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5 + 2x - 2y - 5x + y + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x - y - 1 = 0$ ou $3x + y + 1 = 0$

**c)** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 - 2x - \frac{1}{2}y - 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ ou $10x - y + 8 = 0$

**d)** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 3y + 9 + 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 3y + 9 = 0$ ou $x - 3y - 9 = 0$

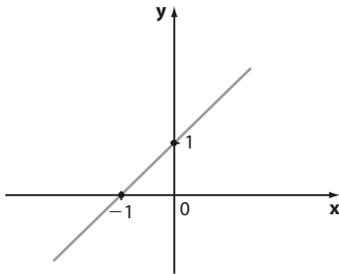
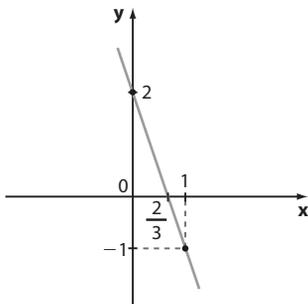
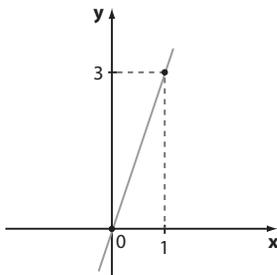
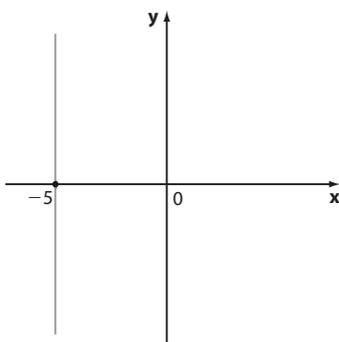
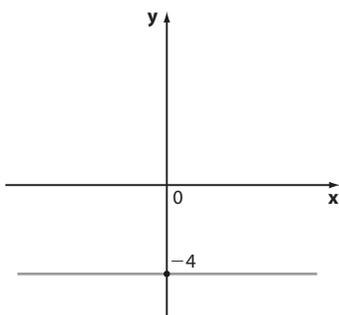
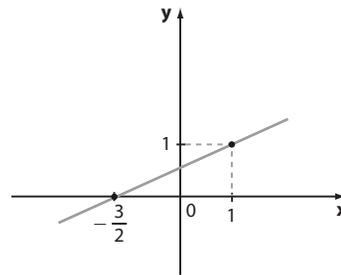
**2.** **A**: $6 \cdot (-2) - 5 \cdot (-5) - 13 = -12 + 25 - 13 = 0$
**A** pertence à reta.
**B**: $6 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 - 13 = -6 - 20 - 13 \neq 0$
**B** não pertence à reta.
**C**: $6 \cdot 2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 13 = 12 + 1 - 13 = 0$
**C** pertence à reta.

**D**: $6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 13 = 18 - 18 = 0$

**D** pertence à reta.

**E**: $6 \cdot (-1) - 5 \cdot \dfrac{19}{5} - 13 = -6 - 19 - 13 \neq 0$

**E** não pertence à reta.

**3.** a)

b)

c)

d)

e)

f)

**4.** a) A reta **t** correspondente à lei $y = -x + 5$ passa pelos pontos (4, 1), (5, 0), (1, 4), (0, 5), ...

b) A reta **s** correspondente à lei $y = -\dfrac{3}{2}x - 3$ passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(-4, 3)$ e $(0, -3)$.

c) A reta **r** correspondente à lei $y = \dfrac{x - 1}{2}$ passa pelos pontos (1, 0), $(-3, -2)$, $(-1, -1)$, ...

d) A reta **u** correspondente à lei $y = \dfrac{3x}{4} - 3$ passa pelos pontos (4, 0) e $(0, -3)$.

**5.** Seja **M** o ponto médio de $\overline{BC}$:

$$M\left(\frac{-3 + 0}{2}, \frac{-1 + 2}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - x - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{2}x - 2y - \dfrac{3}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}y - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 7y + 1 = 0$

b) $3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$; **s** não passa pela origem.

$3 \cdot (-7) + 7 \cdot 3 + 1 = 1 \neq 0$; **s** não passa por $(-7, 3)$.

**6.** A abscissa é constante. $\therefore x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$

**7.** A ordenada é constante. $\therefore y = 5 \Leftrightarrow y - 5 = 0$

**8.** a) $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 0$ e $a = 5$; $y = 5x$

b) $f(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$

$f(0,2) = 5 \cdot 0,2 = 1$

$f(-2) + f(0,2) = -9$

c) De $y = 5x$ segue a equação geral $5x - y = 0$.

**9.**
- **r** é horizontal e passa por $(-1, 4) \Rightarrow$ r: $y - 4 = 0$.
- **s** é vertical e passa por $(-1, 4) \Rightarrow$ s: $x + 1 = 0$.
- **t** passa por (0, 0) e $(-1, 4) \Rightarrow$ t: $4x + y = 0$.

**10.** a)

| Tempo **x** | Altura **y** |
|---|---|
| 0 | 8 |
| 2 | 4,8 |

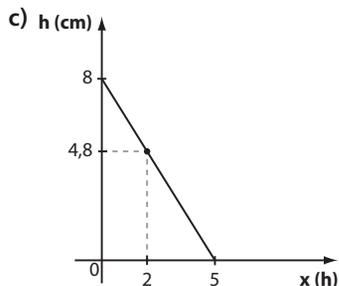
$y = ax + b$

$\begin{cases} 8 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2a = -3{,}2 \Rightarrow a = -1{,}6 \\ 4{,}8 = a \cdot 2 + b \end{cases}$

$h = -1{,}6x + 8$

**b)** $h = 0 \Rightarrow 1{,}6x = 8 \Rightarrow x = 5$ (5 horas)

Assim, a vela foi inteiramente consumida às 22 h.

**c)**

**d)** De $y = -1{,}6x + 8$, temos: $1{,}6x + y - 8 = 0$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

**11.**
- A reta **s** correspondente a **f** passa por (5, 3) e (0, −1) ⇒

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 5 + x - 5y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 5y - 5 = 0$

- **s** intersecta o eixo **x** em um ponto de abscissa:

$4 \cdot x - 5 \cdot 0 - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

- O ponto $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e o ponto (0, 4) pertencem a **r**, que corresponde à função **g**:

$\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5 - 4x - \frac{5y}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{16}{5}x + 4$ ou $g(x) = -\frac{16}{5}x + 4$

**12.**
- **A** e **C** pertencem ao eixo **x**; $\overline{AC}$: $y = 0$
- $\overline{AB}$: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - 3x = 0$ ou $3x - y = 0$
- $\overline{BC}$: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4y - y - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$

**13.**
- Um ponto **P** da reta $x - y + 1 = 0$ é da forma $(x, x + 1)$.
- A distância de **P**$(x, x + 1)$ ao ponto (0, 2) é $\sqrt{13}$:

$\sqrt{13} = \sqrt{x^2 + (x + 1 - 2)^2} \Rightarrow 13 = x^2 + (x - 1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 3$ e os pontos são $(-2, -1)$ ou $(3, 4)$.

**14. a)** $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$ ⊖

$-4y + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$ e $x = -\frac{3}{2}$; $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$.

**b)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$ ⊕

$4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

**c)** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ⊖

$-3y = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

**15. a)** $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3$ e $y = 2$; $P(-3, 2)$

**b)** $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

**16. a)** O sistema $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ tem solução única. Logo, **r** e **s** são retas concorrentes.

**b)** O sistema $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ -2x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções.

Observe que a 1ª equação multiplicada por −2 é igual à 2ª equação. Logo, **r** e **s** são retas coincidentes.

**c)** O sistema $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ -x + \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$ não tem solução, pois as equações são incompatíveis:

$2 \cdot$ (2ª equação) $= -2x + y = -2$.

Logo, **r** e **s** são retas paralelas distintas.

**d)** Não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça simultaneamente as equações do sistema $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$.

Logo, **r** e **s** são retas paralelas distintas (retas verticais).

**17.** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ satisfaz a equação $2x - y - k = 0$:

$2 \cdot \frac{1}{2} - 0 - k = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$

Verifique que $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ também satisfaz $2x + y - 1 = 0$.

**18.** $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, -1)$ é solução.

$(1, -1)$ também satisfaz a equação $4x - y - 5 = 0$:
$4 \cdot 1 + 1 - 5 = 5 - 5 = 0$. Logo, $(1, -1)$ também pertence à outra reta.

**19.** O sistema formado pelas equações $\begin{cases} px - y + 3p = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}$ deve possuir infinitas soluções, isto é, deve ser possível e indeterminado.

Os coeficientes de suas equações devem ser ordenadamente iguais (ou proporcionais):

Temos: $p = 2$ e $3p = 6 \Rightarrow p = 2$

**20.** Vamos inicialmente determinar as equações das retas correspondentes às funções **f** e **g**:

**a)** f: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 + x + y - 4x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x - 2y + 11 = 0$ (1) $\Rightarrow f(x) = \dfrac{-3x + 11}{2}$

g: $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -30 - x + 4y + 5x + 4 - 6y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y - 13 = 0 \Rightarrow y = 2x - 13$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 2x - 13$

**b)** $f(2) = \dfrac{-3 \cdot 2 + 11}{2} = \dfrac{5}{2}$

$g(1) = 2 \cdot 1 - 13 = -11$

a soma é $-\dfrac{17}{2}$

**c)** Substituindo (2) em (1):

$-3x - 2(2x - 13) + 11 = 0 \Rightarrow -3x - 4x + 26 + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7x + 37 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{37}{7}$

$y = 2 \cdot \dfrac{37}{7} - 13 = \dfrac{74}{7} - 13 = -\dfrac{17}{7} \Rightarrow P\left(\dfrac{37}{7}, -\dfrac{17}{7}\right)$

**d)**
- Abscissa de **R**: $f(x) = \dfrac{-3x + 11}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 0 = \dfrac{-3x + 11}{2} \Rightarrow x = \dfrac{11}{3}$
- Abscissa de **Q**: $g(x) = 2x - 13 \Rightarrow 0 = 2x - 13 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = \dfrac{13}{2}$
- A base $\overline{QR}$ do triângulo mede $\dfrac{13}{2} - \dfrac{11}{3} = \dfrac{17}{6}$ e a altura relativa a essa base mede $\dfrac{17}{7}$ (oposto da ordenada de **P**).

  Daí, $A = \dfrac{\dfrac{17}{6} \cdot \dfrac{17}{7}}{2} \Rightarrow A = \dfrac{289}{84}$ u.a.

**21. a)** Se $x = 0$, obtemos em uma das equações $y = 400\,000$ e, na outra equação, obtemos $y = 240\,000$. O gráfico mostra que na empresa II o valor fixo (para $x = 0$) cobrado é mais alto.

Assim, a reta de equação $6000x - y + 240\,000 = 0$ corresponde ao custo na empresa I e a reta de equação $5\,000x - y + 400\,000 = 0$ corresponde ao custo na empresa II.

**b)** Empresa I: $y = 6\,000x + 240\,000$; R$ 240 000,00

Empresa II: $y = 5\,000x + 400\,000$; R$ 400 000,00

**c)** Pelo item anterior: empresa I: R$ 6 000,00;

empresa II: R$ 5 000,00

**d)** Empresa I: $x = 100 \Rightarrow y = 6\,000 \cdot 100 + 240\,000 =$
$= 840\,000$ (840 000 reais)

Empresa II: $x = 100 \Rightarrow y = 5\,000 \cdot 100 + 400\,000 =$
$= 900\,000$ (900 000 reais).

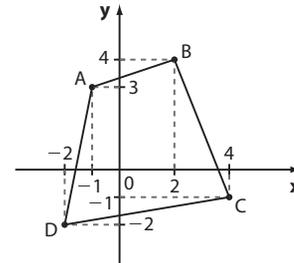
**e)** $6\,000x + 240\,000 = 5\,000x + 400\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\,000x = 160\,000 \Rightarrow x = 160$ (160 quilômetros)

**22.** $r \cap s$: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

$r \cap t$: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow (2, 1)$

$s \cap t$: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

**23.** $(p + 1) - 3 \cdot (p - 1) - 2 = 0 \Rightarrow -2p + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p = 1$; o ponto de interseção é (2, 0).

**24.**

Equação de $\overleftrightarrow{AC}$:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 5y - 11 = 0$ (1)

Equação de $\overleftrightarrow{BD}$:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 4y + 4 = 0$ (2)

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$:

$\begin{cases} 4x + 5y - 11 = 0 \\ 6x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{12}{23}$ e $y = \dfrac{41}{23}$

O ponto é: $\left(\dfrac{12}{23}, \dfrac{41}{23}\right)$

**25. a)** $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 2)$

$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1, 0)$

$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 2)$

$AB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$

$AC = \sqrt{(1 + 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$BC = \sqrt{(1 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Como $BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 = AB^2 + AC^2$, o triângulo ABC é retângulo e isósceles.

**b)** A área do triângulo é metade do produto das medidas dos catetos: $\dfrac{2 \cdot 2}{2}$ u.a. = 2 u.a. e o perímetro é $\left(4 + 2\sqrt{2}\right)$ u.c. $= 2\left(2 + \sqrt{2}\right)$ u.c.

**26.** $A(x_A, 0)$, $B(0, y_B)$

- As coordenadas de **A** satisfazem a equação $x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x_A + 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow x_A = 3$; A(3, 0)
- As coordenadas de **B** satisfazem a equação $x - y = 0 \Rightarrow 0 - y_B = 0 \Rightarrow y_B = 0$; B(0, 0)

O vértice **C** é dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 1)$$

$d_{AB} = 3$; $d_{AC} = \sqrt{5}$ e $d_{BC} = \sqrt{2}$

O perímetro é $3 + \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

**27. a)** A reta **r** passa por (3, 1) e (0, −2) ⇒

$\Rightarrow m_r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2 - 1}{0 - 3} = 1$

Daí, $tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

**b)** A reta **r** passa por (0, 0) e (1, 2) ⇒

$\Rightarrow m_r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2 - 0}{1 - 0} = 2$

Daí, $tg\,\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = arctg\ 2$

**c)** A reta **r** é horizontal $\Rightarrow m_r = 0 \Rightarrow \theta = 0°$

**28. a)** **r** passa por $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ e (0, 5) $\Rightarrow y = mx + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = m \cdot \dfrac{5}{2} + 5 \Rightarrow m = -2 \therefore$ r: $y = -2x + 5$

Se $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Assim, **s** passa por (0, 0) e (2, 1); seu coeficiente angular é $m = \dfrac{1 - 0}{2 - 0} = \dfrac{1}{2}$

**b)** Como **s** passa por (0, 0), temos $n_s = 0 \Rightarrow$ s: $y = \dfrac{1}{2}x$ (reduzida) ou s: $x - 2y = 0$ (geral).

**29. a)** $\begin{cases} m_t = tg\ 60° = \sqrt{3} \\ n_t = -3 \end{cases} \Rightarrow y = x \cdot \sqrt{3} - 3$

**b)** $\begin{cases} m_s = tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3} \\ n_s = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x\sqrt{3} + 2$

**c)** $\left\{ m_r = tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + n; \right.$

como $(1, 1) \in r$, temos: $1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}$

**d)** $m_u = tg\ 135° = -tg\ 45° = -1$; u: $y = -x + n$;
como $(-2, 3) \in u$, temos: $3 = -(-2) + n \Rightarrow n = 1$
e assim: u: $y = -x + 1$.

**30. a)** $m = \dfrac{5 - 2}{2 - 1} = 3 \Rightarrow y = 3x + n$. Usando (1, 2), temos:

$2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1 \Rightarrow y = 3x - 1$

**b)** $m = \dfrac{1 - 2}{-2 + 1} = \dfrac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow y = x + n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3 \Rightarrow y = x + 3$

**c)** $m = \dfrac{4 - 3}{-1 - 0} = -1 \Rightarrow y = -x + n \Rightarrow 3 = 0 + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow y = -x + 3$

**d)** $m = \dfrac{-3 + 2}{2 + 3} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{5}x + n$

$-2 = -\dfrac{1}{5} \cdot (-3) + n \Rightarrow -2 = \dfrac{3}{5} + n \Rightarrow n = -\dfrac{13}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{13}{5}$

**31. a)** $2y = x + 6 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 3 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

**b)** $m = -\dfrac{1}{3}$

**c)** $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 - 0}{-5 + 3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

**d)** Como a reta **r** é vertical (sua equação é x = 1), não se define o seu coeficiente angular.

**e)** $m = \dfrac{5 - 5}{3 + 2} = 0$

**f)** Ponto médio de $\overline{GH}$: $\left(\dfrac{-1 + 3}{2}, \dfrac{1 + 5}{2}\right) = (1, 3)$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0 - 3}{0 - 1} = 3$

**32. a)** Considerando o ângulo de inclinação de **r**, temos:

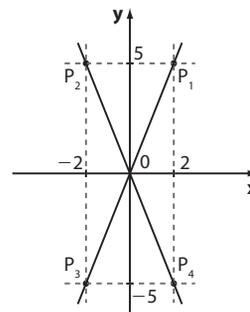
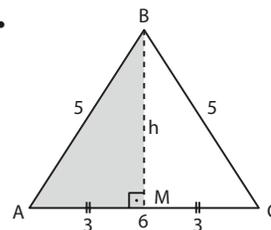
$tg\,\theta = \dfrac{4,5}{5} = \dfrac{9}{10} = \dfrac{18}{20} = 0,9$. Assim, $m_r = 0,9$

**b)** Como **r** passa pela origem, temos $n_r = 0$.
Assim, a equação reduzida de **r** é $y = 0,9x$ e a lei da função pedida é: $m = 0,9 \cdot V$

**c)** A densidade (**d**) do óleo é: $\dfrac{m}{V} = 0,9\ g/cm^3$

**33.** Pela figura, podemos observar que existem 4 pontos ($\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$) que satisfazem as condições dadas, sendo que os pontos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_3}$ pertencem à reta $y = \dfrac{5x}{2}$, e $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_4}$ pertencem à reta $y = -\dfrac{5x}{2}$.

**34.**

B, 5, 5, h, A, M, C, 3, 6, 3

$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4$

**a)** **B**: $x_B = 3$, $y_B = 4$ $\Rightarrow B(3, 4)$

**A**: (0, 0)

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

**b)** C(6, 0), B(3, 4) $\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{4-0}{3-6} = -\dfrac{4}{3} \\ y - 0 = -\dfrac{4}{3} \cdot (x - 6) \Rightarrow y = -\dfrac{4x}{3} + 8 \end{cases}$

**c)** A reta $\overline{BM}$ é vertical, sua equação é $x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$.

**35.** Observe que os ângulos dos triângulos medem 60°; o coeficiente angular da reta $\overline{BC}$ é $m = tg\ 60° = \sqrt{3}$; o coeficiente angular da reta $\overline{AB}$ é $m = tg\ 120° = -\sqrt{3}$.

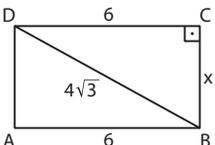
$\overline{BC}$:

$\begin{cases} m = \sqrt{3} \\ C(3, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3} \cdot (x - 3) \Rightarrow y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$\overline{AB}$:

$\begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ A(0, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x\sqrt{3}$

$\overline{AC}$ coincide com o eixo $x \Rightarrow y = 0$

**36. a)**

$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 48 = x^2 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

Assim, temos:

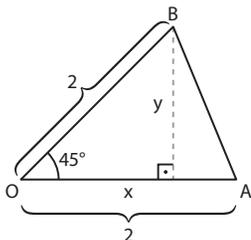
$B(7, 1)$; $C(7, 1 + 2\sqrt{3})$; $D(1, 1 + 2\sqrt{3})$; $A(1, 1)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 + 2\sqrt{3} - 1}{7 - 1} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**b)** $m = \dfrac{1 + 2\sqrt{3} - 1}{1 - 7} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Usando **B**: $y - 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \left(1 + \dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)$

**37. a)** Os triângulos AOB, BOC, COD, ..., HOA são triângulos isósceles congruentes, e o ângulo central (ângulo com vértice em **O** de cada um desses triângulos) mede: $360° \div 8 = 45°$

$sen\ 45° = \dfrac{y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{2} = x$

Daí: $A(2, 0)$; $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $C(0, 2)$; $D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $E(-2, 0)$; $F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $G(0, -2)$ e $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

**b)** O coeficiente angular de $\overline{BF}$ é $m = tg\ 45° = 1$; como $\overline{BF}$ passa pela origem **O**, sua equação é $y = x$ ou $x - y = 0$ (observe que **B** possui coordenadas iguais, o mesmo ocorrendo com **F**).

**c)** $m = tg\ 135° = -1$ ($\overline{DH}$ é a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes)

**d)** $\begin{cases} A(2, 0) \\ H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{-\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2} - 2} =$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} + 2} =$

$= \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 2^2} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} =$

$= 1 + \sqrt{2}$

**38.** Se (x, y) é um ponto qualquer dessa reta, temos:

$$m = \frac{y - 1}{x + 2} \xrightarrow{m = \frac{1}{3}} y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x + 2) \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$$

**39. a)** $m = tg\ 45° = 1$

$y + 1 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = x - 4$

**b)** $m = tg\ 135° = -1$

$y + 2 = -1 \cdot (x + 3) \Rightarrow y = -x - 5$

**c)** $m = tg\ 60° = \sqrt{3}$

$y - 3 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x\sqrt{3} + 3$

**d)** $m = tg\ 0 = 0$

$y + \dfrac{1}{3} = 0 \cdot \left(x - \dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}$ ou $y + \dfrac{1}{3} = 0$

**40.** $y - 2 = m \cdot (x - 3)$; $m \in \mathbb{R}$ ou $x - 3 = 0$

**41.** Equação geral do feixe: $y - 3 = m \cdot (x + 1)$; $m \in \mathbb{R}$ ou $x + 1 = 0$

**a)** $-1 - 3 = m \cdot (2 + 1) \Rightarrow -4 = 3m \Rightarrow m = -\dfrac{4}{3}$

$y - 3 = -\dfrac{4}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 9 = -4x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0$

**b)** $m = -2 \Rightarrow y - 3 = -2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y - 3 = -2x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

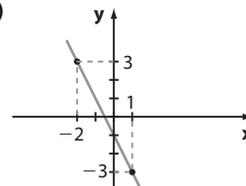
**c)** $0 - 3 = m \cdot (0 + 1) \Rightarrow -3 = m$

$y - 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -3x \Rightarrow 3x + y = 0$

**d)** $m = tg\ 60° = \sqrt{3}$

$y - 3 = \sqrt{3} \cdot (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + 3 + \sqrt{3} = 0$

**42. a)**

**b)** $f(-2) = 3 \Rightarrow x = -2,\ y = 3$

$f(1) = -3 \Rightarrow x = 1,\ y = -3$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-(-3)}{-2-1} = \dfrac{6}{-3} = -2$

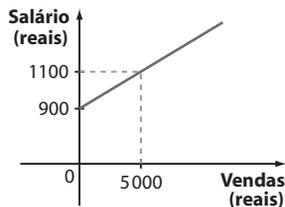
$y = -2x + n$

$3 = -2 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = -1$

**c)** $y = -2x - 1$

$0 = -2x - 1$

$x = -\dfrac{1}{2}$ é a raiz de **f**.

**43.** $y = 0{,}04 \cdot x + 900 \Leftrightarrow 0{,}04x - y + 900 = 0;\ x \geqslant 0$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 900 |
| 5 000 | 1 100 |

**44.** f(2) é obtido para $x = 2 \Rightarrow y = -3 \cdot 2 + 7 = 1$

f(−1) é obtido para $x = -1 \Rightarrow y = -3 \cdot (-1) + 7 = 10$

**45.** A equação reduzida da reta dada é:

$y = mx + n$, com: $\begin{cases} n = 5 \\ m = \text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = -3 \end{cases}$

$y = -3x + 5$

$\therefore f(x) = -3x + 5$

**46.** Plano alfa: $y = 3{,}20 \cdot x$ (1)

Plano beta: $y = 1{,}40 \cdot x + d$ (2)

**y**: preço (em reais)

**x**: número de quilômetros rodados

**a)** Em (1): $y = 272 \Rightarrow 272 = 3{,}2 \cdot x \Rightarrow x = 85$

Em (2): $272 = 1{,}4 \cdot 85 + d \Rightarrow d = 272 - 119 = 153$

**b)** $x = 85$

**c)** Em (1): $3{,}2x - y = 0$; (*)

Em (2): $1{,}4x - y + 153 = 0$; (*) com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

**d)** Reta vermelha: 1,4

Reta azul: 3,2

**47. a)** $2y = 8x + 1 \Rightarrow y = 4x + \dfrac{1}{2}$ e $y = 4x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ paralelas distintas

**b)** $y = 5x + 6$ e $y = -6x + 5 \Rightarrow$ concorrentes

**c)** $y = -\dfrac{3x}{2} + 2$ e $\left(4y = -6x + 8 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + 2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ paralelas coincidentes ou simplesmente coincidentes

**d)** $8y = -6x - 4 \Rightarrow y = -\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ paralelas distintas

**48.** s: $\begin{cases} (0, 0) \in s \\ m_s = m_r = -3 \end{cases}$

$y = -3x + n;\ 0 = -3 \cdot 0 + n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 0$ e a equação é $y = -3x$.

**49.** $3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$;

$m = -\dfrac{3}{2}$

$kx - 3y + 2 = 0 \Rightarrow kx + 2 = 3y \Rightarrow y = \dfrac{k}{3} \cdot x + \dfrac{2}{3};\ m = \dfrac{k}{3}$

**a)** $-\dfrac{3}{2} = \dfrac{k}{3} \Rightarrow k = -\dfrac{9}{2}$

**b)** $k \neq -\dfrac{9}{2}$

**c)** Como os coeficientes lineares das retas são distintos $\left(\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}\right)$, elas não poderão ser coincidentes, ou seja, não existe $k \in \mathbb{R}$.

**50. a)** $\begin{cases} m = 3 \\ P(0, 1) \end{cases} \Rightarrow y - 1 = 3 \cdot (x - 0) \Rightarrow 3x - y + 1 = 0$

**b)** $\begin{cases} m = -\dfrac{2}{5} \\ P(-1, 2) \end{cases} \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{2}{5} \cdot (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y - 10 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + 5y - 8 = 0$

**c)** $\begin{cases} m = -1 \\ P(-2, -2) \end{cases} \Rightarrow y + 2 = -1 \cdot (x + 2) \Rightarrow x + y + 4 = 0$

**d)** A reta **r** é horizontal; como a reta pedida deve passar por (2, 5) e ser paralela à **r**, ela deve ser uma reta horizontal passando por (2, 5), isto é, sua equação deve ser: $y - 5 = 0$.

**51. a)** $6x + ky + 4 = 0 \Rightarrow ky = -6x - 4 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{6}{k}$

$y = 2x - 1 \Rightarrow m_2 = 2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow -\dfrac{6}{k} = 2 \Rightarrow k = -3$

**b)** $\left.\begin{array}{l} y = 2x + k \Rightarrow m_1 = 2 \\ y = kx + 1 \Rightarrow m_2 = k \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2$

**52.** $b_{24} \Rightarrow y = -x;\ m = -1$

A reta pedida tem coeficiente angular igual a −1 e passa por (2, 5):

$y = -x + k \Rightarrow 5 = -2 + k \Rightarrow k = 7$

$y = -x + 7 \Rightarrow x + y - 7 = 0$

**53.** É preciso lembrar que o trapézio possui um par de lados paralelos:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{13}{5}}{-\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = \frac{9}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{3} = 3$$

$$m_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5}} = 3$$

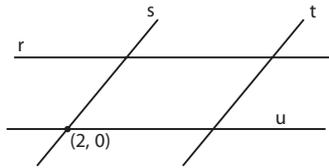
$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{13}{5} - 2}{-\frac{4}{5} - 1} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{BD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{5}}{-\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{33}{10}}{-\frac{9}{10}} = -\frac{11}{3}$$

Como $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, ABCD é trapézio; note que $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são concorrentes, o mesmo ocorrendo com $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ e com $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$.

**54.** Primeiramente, verifica-se se o ponto (2, 0) pertence a alguma das retas dadas e conclui-se que ele pertence à reta **s** $\left(\text{pois } 0 = \frac{2}{2} - 1\right)$ e não pertence a **r** e a **t**.

Verifica-se também que **s** e **t** são paralelas, pois $m_s = m_t = \frac{1}{2}$.

Desse modo, a formação do paralelogramo é a indicada na figura abaixo:

A equação da reta **u**, paralela a **r**, passando por (2, 0) é: $y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 2)$, ou seja, $3x + 2y - 6 = 0$.

Procurando a interseção de **r** e **s** acha-se $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$; já a interseção de **t** e **u** é (0, 3) e a de **r** e **t** é $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

**55. a)** $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$ e

$y_M = \frac{1 + 8}{2} = \frac{9}{2}$; $M\left(2, \frac{9}{2}\right)$

$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$ e

$y_N = \frac{3 + 8}{2} = \frac{11}{2}$; $N\left(4, \frac{11}{2}\right)$

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{11}{2} - \frac{9}{2}}{4 - 2} = \frac{1}{2}$
- $y = \frac{1}{2}x + k$; usando o ponto **M**, temos:

  $\frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 + k \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0$

**b)** $d_{MN} = \sqrt{(4-2)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Observe que:

$$\begin{cases} d_{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2 \cdot d_{MN} \\ \text{o coeficiente angular de } \overline{AB} \text{ é: } \frac{3 - 1}{5 - 1} = \frac{1}{2} \\ \text{Assim, } \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{MN}. \end{cases}$$

$\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC.

**56.** $5x - 3y = 15 \Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$

Se $x = 0 \Rightarrow y = -5$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 3$

Daí, A(3, 0) e B(0, −5).

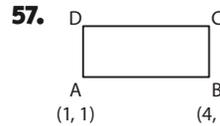
$AB = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

Pelo teorema da base média do triângulo, temos que $CD = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Como $OC = \frac{3}{2}$ e $OD = \frac{5}{2}$, o perímetro do triângulo COD é: $\frac{\sqrt{34}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8 + \sqrt{34}}{2}$

**57.**

D C

A (1, 1) B (4, 5)

- $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 1} = \frac{4}{3}$

  $\overleftrightarrow{AB}$: $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$
- $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow m_{CD} = \frac{4}{3}$
- Equação de $\overleftrightarrow{CD}$: $y = \frac{4}{3}x + n$

  $4x - 3y + 3n = 0 \Rightarrow 4x - 3y + p = 0$,

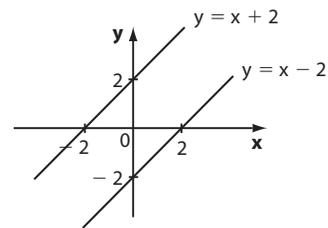
  com $p \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Observe que, se $p = -1$, $n = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ é a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

**58.** $|x - y| = 2 \Rightarrow x - y = 2$ (1) ou $x - y = -2$ (2)

(1) $\Rightarrow y = x - 2$

(2) $\Rightarrow y = x + 2$

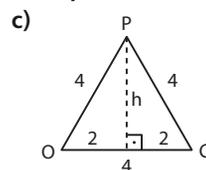
(1) e (2) representam um par de retas paralelas distintas. $(m_1 = m_2 = 1)$; $(n_1 = -2$ e $n_2 = 2)$

**59. a)** Lembremos que o hexágono regular é a reunião de 6 triângulos equiláteros congruentes. O centro do hexágono é o ponto **C**, pertencente ao eixo **x**, ponto médio de $\overline{OR}$: C(4, 0), pois OC = CR = 4.

O triângulo OCP é equilátero, e o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{OP}$ é $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$. Como $\overleftrightarrow{OP}$ passa pela origem, sua equação é $y - 0 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x\sqrt{3}$.

**b)** $\overleftrightarrow{RS}$ tem coeficiente angular igual a tg 60° = $\sqrt{3}$ (note que $\overleftrightarrow{OP} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{RS}$)

$$\begin{cases} m = \sqrt{3} \\ (8, 0) \in \overleftrightarrow{RS} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3} \cdot (x - 8) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = x\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$

**c)**

$4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$

A ordenada de **P** é $2\sqrt{3}$.
Como $\overline{PQ}$ é horizontal (m = tg 0° = 0), segue que $\overline{PQ}$: $y - 2\sqrt{3} = 0$.

**60.** $m_r = 2$; $m_s = \frac{1}{4}$; $m_t = -\frac{1}{2}$; $m_u = -2$

$$m_r \cdot m_t = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow r \perp t$$

**61. a)** $m_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{1}{3} \\ P(2, -3) \end{cases} \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

**b)** $5y = 2x - 11 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$; $m = \frac{2}{5}$

$$m' = -\frac{5}{2} \Rightarrow y + 3 = -\frac{5}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 2$$

**62.** r: $5y = -3x + 7$

$y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \Rightarrow m_r = -\frac{3}{5}$

s: $6y = mx + 1$

$y = \frac{m}{6}x + \frac{1}{6}$

$-\frac{3}{5} \cdot \frac{m}{6} = -1 \Rightarrow -3m = -30 \Rightarrow m = 10$

**63. a)** $\left.\begin{matrix} m_r = \frac{1}{3} \\ m_s = 3 \end{matrix}\right\}$ **r** e **s** concorrentes não perpendiculares

**b)** $\left.\begin{matrix} m_r = 2 \\ m_s = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$ $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

**c)** **r** e **s** são retas verticais e, portanto, paralelas distintas.

**d)** **r** é vertical e **s** é horizontal $\Rightarrow r \perp s$

**e)** $\left.\begin{matrix} m_r = \frac{2}{3}, \text{ pois r: } y = \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} \\ m_s = \frac{2}{3} \left(\text{s: } y = \frac{2x}{3}\right) \end{matrix}\right\}$ **r** e **s** são paralelas distintas

**64. a)** O ponto médio **M** de $\overline{AB}$ é: $\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = (1, 3)$.

O coeficiente angular de $\overline{AB}$ é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 5}{-2 - 4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$; assim, o coeficiente angular da reta mediatriz é $-\frac{3}{2}$:

$$y = -\frac{3}{2}x + n \overset{(M)}{\Rightarrow} 3 = -\frac{3}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$$

**b)** Resposta pessoal.
Por exemplo, se y = 0, temos: $3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$; P(3, 0) pertence à mediatriz

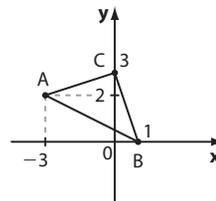
$d_{PA} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{26}$

$d_{PB} = \sqrt{(3 + 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{26}$

Logo, **P** equidista de **A** e **B**.

**65. a)** $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

$$G\left(\frac{-3 + 1 + 0}{3}, \frac{2 + 0 + 3}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

**b)**

Basta encontrar as equações das mediatrizes de dois de seus lados e determinar o ponto em que elas se intersectam.

- Ponto médio de $\overline{AB}$: (−1, 1)

  $m_{\overline{AB}} = \frac{0 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{2}$

  Mediatriz de $\overline{AB}$: $\begin{cases} m = 2 \\ (-1, 1) \end{cases}$

  $y - 1 = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 2x + 3$

- Ponto médio de $\overline{BC}$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

  $m_{\overline{BC}} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3$

  Mediatriz de $\overline{BC}$: $\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$

  $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Determinemos a interseção das duas mediatrizes:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1$$

O circuncentro é (−1, 1).

**66. a)** $m_r = \frac{2}{3}$; seja **s** a reta perpendicular a **r** por **P**:

$$\begin{cases} m_s = -\frac{3}{2} \\ (2, -4) \in s \end{cases} \Rightarrow y + 4 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow$$

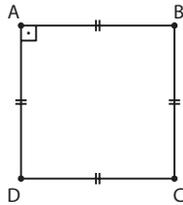
$$\Rightarrow 2y + 8 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 2y + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{18}{13} \text{ e } y = \frac{14}{13}$$

O ponto é $Q\left(-\frac{18}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

**b)** Devemos determinar **P'**, simétrico de **P** com relação a **Q**, isto é, **Q** é o ponto médio de $\overline{PP'}$:

$$\begin{cases} -\frac{18}{13} = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = -\frac{62}{13} \\ \frac{14}{13} = \frac{-4 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = \frac{80}{13} \end{cases} \Rightarrow P'\left(-\frac{62}{13}, \frac{80}{13}\right)$$

**67.**

- $m_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5-2}{3-1} = \dfrac{3}{2}$

  $\overline{AD}\begin{cases} m = -\dfrac{2}{3} \\ A(1, 2) \text{ é um ponto: } y - 2 = -\dfrac{2}{3}\cdot(x-1) \Rightarrow \end{cases}$

  $\Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$

- $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}} = -\dfrac{2}{3}$

  Como $B \in \overleftrightarrow{BC}$, temos:

  $y - 5 = -\dfrac{2}{3}\cdot(x-3) \Rightarrow y = -\dfrac{2x}{3} + 7$

**68.** $m_r = 2$; $m_s = m$

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 2\cdot m = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

$(-2, -1) \in s$:

$-1 = -\dfrac{1}{2}\cdot(-2) + n \Rightarrow -1 = 1 + n \Rightarrow n = -2$

**69.** $r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

$-\dfrac{k}{3}\cdot\left(\dfrac{k+1}{2}\right) = -1 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2$ ou $k = -3$

Assim, se $k \neq 2$ e $k \neq -3$, as retas não são perpendiculares.

**70. a)** É preciso mostrar que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$:

$m_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1-2}{4-2} = -\dfrac{3}{2}$

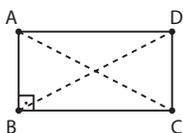
$m_{BC} = \dfrac{-5+1}{-2-4} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$

Veja que: $m_{AB}\cdot m_{BC} = -1$

Medida da hipotenusa:

$d_{AC} = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

**b)** Vamos mostrar que suas diagonais são congruentes:

$d_{AC} = \sqrt{65}$; $d_{BD} = \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{65}$

Note também que:

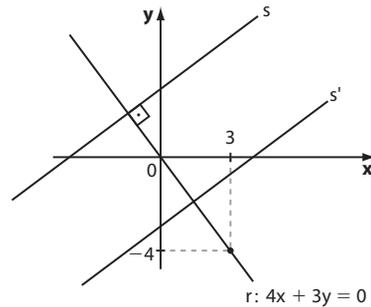
$m_{AD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$ e $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, pois $m_{CD} = -\dfrac{3}{2}$.

**71.** $m_{BC} = \dfrac{1-0}{2+4} = \dfrac{1}{6}$

A reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ tem coeficiente angular $-6$ e passa por $(0, -3)$:

$y + 3 = -6\cdot(x-0) \Rightarrow y = -6x - 3 \Rightarrow 6x + y + 3 = 0$

**72.** Como $m_r = -\dfrac{4}{3}$, o coeficiente angular da reta **s** perpendicular a **r** deve ser $m_s = \dfrac{3}{4}$.

$s\colon y = \dfrac{3}{4}x + n$

Determinemos a interseção de **s** com:

- Eixo **x**:

  $0 = \dfrac{3}{4}x + n \Rightarrow 3x + 4n = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{4n}{3}$

- Eixo **y**:

  $y = \dfrac{3}{4}\cdot 0 + n \Rightarrow y = n$

  A área do triângulo limitado por **s** e os eixos coordenados é: $\dfrac{|x|\cdot|y|}{2} = \dfrac{\frac{4n}{3}\cdot n}{2} = 6 \Rightarrow 4n^2 = 36 \Rightarrow n = \pm 3$

  Se $n = 3$, obtemos a reta **s**: $y = \dfrac{3}{4}x + 3$

  Se $n = -3$, obtemos a reta **s'**: $y = \dfrac{3}{4}x - 3$ (s' // s)

**73. a)** $d_{OP} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} \simeq 5{,}8 \Rightarrow d_{OP} \simeq 5{,}8$ m. A distância real é $(5{,}8 \text{ m})\cdot 20 = 116$ m

Verdadeira.

**b)** $m_{OP} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-0}{5-0} = \dfrac{3}{5}$

Seja **C** o ponto que representa o *cyber*.

Temos:

$\overleftrightarrow{CP}\begin{cases} m = -\dfrac{5}{3} \quad (\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{CP}) \\ P(5, 3) \end{cases}$

$y - 3 = -\dfrac{5}{3}\cdot(x-5) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{5x}{3} + \dfrac{34}{3}$

Como **C** tem ordenada nula, temos:

$0 = -\dfrac{5x}{3} + \dfrac{34}{3} \Rightarrow x = \dfrac{34}{5}$ e $C\left(\dfrac{34}{5}, 0\right)$

Verdadeira.

**c)** $d_{OP} = \sqrt{34} \simeq 5{,}8 \Rightarrow d_{OP} \simeq 5{,}8$ m; a distância real é 116 m.

$\begin{cases} 1\text{ h} \text{ — } 2\,000\text{ m} \\ x \text{ — } 116\text{ m} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}058 \text{ h} = 0{,}058\cdot 60 \text{ min} = 3{,}48$ min

Assim, ela chega depois das 18 h 03 min.

Falsa.

**d)** $\begin{cases} P(5, 3) \\ C\left(\dfrac{34}{5}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow d_{PC} = \sqrt{\left(5 - \dfrac{34}{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\dfrac{81}{25} + 9} =$

$= \sqrt{\dfrac{306}{25}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{5} \simeq \dfrac{3 \cdot 5{,}8}{5} \Rightarrow d_{PC} \simeq 3{,}48$ m;

a distância real entre **P** e **C** é $(3{,}48\text{ m}) \cdot 20 = 69{,}6$ m.

$OP = \sqrt{34} \simeq 5{,}8$; a distância real entre **O** e **P** é 116 m.

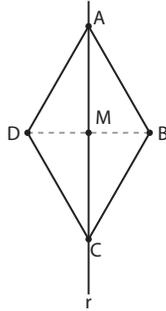
O perímetro do retângulo é $2 \cdot (69{,}6 \text{ m} + 116 \text{ m}) = 371{,}2$ m.

$\begin{cases} 1 \text{ h} — 5\,000 \text{ m} \\ x — 371{,}2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}07424 \text{ h} = 0{,}07424 \cdot 60 \text{ min} \simeq 4{,}45$ min

Falsa.

**74.** $A(0, y_A)$

$B(x_B, 0)$

- Como $\overline{AC} \subset r$, $A \in r \Rightarrow 7 \cdot 0 + y_A - 3 = 0 \Rightarrow y_A = 3$; A(0, 3).
- O ponto **M**, de interseção das diagonais, pertence à reta **r** $\Rightarrow 7x_M + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow 7x_M = \dfrac{7}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. **M** é ponto médio de $\overline{AC}$:

  $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{0 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1;$

  $\dfrac{3 + y_C}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_C = -4 \Rightarrow C(1, -4)$
- A diagonal $\overline{BD}$ é perpendicular a diagonal $\overline{AC}$; como $m_r = -7$, devemos ter $m_{BD} = \dfrac{1}{7}$
- Como $M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in \overline{BD}$, a equação $\overline{BD}$ é:

  $y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{7} \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \dfrac{x}{7} - \dfrac{4}{7}$

  Como $B(x_B, 0)$ pertence a BD, temos:

  $0 = \dfrac{x_B}{7} - \dfrac{4}{7} \Rightarrow x_B = 4 \Rightarrow B(4, 0)$
- Por fim, se **M** é ponto médio de $\overline{BD}$, temos:

  $\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{4 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -3 \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{0 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -1 \end{array}\right\} D(-3, -1)$

Assim, os vértices são: A(0, 3), B(4, 0), C(1, −4) e D(−3, −1).

**75. a)** $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} = 1$

**b)** $-3x + 2y - 6 = 0$

**76.**
- $x = 2t - 1 \Rightarrow \dfrac{x + 1}{2} = t$

  $y = 2 - 3 \cdot \left(\dfrac{x + 1}{2}\right) \Rightarrow 2y = 4 - 3(x + 1) \Rightarrow$

  $\Rightarrow r: 3x + 2y - 1 = 0$
- Reduzida: $2y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$
- Segmentária: interseção de **r** com o eixo **x**:

  $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

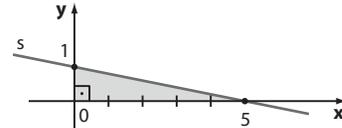
  interseção de **r** com o eixo **y**:

  $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

  $\dfrac{x}{\frac{1}{3}} + \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

**77.** **r** intersecta o eixo **r** em (4, 0) e o eixo **y** em (0, −8):

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-8} = 1$

**78.** **s** intersecta o eixo **x** em (5, 0) e o eixo **y** em (0, 1):

**a)** A medida da hipotenusa é $\sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ e o perímetro desse triângulo é $1 + 5 + \sqrt{26} = 6 + \sqrt{26}$.

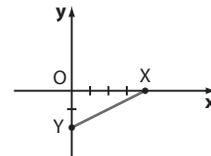
**b)** $A = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow A = \dfrac{5}{2}$ u.a.

**79.** Fazendo, por exemplo, $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$), temos:

$2t - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 3y = 2t + 6 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}t + 2$

Outro exemplo:

$\begin{cases} 3y = t \Rightarrow y = \dfrac{t}{3} \\ 2x - t + 6 = 0 \Rightarrow 2x = t - 6 \Rightarrow x = \dfrac{t}{2} - 3, \text{ com } t \in \mathbb{R} \end{cases}$

**80.** $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x - 2y = 4$ $(\div 4)$

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-2} = 1$

**r** intersecta o eixo **x** em X(4, 0)

**r** intersecta o eixo **y** em Y(0, −2)

O ponto médio de $\overline{XY}$ é: $\left(\dfrac{4 + 0}{2}, \dfrac{0 + (-2)}{2}\right) = (2, -1)$

**81. a)** r: $\begin{cases} x = t + 2 \Rightarrow t = x - 2 \\ y = x - 2 - 2 \Rightarrow y = x - 4 \end{cases}$ s: $y = 2x - 4$

$m_r = 1$; $m_s = 2$. Logo, **r** e **s** são concorrentes.

**b)** r: $4x + 3y = 12 \Rightarrow 3y = -4x + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}x + 4$; $m_r = -\dfrac{4}{3}$

s: $y = -\dfrac{4}{3}x + 1$

Logo, **r** e **s** são paralelas distintas.

**82.** s: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 - t \Rightarrow t = 3 - y \end{cases} \Rightarrow x = 2 \cdot (3 - y) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6 - 2y - 1 \Rightarrow 2y + x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$; $m_s = -\dfrac{1}{2}$

r: $\begin{cases} m_r = 2 \\ \textbf{r} \text{ passa por } (-2, -4) \end{cases} \Rightarrow y + 4 = 2 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = 2x$

**83.** r: $t = \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = -2 \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right) + 5 = \frac{-2x+2}{3} + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-2x+17}{3}$

s: $\begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 7 + u \Rightarrow u = y - 7 \end{cases}$

Então $x = 2(y-7) - 2 \Rightarrow y = \frac{x+16}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{-2x+17}{3} \\ y = \frac{x+16}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = 7$$

O ponto é $(-2, 7)$.

**84. a)** $d = \frac{|-1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

**b)** $d = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-17|}{5} = \frac{17}{5}$

**c)** $d = \frac{|-2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 29|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$

**d)** Como $3 \cdot 1 - (-1) - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$, $P \in r$ e $d_{P,r} = 0$

**85.** Equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$:

$m = \frac{-10 - (-1)}{4 - (-1)} = -\frac{9}{5}$;

$y + 1 = -\frac{9}{5} \cdot (x + 1) \Rightarrow 9x + 5y + 14 = 0$

A medida da altura é a distância de **B** à reta $\overleftrightarrow{AC}$:

$d = \frac{|9 \cdot 6 + 5 \cdot (-3) + 14|}{\sqrt{9^2 + 5^2}} = \frac{|53|}{\sqrt{106}} = \frac{53\sqrt{106}}{106} = \frac{\sqrt{106}}{2}$

**86.** Observe que as retas dadas são paralelas.

- Tomemos um ponto qualquer de $y = 3x - 1$, por exemplo, $x = 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$; $(1, 2)$.
- Calculemos a distância de $(1, 2)$ à reta $6x - 2y + 15 = 0$:

$d = \frac{|1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 15|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} = \frac{|17|}{\sqrt{40}} = \frac{17\sqrt{10}}{20}$

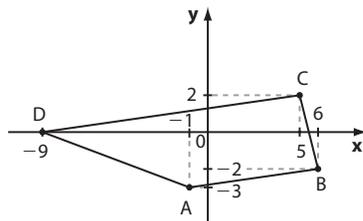
**87. a)** $d_{P,r} = \frac{|10 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$

$d_{Q,r} = \frac{|0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$

$d_{R,r} = \frac{|2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$

**P**, **Q** e **R** equidistam de **r**

**b)** $r \,//\, \overleftrightarrow{PQ}$ $\left(\text{observe que } m_r = -\frac{2}{5} \text{ e } m_{PQ} = -\frac{2}{5}\right)$

**88.**

- Observemos que

$m_{AB} = \frac{-2+3}{6+1} = \frac{1}{7}$; $m_{CD} = \frac{0-2}{-9-5} = \frac{-2}{-14} = \frac{1}{7} \Rightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

- A medida da altura do trapézio é igual à distância entre as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; ela pode ser obtida calculando-se a distância de **C** a $\overleftrightarrow{AB}$:
- Equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$: $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 7y + 20 = 0$

- $d_{C,\overleftrightarrow{AB}} = \frac{|-1 \cdot (5) + 7 \cdot (2) + 20|}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}} = \frac{29}{\sqrt{50}} = \frac{29\sqrt{50}}{50} = \frac{29\sqrt{2}}{10}$

**89.** Vamos encontrar a equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que passa por $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ e $(-5, 0)$:

$$\begin{cases} m = \frac{\frac{5}{2} - 0}{0 - (-5)} = \frac{1}{2} \\ y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x + 5) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

A medida do lado do quadrado pode ser obtida calculando-se a distância de **O** à reta $\overleftrightarrow{PQ}$:

$d = \frac{|0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Conclusão: perímetro $= 4\sqrt{5}$ u.c. e área $= 5$ u.a.

**90. a)** $d_{OV} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-1)^2} \Rightarrow d_{OV} = \sqrt{5}$ m

Distância real: $100 \cdot \sqrt{5}$ m $\simeq 223{,}6$ m

**b)** No sistema apresentado, a equação da reta **r** que representa a avenida é: $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow$ r: $6x + 8y - 48 = 0$.

A distância da origem a essa reta é:

$\frac{|0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 - 48|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-48|}{10} = 4{,}8$ m

Distância real: $(4{,}8 \text{ m}) \cdot 100 = 480$ m

**c)** Seja **A** o ponto da avenida mais próximo da casa de Vânia (**V**).

r: $6x + 8y - 48 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6x + 48}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + 6$; $m_r = -\frac{3}{4}$

$\overline{AV}$ é perpendicular a **r**: $m_{AV} = \frac{4}{3}$

Como $V(2, 1)$, a equação de $\overleftrightarrow{AV}$ é:

$y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{4x}{3} - \frac{5}{3} \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0$

Façamos a interseção de **r** e $\overleftrightarrow{AV}$:

$$\begin{cases} y = -\frac{3x}{4} + 6 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3x}{4} + 6 = \frac{4x}{3} - \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{92}{25};$$

daí $y = \frac{81}{25}$; o ponto procurado é $\left(\frac{92}{25}, \frac{81}{25}\right)$.

**d)** Basta calcularmos a distância entre $\left(\frac{92}{25}, \frac{81}{25}\right)$ e (2, 1):

$$\sqrt{\left(\frac{92}{25}-2\right)^2+\left(\frac{81}{25}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{42}{25}\right)^2+\left(\frac{56}{25}\right)^2} =$$

$= \frac{70}{25} = 2{,}8$; a distância real é (2,8 m) · 100 = 280 m.

**91.** A reta **s** procurada tem equação $x - y + k = 0$.

$$\frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |k| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Daí $k = 2$ ou $k = -2$, e as possíveis equações são:
$x - y + 2 = 0$ ou $x - y - 2 = 0$

**92.**
- Equação da reta "avenida Brasil":
  $\frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 5x + 12y - 60 = 0$ (1)
- A futura rua comercial tem equação
  $5x + 12y + k = 0$ (2)
- Tomemos um ponto de (1), por exemplo, (12, 0), e calculemos sua distância à reta em (2):
  $\frac{|5 \cdot 12 + 12 \cdot 0 + k|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \Rightarrow 6 = \frac{|k + 60|}{\sqrt{169}} \Rightarrow$
  $\Rightarrow |k + 60| = 78 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \begin{cases} k + 60 = 78 \Rightarrow k = 18 \overset{(2)}{\Rightarrow} 5x + 12y + 18 = 0 \\ \text{ou} \\ k + 60 = -78 \Rightarrow k = -138 \overset{(2)}{\Rightarrow} \end{cases}$
  $\Rightarrow 5x + 12y - 138 = 0$ (*)

  A reta obtida em (*) intersectaria o eixo **y** em um ponto de ordenada $\frac{138}{12} = 11{,}5$ (não convém pela posição indicada no mapa).

**93. a)** $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -22$; área $= \frac{1}{2} \cdot |-22| = 11$

**b)** $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 21$; área $= \frac{1}{2} \cdot |21| = \frac{21}{2}$

**c)** $D = \begin{vmatrix} -2 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{39}{4}$; área $= \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{39}{4}\right| = \frac{39}{8}$

**d)** $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 41$; área $= \frac{1}{2} \cdot |41| = \frac{41}{2}$

**94.** $D = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28$; $A_{\triangle ABD} = \frac{|-28|}{2} = 14$

$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 48$; $A_{\triangle BCD} = \frac{|48|}{2} = 24$

A área do quadrilátero é (14 + 24) u.a. = 38 u.a.

**95. a)** O ponto médio (**M**) da diagonal $\overline{AC}$ é $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) =$
$= \left(2, \frac{3}{2}\right)$; como **M** é ponto médio de $\overline{BD}$, temos:

$$\begin{cases} 2 = \frac{4 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 0 \\ \frac{3}{2} = \frac{3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0, 0)$$

Equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$: $y = mx + n$; $n = 0 \Rightarrow y = mx$; como (1, 2) pertence à reta, temos: $2 = m \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x$

**b)** $A_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot |D|$; $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\triangle ACD} = \frac{5}{2}$

$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$; $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{5}{2}$

Logo, a área do paralelogramo é $\left(2 \cdot \frac{5}{2}\right)$ u.a. = 5 u.a.

**96.** **r** intersecta o eixo **x** em (3, 0) ($y = 0 \Rightarrow x = 3$) e o eixo **y** em (0, 6) ($x = 0 \Rightarrow y = 6$).

$A = \frac{1}{2} \cdot |D|$, $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow A = 9$ u.a.

Poderíamos também ter feito: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 9$ u.a.

**97.**
- O ponto **R** tem abscissa $x = 4$.
  Como $R \in s$, temos: $4 \cdot 4 + 5y - 20 = 0 \Rightarrow 5y = 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = \frac{4}{5}$; $R\left(4, \frac{4}{5}\right)$
- r: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow -x + 2y - 2 = 0$
  O ponto **Q** tem abscissa $x = 4$ e pertence a **r**:
  $-4 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow Q(4, 3)$
- O ponto **P** é a interseção de **r** e **s**: $\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ 4x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = \frac{28}{13}$ e $x = \frac{30}{13}$; $P\left(\frac{30}{13}, \frac{28}{13}\right)$

  $D = \begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{5} & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ \frac{30}{13} & \frac{28}{13} & 1 \end{vmatrix} =$

  $= 12 + \frac{120}{65} + \cancel{\frac{112}{13}} - \frac{90}{13} - \cancel{\frac{112}{13}} - \frac{16}{5} = \frac{242}{65}$

  $A_{\triangle PQR} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{242}{65}\right) = \frac{121}{65} \Rightarrow A_{\triangle PQR} = \frac{121}{65}$ u.a.

**98.** A área do triângulo AOB é:

$$\frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{2 \cdot OB \cdot OB}{2} = (OB)^2$$

Daí, $(OB)^2 = 16 \Rightarrow OB = 4$ e $AO = 8$

Logo, temos: B(0, 4) e A(−8, 0)

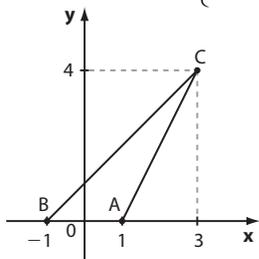
$$r: \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -8 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

r: $4x - 8y + 32 = 0$ ou, ainda, r: $x - 2y + 8 = 0$

**99.** $\overline{AC}: \begin{cases} m = 2 \\ A(1, 0) \end{cases} \Rightarrow y = 2x + n;$

usando o ponto **A**, temos: $0 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -2$

$\overline{AC}: y = 2x - 2$

$C = \overline{AC} \cap \overline{BC}; \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3$ e $y = 4$; C(3, 4)

$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 4}{2}$ u.a. $=$
$= 4$ u.a.

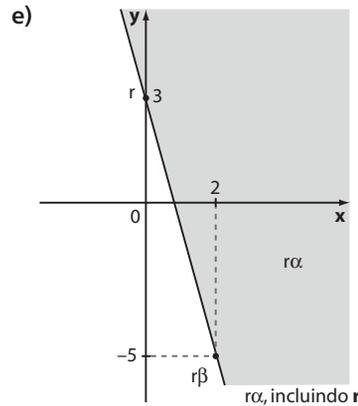
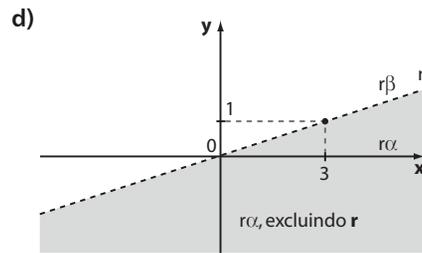
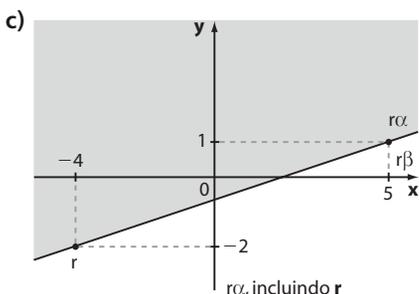
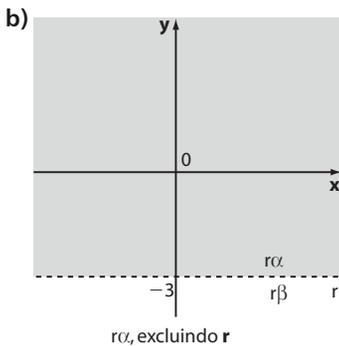
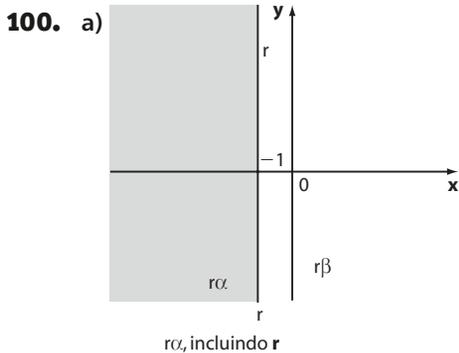
(ou calculamos o determinante)

**100.** a)

b)

c)

d)

e)

**101.** **a)** $y - 2 > 0$

**b)** $x \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 0$

**c)** A equação da reta dada é:

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0$

Origem: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12 < 0$

Inequação: $4x + 3y - 12 \leqslant 0$

**d)** A equação da reta dada é: $x - 3y + 2 = 0$

Origem: $0 + 0 + 2 > 0$

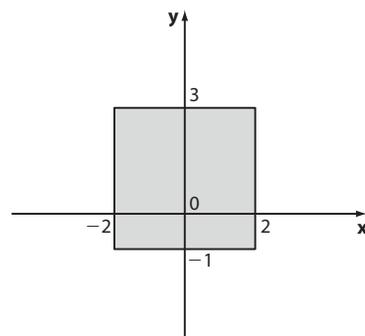
Inequação: $x - 3y + 2 < 0$

**e)** A equação da reta dada é: $y = 3x \Leftrightarrow 3x - y = 0$

Testaremos, por exemplo, o ponto (2, 0):

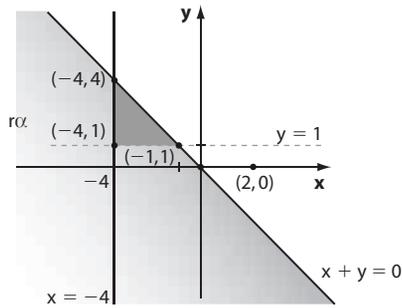
$3 \cdot 2 - 0 = 6 > 0$

Inequação: $3x - y \geqslant 0$

**102.** **a)**

**b)** $(4 \cdot 4)$ u.a. $= 16$ u.a.

**103.**
- $y - 1 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 1$ (1)
- $x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -4$ (2)

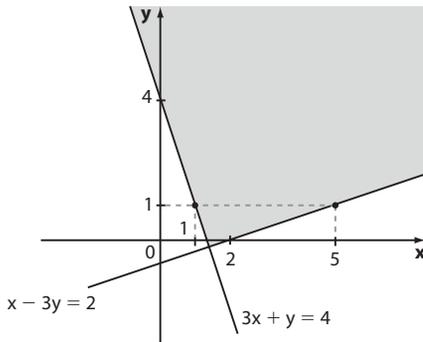
r: $x + y = 0$ (bissetriz $\mathbf{b}_{24}$)

Como a origem pertence à **r**, vamos testar outro ponto, por exemplo, (2, 0). O ponto (2, 0) verifica a inequação: $2 + 0 \geqslant 0$

Assim, o semiplano correspondente a $x + y \leq 0$ é o indicado na figura acima por rα.

A interseção de rα com as regiões determinadas por 1 e 2 é o triângulo da figura, cujos vértices são: (−4, 1), (−4, 4) e (−1, 1).

A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Seu perímetro, em u.c., é, portanto, $3\sqrt{2} + 3 + 3 = 6 + 3\sqrt{2} = 3(2 + \sqrt{2})$

**104.**

### Desafio

**a)** • $A_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |D_1|$; $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 15 + 3 + 10 - 9 = 19$

$A_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 19 = 9{,}5 \Rightarrow A_{\triangle BCD} = 9{,}5 \text{ km}^2$

• $A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot |D_2|$; $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -6 - 6 - 4 - 9 = -25$

$A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot |-25| = 12{,}5 \Rightarrow A_{\triangle ABD} = 12{,}5 \text{ km}^2$

A área da região que recebe o sinal é:

$9{,}5 \text{ km}^2 + 12{,}5 \text{ km}^2 = 22 \text{ km}^2$

**b)** A casa de Juca é representada pelo ponto $(x_0, y_0)$. Temos:

• $(x_0, y_0)$ pertence à mediatriz de $\overline{BC}$, pois ela equidista de **B** e **C**:

$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 0}{1 - 3} = -\frac{5}{2} \Rightarrow m_{\text{mediatriz}} = \frac{2}{5}$

Ponto médio de $\overline{BC}$: $\left(\frac{3 + 1}{2}, \frac{0 + 5}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$

Equação da mediatriz: $y - \frac{5}{2} = \frac{2}{5} \cdot (x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{10}$ (*)

• $(x_0, y_0)$ pertence à reta de equação $2x - y = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x_0 = y_0$; substituindo em (*), temos:

$2x_0 = \frac{2x_0}{5} + \frac{17}{10} \Rightarrow \frac{8x_0}{5} = \frac{17}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = \frac{17}{16}$ e $y_0 = \frac{17}{8}$

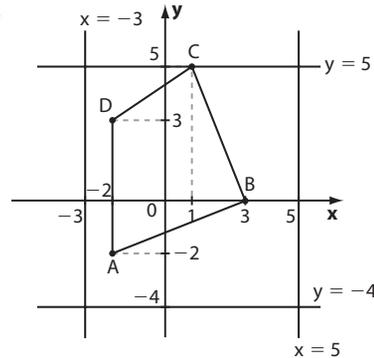
É fácil verificar, no plano cartesiano, que $\left(\frac{17}{16}, \frac{17}{8}\right)$ pertence à região que recebe o sinal.

A distância pedida é $\sqrt{\left(\frac{17}{16} - 0\right)^2 + \left(\frac{17}{8} - 0\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{289}{256} + \frac{289}{64}} = \sqrt{\frac{289 + 1\,156}{256}} = \sqrt{\frac{1\,445}{256}} =$

$= \frac{17\sqrt{5}}{16} \simeq 2{,}38$

A casa se encontra aproximadamente a 2,38 km da torre.

**c)**

• A área do município é $(8 \text{ km}) \cdot (9 \text{ km}) = 72 \text{ km}^2$

• A área de alcance de transmissão do sinal é $22 \text{ km}^2$

• A probabilidade pedida é $\frac{22}{72} = \frac{11}{36} \simeq 0{,}3055 = 30{,}55\%$.

CAPÍTULO 3

# A circunferência

### Exercícios

**1.** **a)** $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

**b)** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

**c)** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$

**d)** $x_c = \frac{2 + 6}{2} = 4$ e $y_c = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \Rightarrow C(4, 0)$

$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = r^2$, sendo $r = \frac{AB}{2} =$

$= \frac{\sqrt{(6 - 2)^2 + (2 + 2)^2}}{2} = 2\sqrt{2}$

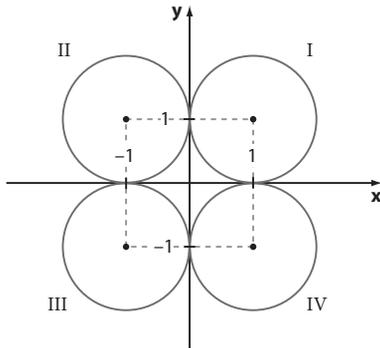
$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 8$

**2.** **a)** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

**b)** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

**c)** $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

**d)** $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 1^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$

**3.**

**a)** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (I)

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (II)

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ (III)

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ (IV)

**b)** O quadrilátero é um quadrado cujo lado mede 2 e a área é $2^2 = 4$ u.a.

**4.** **a)** $A(-3, 0)$ e $r = 3 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 9$

**b)** $C(0, 0)$ e $r = 3 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

**c)** $B(0, -4)$ e $C(2, -3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3 + 4)^2 + (2 - 0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Se **M** é o centro dessa circunferência, então:

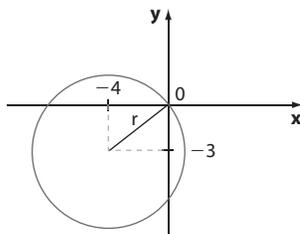
$$x_M = \frac{0 + 2}{2} = 1 \text{ e } y_M = \frac{-4 - 3}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow M\left(1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

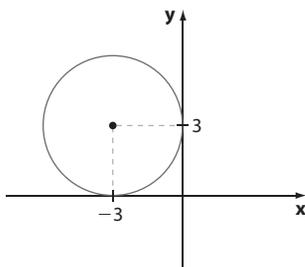
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

**d)** $D(3, 0)$ e $r = DE = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = 5$

$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 25$

**5.**

$r = \sqrt{(0 + 4)^2 + (0 + 3)^2} = 5$

$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

**6.**

**a)** $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

**b)** $(-2 + 3)^2 + (5 - 3)^2 = 1 + 4 \neq 9$ não passa.

**7.** $A(-2, -6)$, $B(2, 4)$

**a)** $\overline{AB}$ é diâmetro $\Rightarrow M_{\overline{AB}}$ é o centro da circunferência $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M\left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{-6 + 4}{2}\right) \Rightarrow M(0, -1)$$

Como $d_{AB} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (4 + 6)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$, temos $r = \sqrt{29}$.

Daí, a circunferência tem equação:

$x^2 + (y + 1)^2 = 29$

**b)** Qualquer circunferência que passa por **A** e **B** tem o centro $(x_C, y_C)$ sobre a mediatriz de $\overline{AB}$:

$d_{AC} = d_{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x_C + 2)^2 + (y_C + 6)^2} = \sqrt{(x_C - 2)^2 + (y_C - 4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_C^2 + y_C^2 + 4x_C + 12y_C + 40 =$

$= x_C^2 + y_C^2 - 4x_C - 8y_C + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_C + 5y_C + 5 = 0$

Fazendo, por exemplo, $x_C = 5$, temos $y_C = -3$, e $C(5, -3)$ é o centro de $\lambda$.

Como $d_{AC} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-3 + 6)^2} = \sqrt{58}$, temos $r = \sqrt{58}$ e $\lambda$: $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 58$.

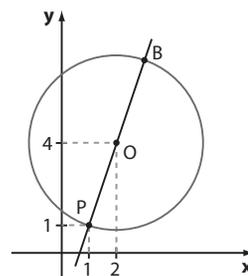
**8.** Substituindo-se as coordenadas do ponto na equação, obtemos $(2k - k)^2 + (0 - 4)^2 = 25 \Rightarrow k = 3$ ou $k = -3$.

**9.** De $3x + 2y - 5 = 0$, temos $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ e da equação $2x - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, temos $x = 1$.

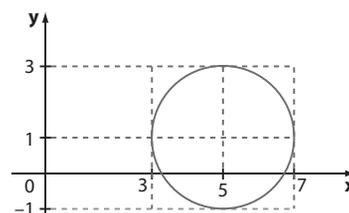
Na reta **r**, para $x = 1$, tem-se $y = 1$. O ponto $P(1, 1)$ pertence à circunferência.

Se $B(x_B, y_B)$ é o ponto procurado, o centro $O(2, 4)$ é ponto médio de $\overline{PB}$:

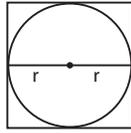
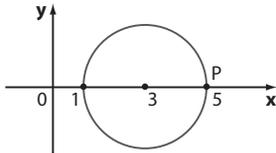
$$2 = \frac{x_B + 1}{2} \Rightarrow x_B = 3 \text{ e } 4 = \frac{y_B + 1}{2} \Rightarrow y_B = 7$$

O ponto é (3, 7).

**10.** O centro é (5, 1) e o raio é 2.

**a)** (5, 3) é o mais distante de Ox.

**b)** (7, 1) é o mais distante de Oy.

**11.** **a)** Se **P** é um ponto de $\lambda$, então $(a + 1 - 3)^2 + (a - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 0$ ou $a = 3$.

**b)** P(4, 2) e C(3, 0). O coeficiente angular da reta é $m = \dfrac{2 - 0}{4 - 3} = 2$.

**12.** A circunferência tem centro (a, b), seu raio mede 4, seu diâmetro mede 8, que é a medida do lado do quadrado.
A área é $8^2 = 64$ u.a.

**13.** É o ponto que se localiza na circunferência, sobre o diâmetro contido no eixo **x**. Como C(3, 0) e r = 2, sua abscissa fica 2 unidades à direita de **C**. É o ponto (5, 0).

**14.** Seja C(a, a) o centro da circunferência.
$\sqrt{(a-3)^2 + (a+1)^2} = \sqrt{(a-7)^2 + (a-3)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 + a^2 + 2a + 1 = a^2 - 14a + 49 + a^2 - 6a + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4a + 10 = -20a + 58 \Rightarrow 16a = 48 \Rightarrow a = 3;$
$C(3, 3);\ r = \sqrt{(3-7)^2 + (3-3)^2} = 4$
A equação é: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$

**15.** **a)** 1º modo:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0;$$

**A**, **B** e **C** não estão alinhados.
Seja $(x_C, y_C)$ o centro da circunferência que passa por **A**, **B** e **C** e **r** a medida do seu raio.
A equação reduzida é:
$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

$$\begin{cases} (-1 - x_C)^2 + (3 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 + 2x_C - 6y_C + 10 = r^2 \quad (1) \\ (3 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 6x_C + 2y_C + 10 = r^2 \quad (2) \\ (1 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 10y_C + 26 = r^2 \quad (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1): $x_C - y_C = 0$ (4)
Subtraindo (3) de (2): $-4 - x_C + 3y_C = 0$ (5)
De (4) e (5) temos: $x_C = y_C = 2$ e C (2, 2)
Substituindo-se as coordenadas de **C** em (1), tem-se $(-1 - 2)^2 + (3 - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 10$.
A equação é $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

2º modo:
O centro equidista de **A**, **B** e **C**. Assim, ele pertence à interseção das mediatrizes (o centro é o circuncentro do triângulo). Vamos determinar a interseção das mediatrizes **r** e **s** de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente:

$$\begin{cases} m_{AB} = \dfrac{-1 - 3}{3 + 1} = -1 \Rightarrow m_r = 1 \\ \text{ponto médio de } \overline{AB} = (1, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r\colon y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x$

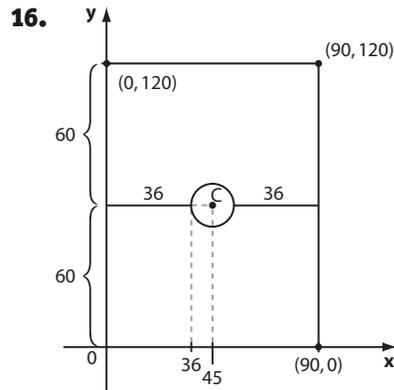
$$\begin{cases} m_{BC} = \dfrac{5 + 1}{1 - 3} = -3 \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{3} \\ \text{ponto médio de } \overline{BC} = (2, 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s\colon y - 2 = \dfrac{1}{3} \cdot (x - 2) \Rightarrow x - 3y + 4 = 0$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = x \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$, obtemos (2, 2).

O raio é a distância de (2, 2) a **A**, por exemplo:
$r = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10};\ r^2 = 10$
A equação pedida é $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$

**b)** $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; **A**, **B** e **C** estão alinhados e não há circunferência que passa por eles.

**16.**

Temos: $90 - 18 = 72$
$72 \div 2 = 36$
C(45, 60)

**a)** O(0, 0) e C(45, 60)
$m = \dfrac{60 - 0}{45 - 0} = \dfrac{4}{3}$
$y - 0 = \dfrac{4}{3} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$

**b)** C(45, 60) e r = 9
$(x - 45)^2 + (y - 60)^2 = 81$

**17.** **a)** $\dfrac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0;\ C = 0;\ x_C = 5;\ y_C = 1;$
$r = \sqrt{\dfrac{(-10)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}{4 \cdot 1}} = 3$
O centro é (5, 1) e r = 3.

**b)** $\dfrac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0;\ C = 0;\ x_C = -6;\ y_C = 6;$
$r = \sqrt{\dfrac{12^2 + (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 73}{4 \cdot 1}} = \sqrt{-1}$
Como $r^2 < 0$, não se verifica a quinta condição e não é equação de circunferência.

**c)** $\dfrac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0;\ C = 0;\ x_C = -1;\ y_C = -3$ e
$r = \sqrt{\dfrac{2^2 + 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1}} = \sqrt{10}$. O centro é (−1, −3).

**d)** $\frac{B}{A} = \frac{2}{1} \Rightarrow A \neq B$ e não é equação de circunferência.

**e)** $\frac{B}{A} = 3 \Rightarrow A \neq B$ e não é equação de circunferência.

**f)** $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$; $C = 0$; $x_C = -2$; $y_C = 2$;
$r = \sqrt{\frac{4^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17)}{4 \cdot 1}} = 5$
O centro é $(-2, 2)$.

**g)** $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$; $C = 0$; $x_C = 10$; $y_C = 0$ e $r = \sqrt{\frac{(-20)^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 99}{4 \cdot 1^2}} = 1$. O centro é $(10, 0)$.

**h)** A equação equivale a $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = -3$, que não representa a equação de circunferência.

**18. a)** $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(0, 3)$ e $r = 3$

**b)** $x_C = -\frac{2}{2} = -1$; $y_C = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow C(-1, -2)$
$r = \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}{4 \cdot 1}} = \sqrt{6}$

**c)** $x_C = -\frac{-4}{2} = 2$; $y_C = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow C(2, -3)$
$r = \sqrt{\frac{(-4)^2 + 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1}} = 3$

**d)** 1º modo:
$x_C = -\frac{16}{2 \cdot 2} = -4$; $y_C = -\frac{-32}{2 \cdot 2} = 8 \Rightarrow C(-4, 8)$
$r = \sqrt{\frac{16^2 + (-32)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 134}{4 \cdot 2^2}} = \sqrt{13}$

2º modo:
$2x^2 + 2y^2 + 16x - 32y + 134 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 16y + 67 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 16y + 64 = -67 + 16 + 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 13$; $C(-4, 8)$ e $r = \sqrt{13}$

**19. a)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -\frac{9}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -\frac{9}{2} + 1 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$

**b)** $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

**c)** $x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 9y + \frac{81}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{4} + \frac{81}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = 25$

**d)** $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + \frac{19}{4} = 0$

**20. a)** O raio é a distância do ponto $(0, 0)$ ao centro $(-1, -4)$, que é $r = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
A equação é: $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$

**b)** O raio é o mesmo do item anterior: $\sqrt{17}$. A equação é: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 17 = 0$

**21.** Como $x_C = \frac{2}{2} = 1$ e $y_C = \frac{4}{2} = 2$, o centro é $(1, 2)$.
A distância é $\sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$.

**22.** 1º modo:
$x^2 + y^2 - 2x + 10y - k + 28 = 0$
Analisando as condições:
1ª) $A = B = 1$
2ª) $C = 0$
3ª) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-2)^2 + 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k + 28) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 104 - 112 + 4k > 0 \Rightarrow k > 2$, com $k \in \mathbb{R}$
2º modo:
Completando quadrados, temos:
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 10y + 25 = 1 + 25 + k - 28 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = k - 2$
Como o 2º membro da igualdade representa o quadrado da medida do raio, isto é, $r^2 = k - 2$, devemos ter:
$k - 2 > 0 \Rightarrow k > 2$

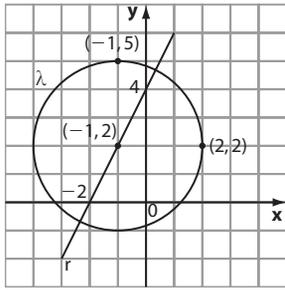
**23.** $A = B = 1$; $C = 0$;
$D^2 + E^2 - 4 \cdot A \cdot F = 6^2 + 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0 \Rightarrow k < 58$
O maior valor inteiro de **k** é 57.

**24.** O centro da primeira é $(-2, 1)$; o da segunda, como $x_C = \frac{1}{2}$ e $y_C = \frac{1}{2}$, é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. O coeficiente angular da reta é $\frac{1 - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}$ e a equação é $y - 1 = -\frac{1}{5}(x + 2)$ ou $x + 5y - 3 = 0$.

**25.** O centro da primeira é $(3, 0)$; o da segunda, como $x_C = -1$ e $y_C = 3$, é $(-1, 3)$. A distância é $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

**26.** O centro da primeira é $x_C = -\frac{p}{2}$ e $y_C = 3 \Rightarrow \left(-\frac{p}{2}, 3\right)$.
O da segunda é $x_C = -2$ e $y_C = \frac{p + 2}{2} \Rightarrow \left(-2, \frac{p + 2}{2}\right)$.
Se as circunferências são concêntricas, temos:
$\begin{cases} -\frac{p}{2} = -2 \\ \frac{p + 2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow 4$; o centro é $(-2, 3)$.

**27. a)** $C(x_C, y_C)$ é o centro de $\lambda$; $2x_C - y_C + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_C = 2x_C + 4$; $C(x_C, 2x_C + 4)$. Sejam $A(2, 2)$ e $B(-1, 5)$:
$\Rightarrow d_{CA} = d_{CB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x_C - 2)^2 + (2x_C + 4 - 2)^2} =$
$= \sqrt{(x_C + 1)^2 + (2x_C + 4 - 5)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_C - 2)^2 + (2x_C + 2)^2 = (x_C + 1)^2 + (2x_C - 1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_C = -1 \Rightarrow y_C = 2$; $C(-1, 2)$
$d_{CA} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{9} = 3$
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

**b)**

**28. a)** Vamos obter a equação reduzida da circunferência:

$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + \blacksquare + y^2 + 4y + \square + 11 = 0 + \blacksquare + \square \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 16 + 4 - 11 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

Fazendo $y = -2$:

$(x - 4)^2 = 3^2 \Rightarrow x - 4 = \pm 3 \Rightarrow x = 1$ (não convém) ou $x = 7$

$(7 - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow y = -2$,

e o ponto de maior abscissa é $(7, -2)$.

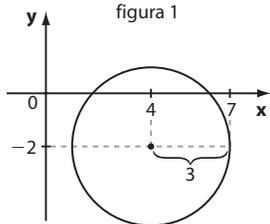
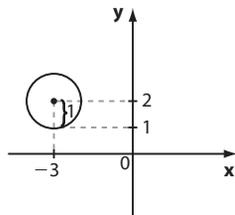
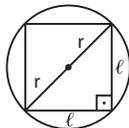



figura 1

**b)** $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + 12 - 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

O centro é $(-3, 2)$ e o raio é 1. Fazendo-se $y = 1$, tem-se $x = -3 \Rightarrow$ o ponto é $(-3, 1)$.

figura 2

**29.**

A diagonal do quadrado coincide com o diâmetro da circunferência, ou seja, 2r.

Como $r = \sqrt{32}$, a diagonal é $2\sqrt{32}$.

De $d^2 = \ell^2 + \ell^2$, tem-se $\ell = 8$ e o perímetro é de 32 u.c.

**30. a)** Como a escala é de 1 : 20 000, temos:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm sistema} — 20\,000 \text{ cm reais} \\ x \quad — \underbrace{800\,000 \text{ cm}}_{= 8 \text{ km}} \text{ reais} \end{cases} \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$$

Assim, o raio da circunferência medirá 40 cm e sua equação é $x^2 + y^2 = 1\,600$

**b)** A área pedida é $\pi \cdot (40 \text{ cm})^2 = 1\,600\pi \text{ cm}^2$

**31.** $A(-2, 2)$: $(-2 + 2)^2 + (2 + 1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **A** pertence a $\lambda$.

$B(-5, 1)$: $(-5 + 2)^2 + (1 + 1)^2 - 9 = 4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **B** é externo a $\lambda$.

$D(-1, 2)$: $(-1 + 2)^2 + (2 + 1)^2 - 9 > 0 \Rightarrow$ **D** é externo a $\lambda$.

$E(0, 1)$: $(0 + 2)^2 + (1 + 1)^2 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow$ **E** é interno a $\lambda$.

$F(-5, -1)$: $(-5 + 2)^2 + (-1 + 1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **F** pertence a $\lambda$.

**32.** $A(-1, 2)$: $(-1)^2 + 2^2 - 6 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = 27 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **A** é externo a $\lambda$.

$B(3, 6)$: $3^2 + 6^2 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 75 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **B** é externo a $\lambda$.

$O(0, 0)$: $0^2 + 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0 \Rightarrow O \in \lambda$.

$D(-1, -4)$: $(-1)^2 + (-4)^2 - 6 \cdot (-1) + 8 \cdot (-4) =$

$= -9 < 0 \Rightarrow$ **D** é interno a $\lambda$.

$E(3, 0)$: $3^2 + 0^2 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = -9 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **E** é interno a $\lambda$.

**33.** Se $(3, -3)$ pertence à circunferência, então:

$3^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) + k = 0 \Rightarrow k = -24$

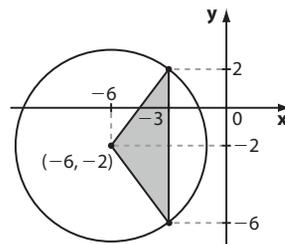
**34.** Se a circunferência contém o ponto, então

**a)** $(-3)^2 + k^2 + 12 \cdot (-3) + 4k + 15 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2$ ou $k = -6$

**b)** $\lambda$: $x^2 + 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = -15 + 36 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Os vértices do triângulo são: $(-6, -2)$, $\underbrace{(-3, 2) \text{ e } (-3, -6)}_{\text{item } a}$.

A área do triângulo é $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2}$ u.a. $= 12$ u.a.

**35.** Substituindo-se as coordenadas do ponto no 1º membro da equação da circunferência e efetuando as operações, devemos ter um número real negativo. Então:

$(-3)^2 + p^2 + 2(-3) - 6p + 5 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 - 6p + 8 < 0 \Rightarrow 2 < p < 4$

**36.** Se **p** não é interno, ou é externo ou pertence à circunferência. Logo, $(-1)^2 + p^2 - 7(-1) + 2p - 11 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 + 2p - 3 \geqslant 0 \Rightarrow p \leqslant -3$ ou $p \geqslant 1$.

**37.** Se (m, 0) é externo à circunferência, então

$m^2 + 0^2 - 4m + 5 \cdot 0 - 5 > 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m < -1$ ou $m > 5$.

**38.** $PP' = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$

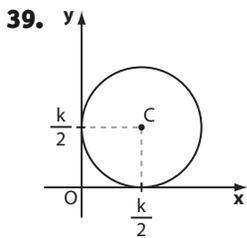
$\Rightarrow 2r = 2\sqrt{10} \Rightarrow r = \sqrt{10}$

O ponto médio de $\overline{PP'}$ é o centro **C** de $\lambda$:

$\left(\dfrac{-1 + (-3)}{2}, \dfrac{4 + (-2)}{2}\right) = C(-2, 1)$

$\lambda: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

$d_{CQ} = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (1 - 4)^2} = 3 < \underbrace{\sqrt{10}}_{r} \Rightarrow$ **Q** é interno a $\lambda$.

**39.**

**a)** O centro **C** é $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2}\right)$ e o raio mede $\dfrac{k}{2}$.

$\left(x - \dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{k}{2}\right)^2 = \dfrac{k^2}{4}$

**b)** $d_{OC} = \sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{k^2}{4} + \dfrac{k^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{k^2}{2}} =$

$= \dfrac{k}{\sqrt{2}} > \dfrac{k}{2} \Rightarrow$ **O** é externo a $\lambda$.

**c)** Seja P(k, k).

$d_{PC} = \sqrt{\left(k - \dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(k - \dfrac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{k}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{k^2}{2}} = \dfrac{k}{\sqrt{2}} > \dfrac{k}{2} \Rightarrow$ **P** é externo a $\lambda$.

**d)** Seja $Q\left(0, \dfrac{k}{2}\right)$.

$d_{QC} = \sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{k}{2} - \dfrac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{k^2}{4}} = \dfrac{k}{2}$, pois $k > 0$.

Assim, **Q** pertence a $\lambda$.

**40.** Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tem-se que $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência de centro na origem e raio unitário.

**a)** É o conjunto dos pontos da circunferência reunido com os pontos interiores a ela.

**b)** É o conjunto dos pontos interiores à circunferência.

**c)** É o conjunto dos pontos da circunferência reunido com os pontos exteriores a ela.

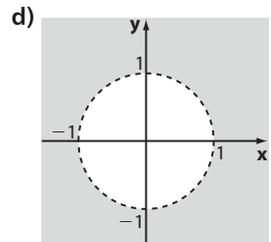
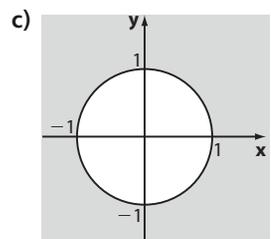
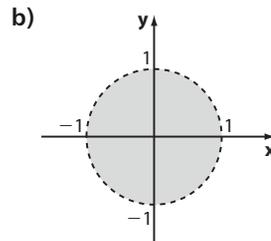
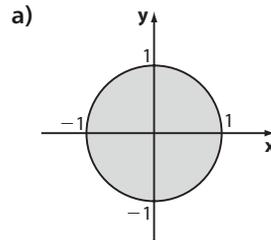
**d)** É o conjunto dos pontos exteriores à circunferência.

Graficamente, tem-se:

**a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**41. a)** $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 4$, e $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência de centro $(-2, 1)$ e raio de medida 2.

**b)** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 4$, $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio de medida 2.

**c)** $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 4$, $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência de centro $(-1, 2)$ e raio de medida 2.

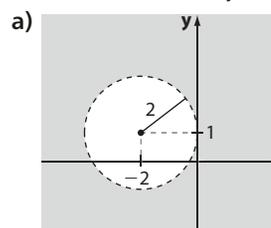
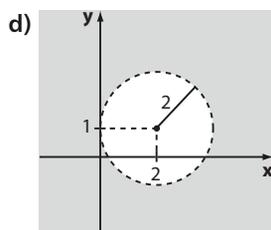
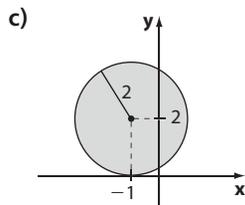
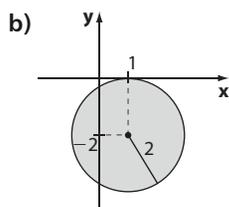
**d)** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 4$, $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência de centro $(2, 1)$ e raio de medida 2.

Graficamente, os conjuntos soluções são:

**a)**

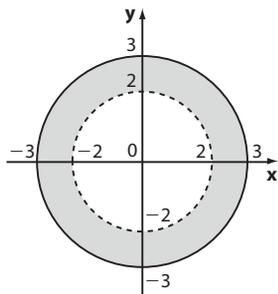
**b)**

**c)**

**d)**

**42. a)** $x^2 + y^2 - 4 > 0$ é o conjunto dos pontos exteriores à circunferência de centro (0, 0) e raio de medida 2.

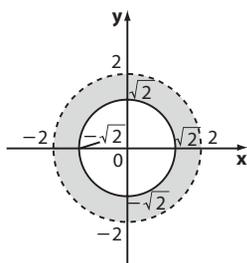
$x^2 + y^2 - 9 \leqslant 0$ é o conjunto dos pontos interiores e pertencentes à circunferência de centro (0, 0) e raio de medida 3.

Os pontos que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$

pertencem à coroa circular destacada na figura.

**b)** $x^2 + y^2 - 2 \geqslant 0$ é o conjunto dos pontos exteriores e pertencentes à circunferência de centro (0, 0) e raio $\sqrt{2}$.

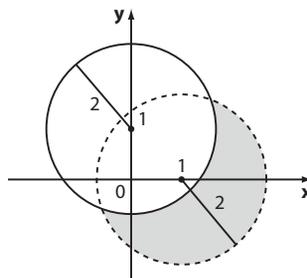
$x^2 + y^2 - 4 < 0$ é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro (0, 0) e raio de medida 2.

Os pontos que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 2 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

pertencem à coroa circular destacada na figura.

**43.** $(x - 1)^2 + y^2 - 4 < 0$ é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro (1, 0) e raio de medida 2.

$x^2 + (y - 1)^2 - 4 \geqslant 0$ é o conjunto dos pontos exteriores e pertencentes à circunferência de centro (0, 1) e raio de medida 2.

Os pontos que satisfazem o sistema $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 \geqslant 4 \end{cases}$

pertencem à região destacada na figura.

**44. a)** As circunferências têm raio de medida 2 e centros (−1, 1) e (1, −1).

As equações são, respectivamente, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ (1) e $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (2).

Os pontos do conjunto assinalado pertencem às circunferências (1) e (2), simultaneamente, e também pertencem aos interiores de (1) e (2), isto é, são soluções do sistema:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4 \end{cases}$$

**b)** As circunferências têm raio de medida 2 e centros (0, 0) e (3, 0).

Suas equações são, respectivamente, $x^2 + y^2 = 4$ (1) e $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ (2).

Os pontos do conjunto assinalado são exteriores ou pertencentes à circunferência (1) e interiores ou pertencentes à circunferência (2); assim, são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4 \\ (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}$$

**c)** A circunferência tem centro **O** e raio de medida 2, e sua equação é $x^2 + y^2 = 4$. A reta é o conjunto dos pontos do plano cuja abscissa satisfaz a equação: $x - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1$.

Os pontos do conjunto assinalado são interiores ou pertencentes à circunferência e também localizam-se à direita da reta vertical ou pertencem a ela. São soluções do sistema:

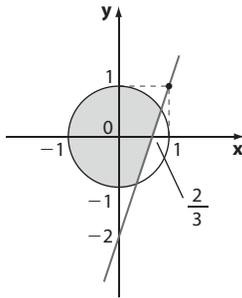
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

**d)** A circunferência tem centro (1, 0) e raio de medida 2 e sua equação é $(x - 1)^2 + y^2 = 4$. A reta é o conjunto dos pontos do plano que têm ordenada $y = 1$.

Os pontos do conjunto assinalado são interiores ou pertencentes à circunferência e também localizam-se abaixo ou pertencem à reta horizontal. São soluções do sistema: $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

**45.** A reta de equação $y = 3x - 2$ corta os eixos nos pontos $(0, -2)$ e $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Como o ponto $(0, 0)$ satisfaz a inequação $3x - y - 2 \leqslant 0$, o conjunto solução dessa inequação é a união do semiplano que contém o ponto $(0, 0)$ com a reta dada.

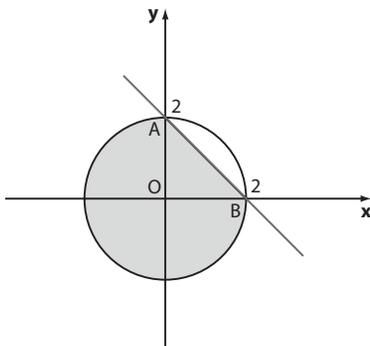
A circunferência tem centro $(0, 0)$ e raio de medida 1. A solução da inequação é o conjunto dos pontos interiores e pertencentes à circunferência.

A interseção é a região sombreada na figura.

**46.** $x + y = 2$ é a equação de uma reta que corta os eixos nos pontos $A(0, 2)$ e $B(2, 0)$.

$x^2 + y^2 = 4$ é a equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio de medida 2.

**a)** Como $(0, 0)$ satisfaz a inequação $x + y \leqslant 2$, a solução da inequação é a reunião do semiplano que contém a origem com a reta dada.

A solução de $x^2 + y^2 \leqslant 4$ é a circunferência e seus pontos interiores.

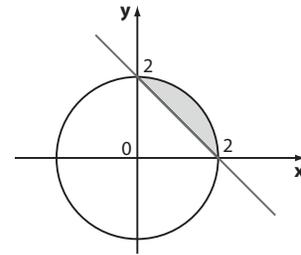
A interseção é mostrada na figura.

A área pedida é igual a:

$\frac{3}{4}$ da área do círculo + área $\triangle AOB$, isto é:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 2}{2}\right) \text{u.a.} = (3\pi + 2) \text{ u.a.}$$

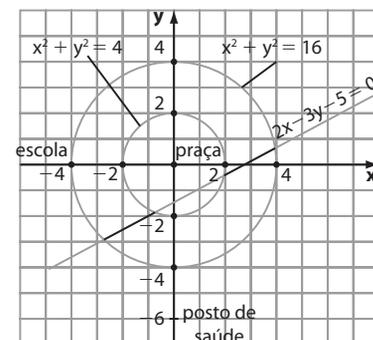
**b)** Como $(0, 0)$ não satisfaz a inequação $x + y \geqslant 2$, a origem não está no conjunto solução da inequação; a solução é o semiplano que não contém a origem, reunido com os pontos da reta.

A solução de $x^2 + y^2 \leqslant 4$ é a circunferência e seus pontos interiores.

A interseção é o segmento circular mostrado na figura a seguir.

A área do segmento circular é igual à diferença entre a área do setor e a área do triângulo:

$$A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} \Rightarrow A = (\pi - 2) \text{ u.a.}$$

**47.**
- Se o edifício $E(x, y)$ deve ser equidistante da escola (**E**) e do posto (**P**) de saúde, **E** deve pertencer à mediatriz de $\overline{PE}$, em que $E(-4, 0)$ e $P(0, -6)$:
- $m_{PE} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6 - 0}{0 + 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{mediatriz} = \frac{2}{3}$
- O ponto médio de $\overline{PE}$ é $\left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{0 - 6}{2}\right) = (-2, -3)$
- Equação da mediatriz: $y + 3 = \frac{2}{3} \cdot (x + 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3y + 9 = 2x + 4 \Rightarrow 2x - 3y - 5 = 0$ (*)
- A distância de **E** à origem (praça central) deve variar de 2 a 4 quilômetros, isto é, **E** deve pertencer à coroa circular limitada por duas circunferências concêntricas de centro na origem, uma com raio de medida 2 km e outra com raio de medida 4 km. Os pontos $(x, y)$ que satisfazem essa condição são soluções da desigualdade: $x^2 + y^2 \geqslant 2^2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 4^2$, isto é, $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$. (**)

A interseção de (*) e (**) corresponde aos pontos que pertencem, simultaneamente, à coroa circular descrita por (**) e à mediatriz descrita por (*):

**48.** **a)** $y = x \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x - 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 0$, que não possui raízes reais. Logo, **r** é externa a $\lambda$.

**b)** $y = x + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 + (x + 1 - 2)^2 = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x^2 - 3 = 0$, que tem duas raízes reais e distintas. Logo, **r** e $\lambda$ são secantes.

**c)** $y = -x + 2 \Rightarrow x^2 + (-x + 2)^2 - 4x - 4(-x + 2) + 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$, que tem uma única raiz real. Logo, **r** e $\lambda$ são tangentes.

**d)** $y = 2x - 1 \Rightarrow (x - 3)^2 + (2x - 1 + 1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x^2 - 6x - 7 = 0$, que tem duas raízes reais e distintas. Logo, **r** e $\lambda$ são secantes.

**49.** **a)** $y = \dfrac{-3x + 35}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \left(\dfrac{-3x + 35}{4}\right)^2 - 4x - 2\left(\dfrac{-3x + 35}{4}\right) - 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5$

O ponto de interseção é (5, 5).

**b)** $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}\right)^2 - 4x - 6\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}\right) - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$ e $x = -3$

Se $x = 5$, então $y = -1$; se $x = -3$, então $y = 3$.

Os pontos de interseção são $(5, -1)$ e $(-3, 3)$.

**c)** $\begin{cases} x = 1 + t \quad (1) \\ y = 1 - t \quad (2) \end{cases}$

De (1), tem-se $t = x - 1$, que, substituído em (2), nos dá $y = 1 - x + 1 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (-x + 2)^2 - 8x - 6(-x + 2) + 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 8 = 0$, que não tem raízes reais; então não há pontos de interseção.

**50.** $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

É a equação da circunferência de centro (2, 3) e raio de medida 5.

O ponto (1, 0) é interior à circunferência, pois $1^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 12 < 0$. Dessa forma, qualquer reta que passa pelo ponto intersecta a circunferência em dois pontos; **r** é secante à circunferência.

**51.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - y + p = 0 \Rightarrow y = 2x + p \end{cases}$

$x^2 + (2x + p)^2 = 4 \Rightarrow 5x^2 + 4px + (p^2 - 4) = 0$

Devemos ter $\Delta = 0$:

$\Delta = 16p^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4p^2 + 80 = 0 \Rightarrow p = \pm 2\sqrt{5}$

**52.** $y = -x - k \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (-x - k)^2 - 4x - 6(-x - k) - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 2(k + 1)x + (k^2 + 6k - 5) = 0$

$\Delta = [2 \cdot (k + 1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 + 6k - 5) =$

$= 4 \cdot (-k^2 - 10k + 11)$

**a)** Para que sejam tangentes, deve-se ter $\Delta = 0 \Rightarrow k = 1$ ou $k = -11$.

**b)** Para que sejam secantes, deve-se ter $\Delta > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -11 < k < 1$.

**c)** Para que a reta seja externa à circunferência, deve-se ter $\Delta < 0 \Rightarrow k < -11$ ou $k > 1$.

**53.** $y = 2x \Rightarrow x^2 + (2x)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Os pontos de interseção são $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-4}{\sqrt{5}}\right)$;

a distância entre eles é o comprimento da corda que os une: $\sqrt{\left(\dfrac{-4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{-8}{\sqrt{5}}\right)^2} = 4$

**54.** **a)** A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$ tem centro C(3, 2) e raio $\sqrt{20}$. A distância de **r** a **C** é $\dfrac{|3 + 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$.

Então **r** e $\lambda$ são tangentes.

**b)** A circunferência tem centro $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

A distância do centro a **r** é $\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} =$

$= \dfrac{9}{2\sqrt{5}} > \sqrt{\dfrac{5}{2}}$. Então, **r** é externa a $\lambda$.

**c)** A circunferência tem centro C(3, 5) e raio $\sqrt{10}$. A distância de **C** a **r** é $\dfrac{|3 \cdot 3 + 5 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} =$

$= r$. Então **r** e $\lambda$ são tangentes.

**d)** A circunferência tem centro (12, −2) e raio 7.

A distância do centro a **r** é $\dfrac{|4 \cdot 12 - 3(-2) - 24|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} =$

$= 6 < 7$. Então **r** e $\lambda$ são secantes.

**e)** A circunferência tem centro (0, 0) e raio $\dfrac{5}{2}$. A distância do centro a **r** é $\dfrac{|0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 < \dfrac{5}{2}$. Elas são secantes.

**55.** **a)** $y = -x + 5 \Rightarrow (x + 1)^2 + (-x + 5 - 2)^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

Se $x = 3$, então $y = 2$; se $x = -1$, então $y = 6$.

Os pontos de interseção são (3, 2) e (−1, 6). O comprimento da corda é a distância entre eles: $\sqrt{(-1 - 3)^2 + (6 - 2)^2} = 4\sqrt{2}$

**b)** $y = 3x \Rightarrow (x - 3)^2 + (3x - 4)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x^2 - 30x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

Se $x = 0$, então $y = 0$; se $x = 3$, então $y = 3$.

Os pontos de interseção são (0, 0) e (3, 9). O comprimento da corda é a distância entre eles: $\sqrt{(3 - 0)^2 + (9 - 0)^2} = 3\sqrt{10}$

**56.** $x^2 + y^2 - 2x + k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 - k \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 - k$;

assim, devemos ter $1 - k > 0 \Rightarrow k < 1$ (*)

$3x - 4y - 18 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3x - 18}{4}$

$x^2 + \left(\dfrac{3x - 18}{4}\right)^2 - 2x + k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25x^2 - 140x + (324 + 16k) = 0$

$\Delta = 19\,600 - 100(324 + 16k) = 1\,600(-8 - k)$

**a)** $\Delta = 0$: $-8 - k = 0 \Rightarrow k = -8$ (que satisfaz (*))

**b)** $\Delta < 0$: $-8 - k < 0 \Rightarrow k > -8$

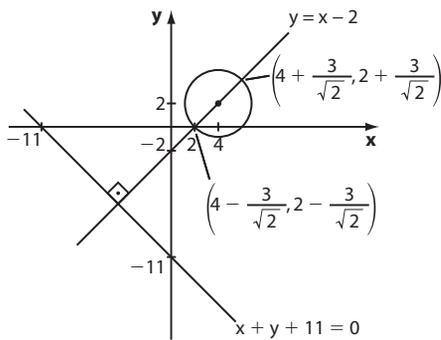
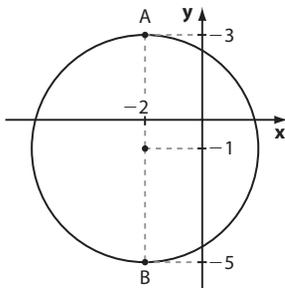
Considerando (*): $-8 < k < 1$

**c)** $\Delta > 0$: $-8 - k > 0 \Rightarrow k < -8$

**57.** O centro da circunferência é $(-m, 1)$. Como o centro pertence a **r**, então $2 \cdot (-m) + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$.

O raio é $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ e o diâmetro é $20\sqrt{2}$.

**58.** A circunferência tem centro (4, 2). A reta **r** tem coeficiente angular $-1$. A reta perpendicular a **r** pelo centro da circunferência tem coeficiente angular 1 e equação $y = x - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 4)^2 + (x - 2 - 2)^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 23 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ e $x = 4 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. O mais próximo da reta é o de abscissa menor: $x = 4 - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

O ponto é $\left(4 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}, 2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

**59.** A circunferência tem centro $(-2, -1)$ e raio de medida 4.

Da figura temos:
$A(-2, 3)$; a reta horizontal que passa por **A** tem equação $y - 3 = 0$;
$B(-2, -5)$; a reta horizontal que passa por **B** tem equação $y + 5 = 0$.

**60.** $r: y = x + 2$; $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 2y + a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -a + 4 + 1 = 5 - a > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a < 5$ (*)
$x^2 + (x + 2)^2 - 4x - 2(x + 2) + a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 2x + a = 0$

$\Delta = 4 - 8a \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant \dfrac{1}{2}$ (**)

Fazendo (*) ∩ (**) obtém-se $a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

O maior valor de **a** é $\dfrac{1}{2}$.

**61.**
- A equação da circunferência é $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ (*)
- Como a reta s: $5x + 12y + 10 = 0$ é tangente à circunferência, temos: $d_{C,s} = r \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{|5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = r \Rightarrow r = \dfrac{|39|}{13} = 3$
Em (*), segue: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

**62. a)** A equação da circunferência é
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$ (*)
- A reta passa por $(0, -4)$ e $(2, 0)$; sua equação é: $2x - y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x - 4$

Substituindo em (*), temos:
$(x - 2)^2 + (2x - 5)^2 = 16 \Rightarrow 5x^2 - 24x + 13 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{24 \pm 2\sqrt{79}}{10} \Rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{79}}{5}$

A abscissa de **P** é $\dfrac{12 + \sqrt{79}}{5}$:

$y = 2\left(\dfrac{12 + \sqrt{79}}{5}\right) - 4 = \dfrac{4 + 2\sqrt{79}}{5}$

A soma pedida é $\dfrac{16 + 3\sqrt{79}}{5}$.

**b)** Uma reta **s** paralela a $2x - y - 4 = 0$ tem equação s: $2x - y + c = 0$ (*), em que $C \in \mathbb{R}$.
Como **s** é tangente à circunferência, temos:
$d_{\text{centro, s}} = r$; C(2, 1) e r = 3
$\dfrac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow \dfrac{|3 + c|}{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow |3 + c| = 3\sqrt{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + c = 3\sqrt{5} \Rightarrow c = 3\sqrt{5} - 3 = 3 \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) \\ \text{ou} \\ 3 + c = -3\sqrt{5} \Rightarrow c = -3\sqrt{5} - 3 = 3 \cdot \left(-\sqrt{5} - 1\right) \end{cases}$$

Assim, em (*), as equações procuradas são:
$2x - y + 3 \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) = 0$ e
$2x - y + 3 \cdot \left(-\sqrt{5} - 1\right) = 0$

**63.** A partir da equação da circunferência, vamos completar quadrados para obter os dados de centro e raio:
$x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} + y^2 + 4y + 4 = -k + \dfrac{25}{4} + 4 =$
$= \dfrac{41}{4} - k = r^2$ (*)

Isto é, $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \dfrac{41}{4} - k$

$C\left(-\dfrac{5}{2}, -2\right)$

Os pontos do eixo das abscissas pelos quais passa a circunferência possuem abscissas cuja diferença em módulo vale 3. Além disso, são simétricos em relação à reta $x = -\dfrac{5}{2}$. Dessa forma, um dos pontos tem abscissa $-\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -4$ e o outro tem abscissa $-\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = -1$, isto é, a circunferência passa por $(-4, 0)$ e $(-1, 0)$.
Logo, seu raio mede:

$$\sqrt{\left[-4 - \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right]^2 + [0 - (-2)]^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$$

Por (*): $\dfrac{41}{4} - k = \dfrac{25}{4} \Rightarrow k = 4$

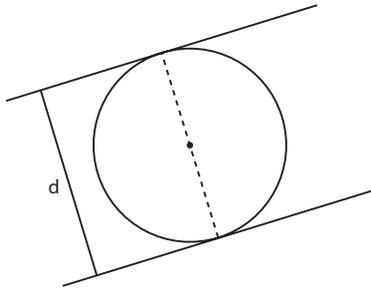
**64.** A circunferência tem centro (2, 3) e raio de medida 5.
**a)** As retas tangentes horizontais devem passar pelos pontos da circunferência de maior e menor ordenada, que são $(2, 8)$ e $(2, -2)$, respectivamente. Suas equações são $y + 2 = 0$ e $y - 8 = 0$.
**b)** As retas tangentes verticais devem passar pelos pontos da circunferência de maior e menor abscissa, que são $(7, 3)$ e $(-3, 3)$, respectivamente. Suas equações são $x - 7 = 0$ e $x + 3 = 0$.

**c)** $3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow m_r = \frac{3}{4}$

As tangentes têm coeficiente angular $-\frac{4}{3}$ e são da forma $y = -\frac{4}{3}x + n$ ou $4x + 3y + c = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 \Rightarrow c = -42 \text{ ou } c = 8$$

As equações são $4x + 3y - 42 = 0$ e $4x + 3y + 8 = 0$.

**65.** Se duas retas tangentes a uma circunferência são paralelas entre si, a distância entre elas é igual à medida do diâmetro dessa circunferência.

Simplificando e completando os quadrados:

$4x^2 + 4y^2 - 4x - 20y - 15 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - x + \frac{1}{4}} + \underbrace{y^2 - 5y + \frac{25}{4}} = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$

$r = \frac{\sqrt{41}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{41}$

**66.** $\lambda$ passa por (3, 0) e (5, 0) $\Rightarrow x_C = 4$; $C(4, y_C)$

$\lambda$ é tangente a $y + 10 = 0 \Rightarrow \lambda$ passa por $(4, -10)$

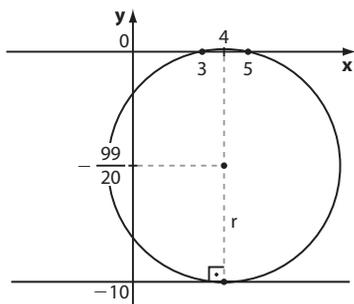
$d_{C,(3,0)} = d_{C,(4,-10)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3 - 4)^2 + (y_C - 0)^2 = (4 - 4)^2 + (y_C + 10)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_C = \frac{-99}{20}$

$r = \left|-10 - \left(-\frac{99}{20}\right)\right| = \frac{101}{20}$

Daí, $\lambda$: $(x - 4)^2 + \left(y + \frac{99}{20}\right)^2 = \left(\frac{101}{20}\right)^2$, ou ainda:

$(x - 4)^2 + \left(y + \frac{99}{20}\right)^2 = \frac{10\,201}{400}$

**67.** O centro da circunferência é C(2, 0) e o raio mede 4.

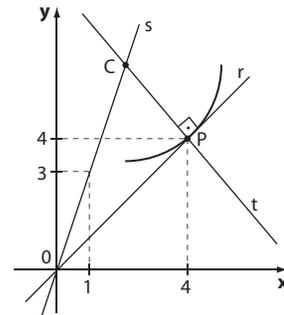
O coeficiente angular da reta é $\sqrt{3}$ e sua equação é da forma $y = \sqrt{3}x + c \Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0$.

A distância das retas ao centro é 4.

$$d = \frac{|\sqrt{3} \cdot 2 - 1 \cdot 0 + c|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 4 \Rightarrow c = -2\sqrt{3} \pm 8$$

As retas pedidas têm equações:

$\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} + 8 = 0$ e $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} - 8 = 0$

**68.**

A reta **r** tem coeficiente angular 1; a reta **t**, perpendicular a ela em P(4, 4), tem coeficiente angular −1.

A equação de **t** é $y - 4 = -1 \cdot (x - 4) \Rightarrow x + y - 8 = 0$.

O centro da circunferência é o ponto de interseção de **s** e **t** e é solução do sistema $\begin{cases} y = 3x \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$ e $y = 6$ e C(2, 6).

A medida do raio é a distância de **C** a **P**, ou seja, $\sqrt{(6 - 4)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{8}$. A equação de $\lambda$ é:

$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$

**69.** Do sistema $\begin{cases} (1)\ x^2 + y^2 = 100 \\ (2)\ x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0 \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se $y = 14 - x$ (3).

Substituindo-se (3) em (1), tem-se $x^2 + (14 - x)^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = 6$.

Em (3), se $x = 8$, então $y = 6$; se $x = 6$, então $y = 8$. Os pontos são (8, 6) e (6, 8).

**70.** Do sistema $\begin{cases} (1)\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ (2)\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$, subtraindo-se (1) de (2), tem-se $y = x + 1$ (3).

Substituindo-se (3) em (1), tem-se

$x^2 + (x + 1)^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Se $x = 1$, então $y = 2$; se $x = -1$, então $y = 0$.

Os pontos são (1, 2) e (−1, 0).

**71. a)** $\lambda_1$ tem centro $C_1(0, 0)$ e raio de medida 4.

$\lambda_2$ tem centro $C_2(-3, 2)$ e raio de medida 3.

$C_1C_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$r_1 + r_2 = 7$

Como $C_1C_2 < r_1 + r_2$, elas não são exteriores nem se tangenciam exteriormente.

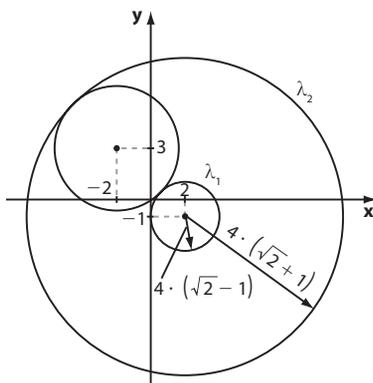
Como $r_1 - r_2 = 1$ e $C_1C_2 > r_1 - r_2$, elas não se tangenciam interiormente e uma não é interna à outra. Por exclusão, elas são secantes.

**b)** $\lambda_1$ tem centro $C_1(0, 0)$ e raio de medida $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$\lambda_2$ tem centro $C_2(-10, 5)$ e raio de medida 1.
$C_1C_2 = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$
$r_1 + r_2 = 1 + 3\sqrt{2}$
Como $C_1C_2 > r_1 + r_2$, elas são exteriores.

**c)** $\lambda_1$ tem centro $C_1(2, 3)$ e raio de medida 1.
$\lambda_2$ tem centro $C_2(-2, 6)$ e raio de medida 4.
$C_1C_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (6-3)^2} = 5$
$r_1 + r_2 = 5$
Como $C_1C_2 = r_1 + r_2$, elas se tangenciam exteriormente.

**d)** $\lambda_1$ tem centro $C_1(0, 0)$ e raio de medida 9.
$\lambda_2$ tem centro $C_2(3, -4)$ e raio de medida 4.
$C_1C_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
$r_1 + r_2 = 13$
Como $C_1C_2 < r_1 + r_2$, elas não são exteriores nem se tangenciam exteriormente.
Como $r_1 - r_2 = 5 = C_1C_2$, elas se tangenciam interiormente.

**72.** A circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ tem centro $C_1(-2, 3)$ e raio de medida 4.
Seja $\lambda$ a circunferência procurada:
$\lambda: (x-2)^2 + (y+1)^2 = r_2^2$; $C_2(2, -1)$

- $\lambda$ pode ser tangente exterior à circunferência dada.
$C_1C_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
Como $r_1 + r_2 = C_1C_2$, temos: $4 + r_2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow r_2 = 4 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ e a equação de $\lambda$ é:
$\lambda_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = \left(4 \cdot (\sqrt{2} - 1)\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$
- $\lambda$ pode ser tangente interior à circunferência dada.
Nesse caso, $C_1C_2 = |r_1 - r_2| \Rightarrow |4 - r_2| = 4\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - r_2 = 4\sqrt{2}$ ou $4 - r_2 = -4\sqrt{2}$
$r_2 = 4 - 4\sqrt{2} < 0$ ou $r_2 = 4 + 4\sqrt{2} = 4 \cdot (\sqrt{2} + 1)$
(não serve)
Nesse caso, a equação de $\lambda$ é:
$\lambda_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \cdot (\sqrt{2} + 1)^2$

## Desafio

**a)** A(−6, 15) e B(3, 3)
$d_{AB} = \sqrt{(-6-3)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$
Como a escala é de 1 : 20 000, a distância real entre **A** e **B** é $15 \cdot (20\,000 \text{ m}) = 300\,000 \text{ m} = 300 \text{ km}$

**b)** **P** deve pertencer ao círculo de centro em A(−6, 15) e raio de medida 10 m (pois, como a distância real máxima é 200 km = 200 000 m = 10 m no sistema cartesiano representado).
Assim, um ponto P(x, y) "sente" o efeito do míssil se $(x+6)^2 + (y-15)^2 \leqslant 100$

**c)** No sistema representado, a área afetada é a área de um círculo de raio 10 m, a saber, $\pi \cdot (10 \text{ m})^2 = 100\,\pi \text{ m}^2$

**d)** A reta **r** que passa por (−6, 9) e (0, 12) tem equação $r: x - 2y + 24 = 0$.
A reta **s**, perpendicular a **r** por **A** tem coeficiente angular $m_s = -2$; $y = -2x + n$; como $(-6, 15) \in s$, temos: $15 = -2 \cdot (-6) + n \Rightarrow n = 3 \Rightarrow s: y = -2x + 3$
Determinemos $r \cap s = \{P\}$

$$\begin{cases} x - 2y + 24 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{18}{5} \text{ e } y = \frac{51}{5};\ P\left(-\frac{18}{5}, \frac{51}{5}\right)$$

$$d_{AP} = \sqrt{\left(-6 + \frac{18}{5}\right)^2 + \left(15 - \frac{51}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

(Distância entre **A** e **P** no sistema cartesiano representado.)
Usando $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$, temos: $d_{AP} = 5{,}376$ m; a distância real é $(5{,}376 \text{ m}) \cdot 20\,000 = 107\,520 \text{ m} = 107{,}52 \text{ km}$.
O número inteiro mais próximo é 108.

# As cônicas

## Exercícios

**1.** **a)** $a = 13$; $b = 5$
$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$
**b)** $b = 6$; $c = 8$; $a^2 = b^2 + c^2 = 36 + 64 = 100$
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$
**c)** $b = 5$; $c = 12$; $a^2 = b^2 + c^2 = 25 + 144 = 169$
$$\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$$

**2.** **a)** $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow c = 12$
Os focos são: (−12, 0) e (12, 0).
**b)** (−8, 0) e (8, 0).
**c)** (0, −12) e (0, 12).

**3.** $2a = PF_1 + PF_2 = \sqrt{24^2 + \left(\frac{27}{5}\right)^2} + \sqrt{0^2 + \left(\frac{27}{5}\right)^2} =$

$= \frac{123}{5} + \frac{27}{5} = 30$, então $a = 15$.

$b^2 = a^2 - c^2 = 225 - 144 = 81$, então $b = 9$.

Equação da elipse: $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$.

**4.** A equação reduzida é $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, então:

$a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$ e $b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow c = 2$

Distância focal: $2c = 4$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

**5.** $F_2 = (0, 2)$ e $c = 2$; $\overline{F_1F_2} \subset Oy$

A equação reduzida é $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Temos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = c^2 = 4 \\ \frac{1^2}{b^2} + \frac{(\sqrt{6})^2}{a^2} = 1 \text{ (pois } \mathbf{P} \text{ está na elipse)} \end{cases}$$

E, daí, temos: $a^2 = 8$ e $b^2 = 4$.

Então, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$.

**6.** $b = 3$; $2c = 4 \Rightarrow c = 2$. Daí: $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 4 = 13$

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

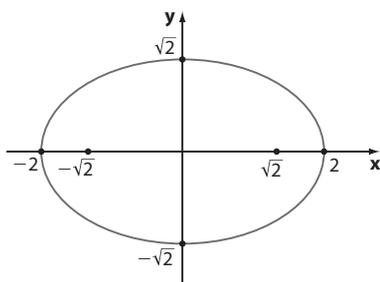
**7.** $9x^2 + 16y^2 = 4 \Rightarrow \frac{9x^2}{4} + 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{7}}{6}$

Os focos são: $\left(-\frac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)$.

**8.** $x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow a^2 = 4$ e $b^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$ e $b = \sqrt{2} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 2 = 2$ e $c = \sqrt{2}$.

Os focos são $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$.

**9.** $\overline{F_1F_2} \subset Oy$

A soma $PF_1 + PF_2$ é igual à medida do eixo maior, isto é,

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$2c = 2 \Rightarrow c = 1$

$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 1 = 15$

$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

**10.** $\overline{F_1F_2} \subset Ox$

Perímetro: $(BF_1 + BF_2) + F_1F_2 = 2a + 2c$

Como $a = 3$ e $c = 2$, obtemos o perímetro: $6 + 4 = 10$.

**11. a)** $C(3, 0)$; $a = 3$; $b = 1$; $\overline{F_1F_2} \subset Ox$

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

**b)** $C(4, 4)$; $b = 5 - 4 = 1$; $2c = 6 - 2 \Rightarrow c = 2$; $\overline{F_1F_2} \parallel Ox$

$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5$

$\frac{(x-4)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$

**c)** $a = 2$; $b = 1$; $C(-2, 3)$; $\overline{F_1F_2} \parallel Oy$

$\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

**12. a)** $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

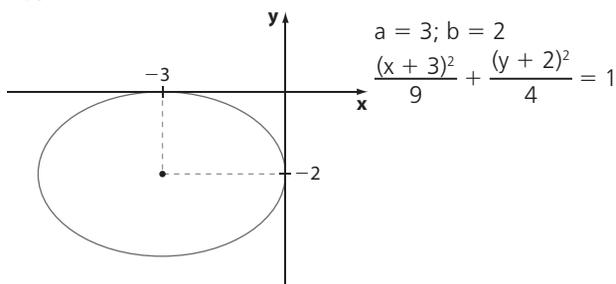
$F_1(3 - 2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(3 + 2\sqrt{2}, 0)$

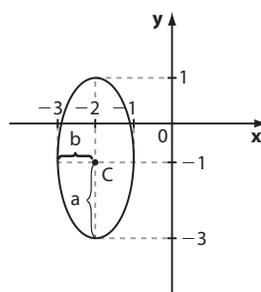
**c)** $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$F_1(-2, 3 + \sqrt{3})$ e $F_2(-2, 3 - \sqrt{3})$

**13.**

$a = 3$; $b = 2$

$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

**14.** Se ela tem centro em $C(-2, -1)$ e passa por $A(-1, -1)$, então $b = 1$; se passa por $(-2, -3)$, então $a = 2$.

$\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

**15.** $a = 5$ e $c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

**16.** O centro da elipse é $(3, 2)$ e $\overline{F_1F_2} \parallel Ox$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow c = 5$

$F_1(3 - 5, 2)$ e $F_2(3 + 5, 2) \Rightarrow F_1(-2, 2)$ e $F_2(8, 2)$

**17. a)** $a = 3$, $c = 5$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

**b)** $a = 2$, $c = 4$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

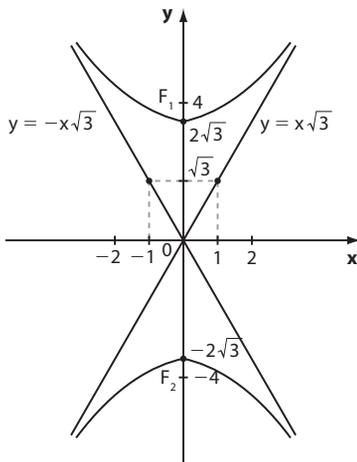
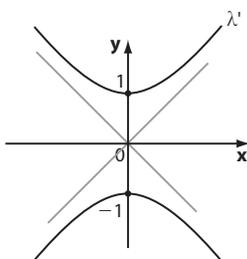
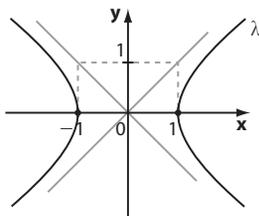
**18. a)** $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$.
**b)** $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$.

**19.** $a^2 = 2$; $b^2 = 7$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ e $2c = 6$; eixo real $\subset$ Ox.

$$y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\,x = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}x$$

**20. a)** $a^2 = 12$; $b^2 = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 4$; $F_1(0, 4)$; $F_2(0, -4)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**b)** As assíntotas têm equação $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}x$

**21.** $\lambda$: $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 1$; $b = 1$;
e o eixo real está contido em Ox.
$\lambda'$: $y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 1$; $b = 1$;
e o eixo real está contido em Oy.
Logo, elas não são coincidentes.

**22.** $3x^2 - y^2 = 300 \Rightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 100$ e $b^2 = 300$
$c^2 = a^2 + b^2 = 400 \Rightarrow c = 20$
Os focos são $F_1(-20, 0)$ e $F_2(20, 0)$.

**23. a)** $A_2(10 - 3, 0) = (7, 0) \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$; $2c = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 5$
$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 4 = 21$. O centro é $(5, 0)$.

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$$

**b)** $C(6, 5)$; $a = 1$; $c = 2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$

$$\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{3} = 1$$

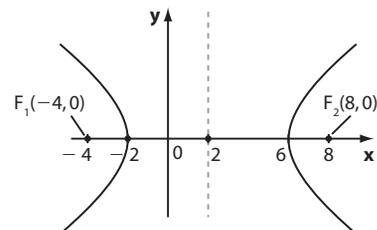
**24. a)** $(0, 0)$ e $(10, 0)$.
**b)** $(8, 5)$ e $(4, 5)$.

**25.** O centro é $(-1, -2)$; $a^2 = 13$; $b^2 = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 4$. Os focos são $(-5, -2)$ e $(3, -2)$.

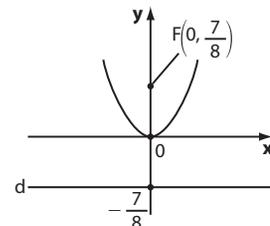
**26.** $a^2 = 2$; $b^2 = 47$; $c^2 = a^2 + b^2 = 49 \Rightarrow c = 7$ e $2c = 14$

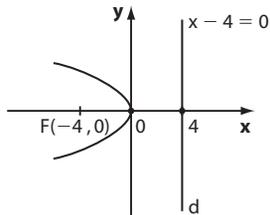
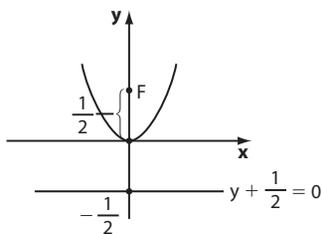
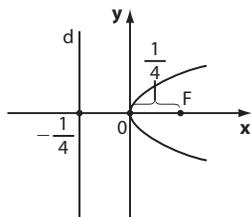
**27.** $a^2 = 16$; $b^2 = 20$; $c^2 = a^2 + b^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

O centro da hipérbole é $(2, 0)$. O eixo real está contido no eixo das abscissas e mede $2a = 8$; o eixo imaginário é paralelo ao eixo **y** e mede $2b = 4\sqrt{5}$; a distância entre os focos é $2c = 12$.

**28. a)** $p = 2$ e $y^2 = 4x$.
**b)** $p = 8$ e $x^2 = 16y$.
**c)** $p = 10$ e $x^2 = -20y$.

**29.** $2x^2 - 7y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7y}{2} \Rightarrow 2p = \frac{7}{2} \Rightarrow p = \frac{7}{4}$

A diretriz é uma reta horizontal de equação $y = -\frac{7}{8}$.

**30.** Observe que $2p = 16 \Rightarrow p = 8$. Se **F** está à direita de **V**, então $F(4, 0)$ e a diretriz é a reta vertical de equação $x = -4$, ou seja, d: $x + 4 = 0$.

**31. a)** $2p = 16 \Rightarrow p = 8$; V(0, 0); o foco F(−4, 0) está à esquerda de **V**. A diretriz é a reta vertical de equação $x - 4 = 0$

**b)** $2p = 2 \Rightarrow p = 1$; V(0, 0); o foco $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ está acima de **V**. A diretriz é a reta horizontal de equação $y + \frac{1}{2} = 0$.

**c)** $2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$; V(0, 0); o foco $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ está à direita de **V** e a diretriz é a reta vertical da equação $x + \frac{1}{4} = 0$.

**32.** Essa parábola tem equação da forma: $y^2 = 2px$

Como ela passa por P(4, −7), temos:

$(-7)^2 = 2p \cdot 4 \Rightarrow 2p = \frac{49}{4}$

e a equação é: $y^2 = \frac{49}{4}x$.

**33. a)** $p = 2$, $V(3, 2) \Rightarrow (x - 3)^2 = 4(y - 2)$

**b)** $p = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = -8(y - 2)$

**c)** V(3, 4); $p = 2 \Rightarrow (y - 4)^2 = 4(x - 3)$

**d)** A equação é do tipo $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 2p \cdot \left(y + \frac{9}{4}\right)$. Como (0, 0) pertence à parábola, tem-se $p = \frac{1}{2}$. A equação é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$.

**34.** A equação $(y + 3)^2 = 12(x - 2)$ é da forma $(y - y_0)^2 = 2p(x - 2)$, então o vértice é V(2, −3) e o parâmetro é $p = 6$.

Como o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo Ox, e o foco está à direita de **V** (distando 3 unidades de **V**), temos:

$F\left(2 + \frac{p}{2}, -3\right) = (5, -3)$

**35.** A equação $y = -(x + 5)^2$ equivale a $(x + 5)^2 = -y$ e é da forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, então o vértice é V(−5, 0) e o parâmetro é $p = \frac{1}{2}$.

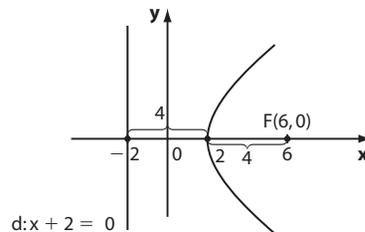
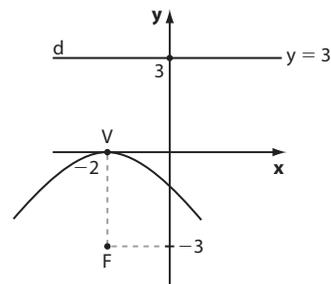
Como o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo Oy, e o foco está abaixo de $\mathbf{V}\left(\text{distando } \frac{1}{4} \text{ de } \mathbf{V}\right)$, temos:

$F = \left(-5, 0 - \frac{p}{2}\right) = \left(-5, -\frac{1}{4}\right)$

e a diretriz tem equação $y = 0 + \frac{p}{2}$, ou seja, $y = \frac{1}{4}$.

**36.** $y^2 - 6y + 9 = 7x \Rightarrow (y - 3)^2 = 7x$

Essa equação é da forma $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, então o vértice é V(0, 3) e o parâmetro é $p = \frac{7}{2}$.

**37.** O vértice é V(2, 0) e $p = 8$. A equação é $(y - 0)^2 = 16 \cdot (x - 2) \Rightarrow y^2 = 16 \cdot (x - 2)$.

**38.** Os pontos pertencem a uma parábola de foco F(−2, −3) e vértice V(−2, 0). Como $p = 6$, sua equação é: $(x + 2)^2 = -12 \cdot (y - 0) \Rightarrow (x + 2)^2 = -12y$

**39.** $\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y & (1) \\ x^2 + y^2 - 8y = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), temos: $2y^2 - 8y = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (y = 0 \text{ e } x = 0)$ ou $(y = 4 \text{ e } x = -4)$.

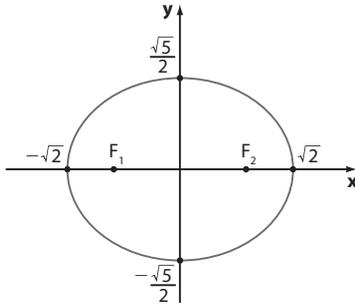
A parábola passa por (0, 0) e (−4, 4) e é simétrica em relação ao eixo **y**. Temos que (0, 0) é o vértice da parábola e sua equação é do tipo $x^2 = 2p \cdot y$.

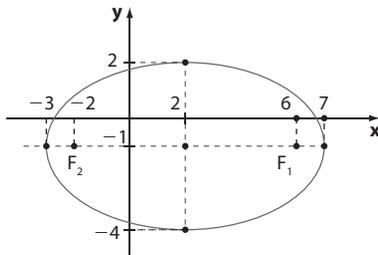
Como (−4, 4) pertence à parábola, temos:

$(-4)^2 = 2p \cdot 4 \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = 2$

A equação procurada é $x^2 = 4y$.

**40. a)** $5x^2 + 8y^2 = 10 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4y^2}{5} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$

É uma elipse com centro **C** na origem, eixo maior horizontal; $a = \sqrt{2}$; $b = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**b)** $(9x^2 - 36x) + (25y^2 + 50y) = 164 \Rightarrow$
$\Rightarrow (9x^2 - 36x + 36) + (25y^2 + 50y + 25) =$
$= 164 + 36 + 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{(x - 2)^2}{25} + \dfrac{(y + 1)^2}{9} = 1$

É uma elipse de centro $C(2, -1)$, eixo maior horizontal; $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$.

**c)** $(5x^2 + 30x) + (-4y^2 + 16y) = -49 \Rightarrow$
$\Rightarrow (5x^2 + 30x + 45) - (4y^2 - 16y + 16) =$
$= -49 + 45 - 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{(y - 2)^2}{5} - \dfrac{(x + 3)^2}{4} = 1$

É uma hipérbole de centro $C(-3, 2)$, eixo real paralelo a Oy; $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $c = 3$.

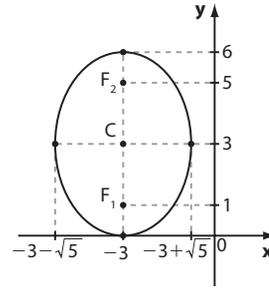
**d)** $(y^2 - 6y) + 13 = 4x \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 4x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y - 3)^2 = 4(x - 1)$

É uma parábola de vértice $(1, 3)$, diretriz vertical de equação $x = 0$, foco $(2, 3)$ e parâmetro $p = 2$.

**e)** $x^2 - 4x - 12y = 32 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 32 + 12y + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = 12 \cdot (y + 3)$

É uma parábola de vértice $(2, -3)$, diretriz horizontal de equação $y = -6$, $p = 6$, foco $(2, 0)$.

**f)** $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9x^2 + 54x + 5y^2 - 30y = -81 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 \cdot (x^2 + 6x + 9) + 5 \cdot (y^2 - 6y + 9) =$
$= -81 + 81 + 45 \Rightarrow 9 \cdot (x + 3)^2 + 5 \cdot (y - 3)^2 = 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{(x + 3)^2}{5} + \dfrac{(y - 3)^2}{9} = 1$

Elipse com centro $C(-3, 3)$, eixo maior vertical; $a^2 = 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 3$; $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$ e $c^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2$; $F_1(-3, 1)$ e $F_2(-3, 5)$.

**41.** $\begin{cases} y^2 = x & (1) \\ x^2 + 5y^2 = 6 & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se: $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -6$ (não serve pois, por (1), devemos ter $x \geqslant 0$) ou $x = 1$.

Se $x = 1$, $y = \pm 1 \Rightarrow (1, 1)$ e $(1, -1)$.

**42.** $\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Somando-se as duas equações, tem-se $5y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 2$.

Substituindo-se em (2), tem-se $x^2 = 7$.

Os pontos são $\left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right)$.

**43.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 5 & (1) \\ 2x^2 - 4x - y + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = \dfrac{1}{2}y & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (2) em (1), tem-se $2y^2 + y - 10 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -\dfrac{5}{2}$ (não serve em (2)) ou $y = 2$.

Se $y = 2$, em (2), tem-se $x = 0$ ou $x = 2$.

Elas têm dois pontos comuns: $(0, 2)$ e $(2, 2)$.

**44.** $\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 & (2) \\ y = x & (1) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se

$x^2 = \dfrac{225}{34} \Rightarrow x = \pm \dfrac{15}{\sqrt{34}}$

Os pontos de interseção são

$\left(\dfrac{15}{\sqrt{34}}, \dfrac{15}{\sqrt{34}}\right)$ e $\left(-\dfrac{15}{\sqrt{34}}, -\dfrac{15}{\sqrt{34}}\right)$

O comprimento da corda é

$\sqrt{\left(\dfrac{15}{\sqrt{34}} + \dfrac{15}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{\sqrt{34}} + \dfrac{15}{\sqrt{34}}\right)^2} = \dfrac{30}{\sqrt{17}} =$

$= \dfrac{30\sqrt{17}}{17}$

**45.** $\begin{cases} x^2 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x^2 \\ x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x \end{cases} \Rightarrow 10 - x^2 = 10 - x$

$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Os pontos de interseção são $(0, 10)$ e $(1, 9)$. A distância entre eles é: $\sqrt{(9 - 10)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$.

**46.** A equação da reta, que tem coeficiente angular: $\frac{0-8}{4-0} = -2$, é $y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$

Do sistema $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = 8x - 2x^2 \end{cases}$ tem-se $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ ou $x = 1$.

Os pontos de interseção são A(4, 0) e B(1, 6).

O ponto médio de $\overline{AB}$ é $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

O coeficiente de $\overline{AB}$ é $\frac{6-0}{1-4} = -2$ e o da reta perpendicular a ela é $\frac{1}{2}$.

A equação da mediatriz é:

$y - 3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow 2x - 4y + 7 = 0$

**47.** $\begin{cases} y = x + m & (1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se:

$5x^2 + (8m)x + (4m^2 - 4) = 0$

Para que haja interseção das curvas, a equação deve ter raízes reais, ou seja:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 5 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$

**48.** $\begin{cases} y = mx + 2 & (1) \\ y^2 = 4x & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se:

$m^2x^2 + 4(m - 1)x + 4 = 0$, que, para ter solução real, deve satisfazer $\Delta \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

**49. a)** Temos:

- circunferência de equação: $x^2 + y^2 = 9$ (1)
- hipérbole com centro na origem, eixo real horizontal com $a = 2$; $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Daí: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5 = 4 + b^2 \Rightarrow b = 1$

Equação: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ (2)

De (1), temos: $x^2 = 9 - y^2$ (*)

Em (2), obtemos: $\frac{9 - y^2}{4} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Se $y = 1$, em (*), obtemos: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Temos: $A(2\sqrt{2}, 1)$ e $B(-2\sqrt{2}, 1)$

Se $y = -1$, em (*), temos: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Temos: $D(2\sqrt{2}, -1)$ e $C(-2\sqrt{2}, -1)$

**b)** As assíntotas da hipérbole têm equação $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$; **P** pertence à reta $y = \frac{1}{2}x$; se $x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1$ (ordenada de **P**).

**50.** De $3x^2 - y + 1 = 0$, temos: $3x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{3}$ (*).

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$\frac{y-1}{3} + y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 11y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{8}{3}$

- Se $y = 1$, em (*), obtemos $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; $P_1(0, 1)$
- Se $y = \frac{8}{3}$, em (*), obtemos $x^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$;

$P_2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $P_3\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Portanto, são 3 pontos de interseção.

## Desafio

Como med(PÔA) = 45°, temos $x_P = y_P$; $P(x_P, x_P)$

Como **P** pertence à elipse, temos:

$\frac{x_P^2}{100} + \frac{x_P^2}{25} = 1 \Rightarrow 5x_P^2 = 100 \Rightarrow x_P^2 = 20 \xRightarrow{x_P > 0}$

$\xRightarrow{x_P > 0} x_P = 2\sqrt{5} \Rightarrow y_P = 2\sqrt{5}$

Daí $P(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$.

$d_{PO} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{PO} = 2\sqrt{10}$ milhões de quilômetros

Alternativa *b*.

# Capítulo 5 Estatística básica

## Exercícios

**1. a)** $e = \frac{48}{150} = 0{,}32$; $f = \frac{20}{100} = 0{,}2$; $d = \frac{45}{150} = 0{,}30$;

$g = 1{,}0 - (0{,}30 + 0{,}32 + 0{,}2 + 0{,}16) = 0{,}02 \Rightarrow$

$\Rightarrow e + f + g = 0{,}32 + 0{,}2 + 0{,}02 = 0{,}54$

**b)** $j = 2\%$, $k = 16\% \Rightarrow 20\% + 2\% + 16\% =$

$= 38\%$; $0{,}38 \cdot 150 = 57$

**c)** $d = 0{,}30 \Rightarrow h = 30\%$ e $k = 16\% \Rightarrow h + k = 46\%$

**d)** $e = 0{,}32$; $0{,}32 \cdot 360° \simeq 115°$

**2. a)** $75\% \cdot 480 = \frac{3}{4} \cdot 480 = 360$; 360 aprovam; 120 reprovam.

**b)** $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$ e $360° - 90° = 270°$

**c)** Mulheres: $\begin{cases} 0{,}6 \cdot 360 = 216 \\ 0{,}45 \cdot 120 = 54 \end{cases}$; o total é 270.

Homens: $\begin{cases} \text{aprovam: } 360 - 216 = 144 \\ \text{reprovam: } 120 - 54 = 66 \end{cases}$; a diferença é 78.

**3. a)** $6\,200 - 2\,400 = 3\,800$; a diferença é 3 800 litros por segundo.

**b)** Por segundo: 6 200 litros

Por hora: $60 \cdot 60 \cdot 6\,200 = 22\,320\,000$ (22 320 000 litros)

Por dia: $24 \cdot 22\,320\,000 = 535\,680\,000 = 5{,}3568 \cdot 10^8$ ($5{,}3568 \cdot 10^8$ litros)

Em 30 dias: $30 \cdot 5{,}3568 \cdot 10^8 = 1{,}60704 \cdot 10^{10} = 16{,}0704 \cdot 10^9$ ($16{,}0704 \cdot 10^9$ litros); aproximadamente 16,1 bilhões de litros de água.

**c)** Gráfico de linhas, pois os valores da variável (volume de água economizado) variam no decorrer do tempo.

**4.** **a)** Falsa; $\frac{1}{3}$ de $33\,455 > 11\,000 > 9\,688$

**b)** Verdadeira;

São Paulo: $\frac{9\,688}{9\,134} \simeq 1{,}06$; 6% de aumento.

Paraná: $\frac{8\,288}{7\,620} \simeq 1{,}09$; 9% de aumento.

Santa Catarina: $\frac{3\,292}{2\,724} \simeq 1{,}2$; 20% de aumento.

Rio Grande do Sul: $\frac{3\,043}{2\,873} \simeq 1{,}06$; 6% de aumento.

Minas Gerais: $\frac{1\,627}{1\,522} \simeq 1{,}07$; 7% de aumento.

**c)** Falsa; o aumento aproximado é de 20%.

**d)** Verdadeira; total da região = $8\,288 + 3\,292 + 3\,043 = 14\,623$. Como $8\,288 > \frac{14\,623}{2}$, a afirmação é verdadeira.

**e)** Falsa; $1\,522 - 1\,093 = 429$;
$1\,627 - 1\,522 = 105$
O acréscimo, por ano, não é constante. A taxa média de variação de 2012-2013 é maior que o quádruplo da taxa média no período 2013-2014.

**5.** **a)** $19{,}5\% \cdot 360° = 0{,}195 \cdot 360° = 70{,}2°$; o inteiro mais próximo é 70.

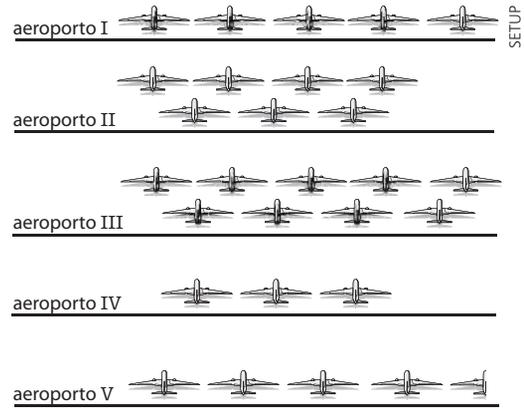
**b)** Devemos calcular 58,3% de 22 700 000:
$0{,}0583 \cdot 22\,700\,000 = 13\,234\,100$

**c)** Devemos calcular 57% de 6,1%:
$0{,}57 \cdot 0{,}061 \simeq 0{,}035$; o percentual pedido é 3,5%.

**d)** Devemos calcular 6,1% de 22 700 000:
$0{,}061 \cdot 22\,700\,000 = 1\,384\,700$

**e)** Com carteira assinada: $0{,}43 \cdot 360° = 154{,}8°$
Sem carteira assinada: $0{,}57 \cdot 360° = 205{,}2°$
A diferença pedida é $205{,}2° - 154{,}8° = 50{,}4° = 50° 24'$

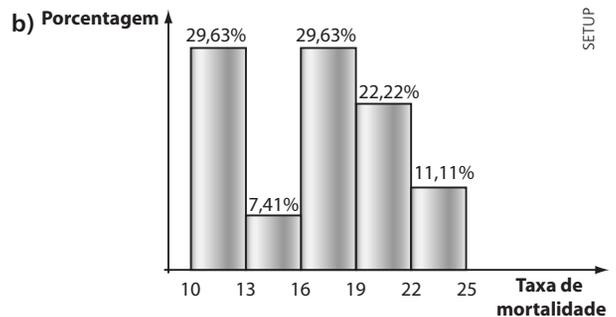
**6.** **a)** Embora a resposta seja pessoal, é preciso ficar atento a alguns aspectos:

- Se cada avião representasse 500 operações, teríamos, para o aeroporto III, 27 aviões ($13\,500 \div 500 = 27$) para representar, o que não seria muito recomendado, por se tratar de uma "grande" quantidade de figuras.
- Se cada avião representasse 1 000 operações, teríamos, para o aeroporto V, 6,75 aviões ($6\,750 \div 1\,000 = 6{,}75$). Embora seja possível, seria necessário representar $\frac{3}{4}$ de um avião, o que poderia gerar algumas dúvidas para o leitor.
- Se cada avião representasse 1 500 operações, teríamos:
  I → $7\,500 \div 1\,500 = 5$ (5 aviões)
  II → $10\,500 \div 1\,500 = 7$ (7 aviões)
  III → $13\,500 \div 1\,500 = 9$ (9 aviões)
  IV → $4\,500 \div 1\,500 = 3$ (3 aviões)
  V → $6\,750 \div 1\,500 = 4{,}5$ (4,5 aviões)
  Tal "escala" parece indicada para fazer o pictograma.

**b)**
- O número total de operações dos cinco aeroportos reunidos é:
  $7\,500 + 10\,500 + 13\,500 + 4\,500 + 6\,750 = 42\,750$
- O percentual do aeroporto II é $\frac{10\,500}{42\,750} \simeq 0{,}2456$ e a medida do ângulo pedido é aproximadamente $0{,}2456 \cdot 360° = 88{,}5°$.

**7.** Na tabela foram feitos arredondamentos de até 4 casas decimais.

**a)**

| Taxa de mortalidade infantil | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| 10 ⊢ 13 | 8 | 0,2963 = 29,63% |
| 13 ⊢ 16 | 2 | 0,0741 = 7,41% |
| 16 ⊢ 19 | 8 | 0,2963 = 29,63% |
| 19 ⊢ 22 | 6 | 0,2222 = 22,22% |
| 22 ⊢ 25 | 3 | 0,1111 = 11,11% |
| Total | 27 | 1,000 = 100% |

**b)**

**8.** **a)** Região **P**: $4{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 6\,750\,000$
Região **Q**: $7 \cdot 1\,500\,000 = 10\,500\,000$

**b)** A densidade de **P** é $\frac{6\,750\,000}{135\,000} = 50$
(50 habitantes por km²).

**9.** **a)** Muito insatisfeito: $0{,}08 \cdot 360° = 28{,}8° = 28° 48'$
Insatisfeito: $0{,}32 \cdot 360° = 115{,}2° = 115° 12'$
Satisfeito: $0{,}35 \cdot 360° = 126°$
Muito satisfeito: $0{,}25 \cdot 360° = 90°$

**b)** $0{,}35 \cdot 1800 = 630$

**c)** Consumidores insatisfeitos: $0{,}32 \cdot 1800 = 576$

$\frac{5}{12} \cdot 576 = 240$

$\frac{240}{1800} = \frac{2}{15}$; $\frac{2}{15}$ de 360° é igual a 48°; o acréscimo seria de 48°.

**10.** 2013

- Valor salarial para a categoria Ensino Superior: $12{,}5\% \cdot 400\,000 = 0{,}125 \cdot 400\,000 = 50\,000$; como havia 10 funcionários, o salário-base, em reais, dessa categoria era $\frac{50\,000}{10} = 5\,000$.
- Valor salarial para a categoria Ensino Médio: $75\% \cdot 400\,000 = 0{,}75 \cdot 400\,000 = 300\,000$; como havia 150 funcionários, o salário-base, em reais, dessa categoria era $\frac{300\,000}{150} = 2\,000$.
- Valor salarial para a categoria Ensino Fundamental: como $400\,000 - 50\,000 - 300\,000 = 50\,000$ e, como havia 50 funcionários nessa categoria, o salário-base, em reais, era $\frac{50\,000}{50} = 1\,000$.

2014

Vamos calcular os valores, em reais, da nova folha de pagamento:

- Ensino Superior: $5\,000 \cdot 20 = 100\,000$
- Ensino Médio: $2\,000 \cdot 180 = 360\,000$
- Ensino Fundamental: $1\,000 \cdot 70 = 70\,000$

Temos: $100\,000 + 360\,000 + 70\,000 = 530\,000$

Como os custos permanecem constantes, o faturamento da empresa deverá aumentar em 130 000 reais ($530\,000 - 400\,000 = 130\,000$).

Alternativa *b*.

**11.** Seja **x** o número de consumidores entrevistados.

**a)** Como $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$, segue que $\frac{1}{3}$ de **x** possui celular com plano pós-pago e o percentual pedido é $33{,}\overline{3}\%$.

**b)**
- Número de consumidores com plano pré-pago: $\frac{2x}{3}$
- Como $360° - 288° = 72°$ e $\frac{72°}{360°} = \frac{1}{5}$, o número de consumidores que possuem plano pré-pago e não acessam a internet é $\frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x}{15}$. Como $\frac{2}{15} = 0{,}1333...$, segue que o percentual pedido é $13{,}\overline{3}\%$.

**12. a)** $\frac{23 + 20 + 22 + 21 + 28 + 20}{6} = \frac{134}{6} = 22{,}33...$

**b)** $\frac{2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 9}{10} = \frac{84}{10} = 8{,}4$

**c)** $\frac{4 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2}{6} = \frac{0{,}8}{6} = 0{,}133...$

**d)** $\frac{4 + 2 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot 5 + 5{,}5 + 6{,}5}{8} = \frac{40}{8} = 5$

**e)** 3

**13.** $\frac{36 \cdot 270 + (54 - 36) \cdot 360}{54} = \frac{36 \cdot 270 + 18 \cdot 360}{54} = \frac{9\,720 + 6\,480}{54} = \frac{16\,200}{54} = 300$ (300 reais)

**14.** $\frac{a + 8 + 2a + 9 + (a + 1)}{5} = 6{,}8 \Rightarrow 18 + 4a = 34 \Rightarrow a = 4$

**15.** $\frac{2{,}8 \cdot 20 + 2{,}6 \cdot 30}{20 + 30} = \frac{56 + 78}{50} = 2{,}68$ (2,68 kg)

**16.** Média = 12

$\frac{\Sigma \text{ números}}{20} = 12 \Rightarrow \Sigma \text{ números} = 240$

**a)** $\frac{240 + 33}{21} = \frac{273}{21} = 13$

**b)** $\frac{240 - 50}{19} = \frac{190}{19} = 10$

**c)** $\frac{240 + 63 - 51}{20} = \frac{252}{20} = 12{,}6$

**17. a)** Mulheres, pois a média geral (1 475,20) está mais próxima da média feminina (1 408) do que da masculina (1 632,00).

**b)**
- Número de homens: **n**
  Média: 1 632
  $\frac{\Sigma \text{ salários (h)}}{n} = 1\,632{,}00 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \Sigma \text{ salários (h)} = 1\,632 \cdot n$ (1)
- Número de mulheres: $n + 32$
  Média: 1 408,00
  $\frac{\Sigma \text{ salários (m)}}{n + 32} = 1\,408 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \Sigma \text{ salários (m)} = 1\,408n + 45\,056$ (2)
- Geral: média: 1 475,20
  $\Rightarrow \frac{\Sigma \text{ salários (h)} + \Sigma \text{ salários (m)}}{n + (n + 32)} = 1\,475{,}20$

Usando (1) e (2), temos:

$\frac{1\,632 \cdot n + 1\,408 \cdot n + 45\,056}{2n + 32} = 1\,475{,}20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\,040n + 45\,056 = 2\,950{,}40 + 47\,206{,}40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 89{,}6n = 2\,150{,}40 \Rightarrow n = 24$

Assim, temos: 24 homens e 56 mulheres.

**18. a)** $30 + 18 + 7 + 3 + 2 = 60$

**b)** $\bar{x} = \frac{0 \cdot 30 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{60} = \frac{49}{60} = 0{,}81666... \simeq 0{,}82$

**c)** Como $\frac{18}{60} = 0{,}3$, a medida do ângulo é $0{,}3 \cdot 360° = 108°$

**19.** $\Sigma$ notas dos aprovados $= 80 \cdot 74{,}5 = 5\,960$

$\Sigma$ notas menores $= 40 \cdot 67 = 2\,680$

$\Sigma$ notas maiores $= 5\,960 - 2\,680 = 3\,280$

Média (maiores) $= \frac{3280}{40} = 82$

**20.** Originalmente: $5{,}5 = \frac{\Sigma \text{ notas}}{40} \Rightarrow \Sigma \text{ notas} = 220$. Com a correção feita, a nova média será:

$\frac{\Sigma \text{ notas} - 6{,}5 - 3{,}5 + 9{,}5 + 5{,}5}{40} = \frac{220 - 10 + 15}{40} =$
$= 5{,}625$
O acréscimo pedido é $5{,}625 - 5{,}5 = 0{,}125$

**21. a)** $\frac{7{,}5 \cdot 4 + 9{,}0 \cdot 3 + 9{,}5 \cdot 2}{4 + 3 + 2} = \frac{30 + 27 + 19}{9} = \frac{76}{9} \simeq$
$\simeq 8{,}44 < 8{,}5$; reprovado.

**b)** $\frac{8{,}3 \cdot 4 + 7{,}5 \cdot 2 + n \cdot 3}{9} \geqslant 8{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 33{,}2 + 15 + 3n \geqslant 76{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3n \geqslant 28{,}3 \Rightarrow n \geqslant 9{,}433...$
O candidato precisa tirar, no mínimo, 9,5.

**22. a)** $1 \cdot 2800 + 5 \cdot 1050 + 2 \cdot 1300 + 1 \cdot 1000 +$
$+ 3 \cdot 1200 = 15250$ (15 250 reais)

**b)** A média é $\frac{15250}{12} \simeq 1270{,}83$ (1 270,83 reais)

**c)** Seja **s** o salário de cada um dos seguranças.
Devemos ter:
$\frac{15250 + 2 \cdot s}{14} \leqslant 1300 \Rightarrow 2s + 15250 \leqslant 18200 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2s \leqslant 2950 \Rightarrow s \leqslant 1475$
O salário máximo que pode ser oferecido é R$ 1 475,00.

**23. a)** $(16\% + 12\% + 10\%) \cdot 400 = 0{,}38 \cdot 400 = 152$

**b)** $\bar{x} = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}32 + 3 \cdot 0{,}16 +$
$+ 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}10$
$\bar{x} = 0 + 0{,}2 + 0{,}64 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}50 = 2{,}3$
(2,3 filhos)

**24. a)** Turma **A**: $6{,}2 = \frac{\Sigma (A)}{30} \Rightarrow \Sigma (A) = 186$
Turma **B**: $7{,}2 = \frac{\Sigma (B)}{35} \Rightarrow \Sigma (B) = 252$
Turma **C**: $5{,}4 = \frac{\Sigma (C)}{55} \Rightarrow \Sigma (C) = 297$
A média pedida é: $\bar{x} = \frac{\Sigma (A) + \Sigma (B) + \Sigma (C)}{30 + 35 + 55} =$
$= \frac{186 + 252 + 297}{120} = \frac{735}{120} = 6{,}125$

**b)** Seja **n** o número pedido.
Devemos ter para a turma **D**: $5{,}0 = \frac{\Sigma (D)}{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma (D) = 5 \cdot n$
Reunindo as 4 turmas, temos:
$\bar{x} \leqslant 5{,}8 \Rightarrow \frac{735 + 5 \cdot n}{120 + n} \leqslant 5{,}8$
Como $n > 0$, podemos multiplicar os dois membros por $120 + n$, mantendo o sinal da desigualdade:
$735 + 5n \leqslant (120 + n) \cdot 5{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 735 + 5n \leqslant 696 + 5{,}8n \Rightarrow 39 \leqslant 0{,}8n \Rightarrow$
$\Rightarrow 48{,}75 \leqslant n$, isto é, $n \geqslant 48{,}75$
O menor inteiro que satisfaz é $n = 49$.

**25. a)** $\bar{x} = 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}20 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}10 =$
$= 0{,}6 + 0{,}75 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}60 = 3{,}5$
3,5 salários mínimos **(V)**

**b)** $\Sigma$ salários $= 12 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 =$
(onde $12 = 0{,}3 \cdot 40$; $10 = 0{,}25 \cdot 40$; $8 = 0{,}2 \cdot 40$; $6 = 0{,}15 \cdot 40$; $4 = 0{,}1 \cdot 40$)
$= 24 + 30 + 32 + 30 + 24 = 140$ (140 salários mínimos)
$140 \cdot$ R$ 788,00 = R$ 110 320,00 **(V)**

**c)** Média em salários mínimos: 3,5
Média em reais: $3{,}5 \cdot 788 = 2758$
$\Sigma$ salários = 110 320 reais
$\Sigma'$ salários = $(110320 + 100 \cdot 40)$ reais = 114 320 reais
Nova média $= \frac{114320}{40} = 2858 > 2800$ **(V)**

**d)** Nova média $= 0{,}55 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}15 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 6 =$
$= 1{,}65 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}6 = 3{,}8$ (3,8 salários mínimos)
$3{,}8 \cdot$ R$ 788,00 = R$ 2 994,40 **(F)**

**26.** Titulares: $2{,}04 = \frac{\Sigma \text{ alturas (t)}}{5} \Rightarrow \Sigma$ alturas (t) = 10,2 m
Reservas: $2{,}01 = \frac{\Sigma \text{ alturas (r)}}{7} \Rightarrow \Sigma$ alturas (r) = 14,07 m
Sejam **H** e **h** as alturas, respectivas, do jogador que se contundiu e do jogador que o substituiu.

- 2 cm = 0,02 m e 1,5 cm = 0,015 m;
- $\Sigma'$ alturas (t) $= 10{,}2 - H + h$
  Nova média (t) $= 2{,}04 + 0{,}02 = 2{,}06 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2{,}06 = \frac{10{,}2 - H + h}{5} \Rightarrow 10{,}3 = 10{,}2 - H + h \Rightarrow$
  $\Rightarrow H - h = -0{,}1$ (*)
- $\Sigma'$ alturas (r) $= 14{,}07 - h$
  Nova média (r) $= 2{,}01 - 0{,}015 = 1{,}995 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1{,}995 = \frac{14{,}07 - h}{6} \Rightarrow$
  $\Rightarrow h = 14{,}07 - 11{,}97 = 2{,}10 \overset{*}{\Rightarrow} H = 2{,}10 - 0{,}10 = 2$

**a)** 2 m **b)** 2,10 m

**27. a)** O número mínimo pedido corresponde ao caso em que todos os novos questionários são preenchidos com a nota máxima 5.
Seja **n** esse número.
$\Rightarrow$ 1º mês: $\bar{x} = 3{,}9 \Rightarrow \frac{\Sigma \text{ notas (1º)}}{2000} = 3{,}9 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma$ notas (1º) = 7800
Novos questionários: $\Sigma$ notas (2º) $= 5 \cdot n$
Devemos ter:
$4{,}6 = \frac{7800 + 5 \cdot n}{2000 + n} \Rightarrow 5n + 7800 = 9200 + 4{,}6n \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}4n = 1400 \Rightarrow n = 3500$

**b)** Considerando que a nota máxima é 5, para que a média fosse igual a 5 todos os questionários deveriam ser preenchidos com nota 5. Logo, não é possível.

**28.** $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{50}}{50} = 120 \Rightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i = 6000$ (*)

$\frac{(x_1 + 1) + (x_2 + 2) + (x_3 + 3) + ... + (x_{50} + 50)}{50} =$

$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{50}) + \overbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 50)}^{\text{P.A.}}}{50} =$

$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{50} x_i\right) + \frac{(1 + 50) \cdot 50}{2}}{50} \overset{*}{=} \frac{6000 + 1275}{50} = 145{,}5$

**29.** **a)** $\overline{M} = \frac{29}{9} = 3{,}222...$; Me = 3 (5º valor); Mo = 4.

**b)** $\overline{M} = \frac{106}{6} = 17{,}666...$; $Me = \frac{18 + 18}{2} = 18$; Mo = 18.

**c)** $\overline{M} = \frac{15}{5} = 3$; Me = 3; Mo = não há.

**d)** $\overline{M} = \frac{108}{8} = 13{,}5$; $Me = \frac{13 + 15}{2} = 14$; Mo = 15.

**e)** $\overline{M} = \frac{437}{10} = 43{,}7$; $Me = \frac{43 + 44}{2} = 43{,}5$;

há duas modas: 43 e 44.

**30.** $Me = \frac{5^{\underline{o}} \text{ tempo} + 6^{\underline{o}} \text{ tempo}}{2} = \frac{x + 16}{2} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 16 = 30 \Rightarrow x = 14$

$\overline{M} = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 5 + 8 + 9 + 14 + 16 + 18 + y + 23 + 26 = 140 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 20$

**31.** **a)** $(0{,}42 + 0{,}37) \cdot 3\,000 = 2\,370$ (2 370 entrevistados)

**b)**
- $\overline{x} = 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}37 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}05 =$ $= 0{,}42 + 0{,}74 + 0{,}48 + 0{,}2 = 1{,}84$ (1,84 banheiro)
- Mo = 1 banheiro (maior porcentagem registrada)
- Como são 3 000 valores, devemos determinar a média entre o 1 500º valor e o 1 501º valor, quando estes estão ordenados.

  Observe que:

  $0{,}42 \cdot 3\,000 = 1\,260$; do 1º valor ao 1 260º valor, todas as respostas são iguais a 1;

  $0{,}37 \cdot 3\,000 = 1\,110$; do 1261º valor até o 2 370º valor, encontramos respostas iguais a 2.

  Assim, tanto o 1 500º valor quanto o 1 501º valor são iguais a 2 $\Rightarrow Me = \frac{2 + 2}{2} = 2$.

**32.** **a)**
- $\overline{x} = \frac{17\,420 + 2\,346 + 785 + ... + 100{,}9}{10} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \overline{x} = \frac{24\,704{,}3}{10} = 2\,470{,}43$ (2 470,43 bilhões de dólares)
- $Me = \frac{5^{\underline{o}} \text{ valor} + 6^{\underline{o}} \text{ valor}}{2} = \frac{537{,}7 + 381{,}3}{2} =$

  $= \frac{919}{2} = 459{,}5$ (459,5 bilhões de dólares)

A média foi "afetada" por um valor discrepante, que é o PIB dos Estados Unidos (observe que o PIB americano é, aproximadamente, 7,5 vezes o PIB do Brasil, 2º na lista).

**b)** Eliminando do cálculo o PIB americano, teríamos:

$\overline{x} = \frac{24\,704{,}3 - 17\,420}{9} = \frac{7\,284{,}3}{9} \simeq 809{,}4$ (809,4 bilhões)

Observe que, incluindo os Estados Unidos, a média é $\frac{2\,470{,}43}{459{,}5} \simeq 5{,}4$ vezes o valor da mediana; excluindo os Estados Unidos, a média é $\frac{809{,}4}{459{,}5} \simeq 1{,}8$ vez o valor da mediana.

**33.** **a)** Ordenemos os valores dos bônus:

300 − 300 − ... − 300 − 600 − ...
1º ... 8º 9º

− 600 − 1000 − 1000 − ... − 1000
22º 23º ... 40º

Como n = 40 (par), temos que a mediana é a média entre o 20º e o 21º valores da relação acima, a saber $\frac{600 + 600}{2} = 600$.

**b)** Com n = 50 valores, a mediana é calculada fazendo-se a média entre o 25º valor e o 26º valor.

Para que a mediana resulte R$ 800,00 (média entre 600 e 1000), é preciso que o 25º valor seja R$ 600,00 e o 26º valor seja R$ 1000,00.

Como o 22º valor da relação do item *a* é 600, devemos acrescentar exatamente 3 valores iguais a 600. Teríamos:

... 600 − 600 − 600 − 600 − 1000 ... 1000
22º 23º 24º 25º 26º 50º

Assim, dos 10 funcionários restantes, 3 devem receber bônus de R$ 600,00 e 7 devem receber bônus de R$ 1 000,00.

**34.** **a)** $\overline{x} = \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 1}{8 + 4 + 11 + 1} = \frac{29}{24} = 1{,}208\overline{3} \simeq$

$\simeq 1{,}21$ (1,21 imóvel)

Como há 24 valores, a mediana é a média entre o 12º e o 13º valor, quando eles estão ordenados:

0 − 0 − ... − 0 − 1 − 1 − 1 − 1 − 2 − 2 − ... − 2 − 3
1º 8º 9º 12º 13º 23º 24º

$Me = \frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$ (1,5 imóvel)

Mo = 2 (onze valores iguais a 2)

**b)** A nova distribuição de valores seria:

0 − 0 − ... − 0 − 1 − ... − 1 − 2 − ... − 2 − 3
1º 13º 14º 17º 18º 28º 29º

Como temos 29 valores, a mediana é o 15º valor da relação acima, isto é, Me = 1.

**35.** **a)**
- $\overline{x} = \frac{42{,}7 + 44{,}5 + ... + 43{,}7}{10} = \frac{439{,}80}{10} =$

  $= 43{,}98$ (43,98 °C)
- Colocando os valores em ordem crescente:

  42,7 − 42,7 − 43 − 43 − [43,7 − 44,1] − 44,5 − − 45 − 45,4 − 45,7

  $Me = \frac{43{,}7 + 44{,}1}{2} = \frac{87{,}8}{2} = 43{,}9$ (43,9 °C)
- Há duas modas: 42,7 °C e 43 °C.

**b)** Seja **t** a temperatura pedida, devemos ter:

$\frac{439{,}8 + t}{11} = 43{,}98 + 0{,}12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 439{,}8 + t = 11 \cdot 44{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 45{,}3$ °C

**36.** **a)** • $\overline{x} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{18} =$

$= \frac{64}{18} = 3{,}555...$

- Mediana:

  Como $\frac{18}{2} = 9$, devemos calcular a média entre o 9º e 10º valores, quando todos se encontram ordenados. Temos:

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  $Me = \frac{3 + 3}{2} = 3$

- Moda: 3 (a frequência absoluta é 5)

**b)** Como 25 é ímpar, a mediana de uma relação com 25 valores corresponde ao 13º valor da relação ordenada.

- Como o lançamento do dado só resulta número inteiro, não é possível que a mediana seja 3,5.
- Até o 21º lançamento, temos os seguintes valores ordenados:

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Para que a mediana seja 5, o 13º valor da relação ordenada deve ser 5. Como já há 14 valores menores que 5 nos 21 primeiros lançamentos, não é possível que o 13º valor da relação ordenada seja igual a 5.

**c)** Sim.

Veja algumas possibilidades para os 4 últimos lançamentos:

- 4 − 5 − 5 e 6 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos:
- 1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6 − 6

  Me = 4

- 4 − 5 − 6 e 6, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6 − 6 − 6

  Me = 4

- 1 − 2 − 4 − 4, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Me = 4

- 2 − 3 − 4 − 5, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Me = 4

**37. a)** $\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6}{6} = 4$

$\sigma^2 = \frac{2 \cdot (3 - 4)^2 + 3 \cdot (4 - 4)^2 + (6 - 4)^2}{6} = \frac{2 + 4}{6} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

Amplitude: 6 − 3 = 3

**b)** $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$

$\sigma^2 = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \simeq 1{,}41$

Amplitude: 5 − 1 = 4

**c)** $\bar{x} = \frac{133}{7} = 19;$

$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + (-5)^2}{7} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{72}{7} \simeq 10{,}286 \Rightarrow \sigma \simeq 3{,}21$

Amplitude: 23 − 14 = 9

**d)** Todos os valores são iguais a 31 $\Rightarrow \bar{x} = 31 \Rightarrow \sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

Amplitude: 0

**e)** $\bar{x} = \frac{70}{10} = 7$

$\sigma^2 = \frac{(5-7)^2 + 2 \cdot (6-7)^2 + 3 \cdot (7 - 7)^2 + 4 \cdot (8-7)^2}{10}$

$\sigma^2 = \frac{4 + 2 + 4}{10} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

Amplitude: 8 − 5 = 3

**38. a)** $\bar{x} = \frac{3 \cdot 16 + 18 + 2 \cdot 20 + 24 + 28 + 3 \cdot 30 + 40}{12} = \frac{288}{12} = 24$ (24 reais)

$\sigma^2 = \frac{3 \cdot (16 - 24)^2 + (18 - 24)^2 + 2 \cdot (20 - 24)^2 + (28 - 24)^2 + 3 \cdot (24 - 30)^2 + (40 - 24)^2}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{192 + 36 + 32 + 16 + 108 + 256}{12} = \frac{640}{12} = 53{,}\overline{3} \Rightarrow \sigma^2 = 53{,}\overline{3}$ (reais)$^2$

**b)** $\sigma = \sqrt{53,3} \simeq 7,30$ (Aproximadamente 7,30 reais)

**c)** Amplitude: R$ 40,00 − R$ 16,00 = R$ 24,00

**39. a)** $\bar{x} = \frac{(0 \cdot 28 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4)}{40} = 0,4$ (0,4 erro/página)

Como há 40 valores, a mediana é a média entre o 20º e o 21º valores, quando eles estão ordenados, isto é, $\frac{0 + 0}{2} =$ $= 0$. (Note que do 1º ao 28º da relação ordenada todos os valores são zero.)

A moda é 0, pois esse valor possui maior frequência absoluta.

**b)** $\sigma^2 = \frac{(0 - 0,4)^2 \cdot 28 + (1 - 0,4)^2 \cdot 8 + (2 - 0,4)^2 \cdot 4}{40} = \frac{4,48 + 2,88 + 10,24}{40} = \frac{17,6}{40} = 0,44$ e

$\sigma = \sqrt{0,44} \simeq 0,66$ (0,66 erro/página)

**40. a)** Amplitude da turma **A**: $7 - 3 = 4$
Amplitude da turma **B**: $6 - 4 = 2$
Amplitude da turma **C**: $9 - 1 = 8$
Amplitude da turma **D**: $8 - 2 = 6$
A ordem seria: **B** − **A** − **D** − **C**

**b)** Turma **C**: $\bar{x} = \frac{9 + 1 + 6 + 5 + 4}{5} = 5$

$\sigma_C^2 = \frac{4^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0 + (-1)^2}{5} = \frac{34}{5} = 6,8 \Rightarrow \sigma_C \simeq 2,61$

Turma **D**: $\bar{x} = \frac{7 + 8 + 5 + 2 + 3}{5} = \frac{25}{5} = 5$

$\sigma_D^2 = \frac{(7 - 5)^2 + (8 - 5)^2 + 0^2 + (2 - 5)^2 + (3 - 5)^2}{5} = \frac{4 + 9 + 9 + 4}{5} = \frac{26}{5} \Rightarrow \sigma_D = 5,2 \Rightarrow \sigma_D \simeq 2,28$

Como $\sigma_D \simeq 2,28 < \sigma_C \simeq 2,61$, concluímos que a turma **D** é mais regular.

**c)** Turma **A**: $\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$

$\sigma_A^2 = \frac{(-2)^2 + 0 + 2^2 + 0 + 0}{5} = \frac{8}{5} = 1,6 \Rightarrow \sigma_A \simeq 1,26$

Turma **B**: $\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$

$\sigma_B^2 = \frac{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \sigma_B \simeq 0,89$

Como $\sigma_B \simeq 0,89 < \sigma_A \simeq 1,26$, concluímos que a turma **B** é mais regular.

**41.** Região Sudeste:

$\bar{x} = \frac{21,6}{4} = 5,4$

$\sigma^2 = \frac{2 \cdot (3,7 - 5,4)^2 + (7,6 - 5,4)^2 + (6,6 - 5,4)^2}{4} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{5,78 + 4,84 + 1,44}{4} = \frac{12,06}{4} = 3,015 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,015} \simeq 1,74$

Região Centro-Oeste:

$\bar{x} = \frac{25,3}{4} = 6,325$

$\sigma^2 = \frac{(6,325 - 3,2)^2 + (6,325 - 7,1)^2 + (6,325 - 7,8)^2 + (6,325 - 7,2)^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9,765625 + 0,600625 + 2,175625 + 0,765625}{4} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{13,3075}{4} = 3,326875 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,326875} \simeq 1,82$

O conjunto de valores mais homogêneo é o da Região Sudeste, pois o desvio padrão (Sudeste) é 1,74, e este é menor que o desvio padrão (Centro-Oeste), que é 1,82.

**42.** Pedro: $\bar{x} = \frac{7 + 4,5 + 5,5 + 5 + 3}{5} = 5$

$\sigma^2 = \frac{2^2 + (-0,5)^2 + 0,5^2 + 0^2 + (-2)^2}{5} = \frac{8,5}{5} = 1,7$

Paulo: $\bar{x} = \frac{5 + 5,5 + 3 + 4 + 7,5}{5} = \frac{25}{5} = 5$

$\sigma^2 = \frac{0^2 + 0,5^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2,5^2}{5} = \frac{11,5}{5} = 2,3$

Como $\sigma^2$ (Pedro) $< \sigma^2$ (Paulo), Pedro obteve desempenho mais homogêneo.

**43.** **a)** $\bar{x} = \dfrac{1\,200 \cdot 10 + 1\,440 \cdot 6 + 2\,400 \cdot 4}{20} = \dfrac{30\,240}{20} = 1\,512$; a média salarial é R$ 1 512,00.

$$\sigma^2 = \frac{10 \cdot (1\,512 - 1\,200)^2 + 6 \cdot (1\,512 - 1\,440)^2 + 4 \cdot (1\,512 - 2\,400)^2}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{973\,440 + 31\,104 + 3\,154\,176}{20} = 207\,936 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{207\,936} = 456$; o desvio padrão é R$ 456,00.

**b)** O salário médio irá diminuir, pois os salários dos novos funcionários são inferiores ao salário médio dos 20 funcionários antigos.

**44.** $\bar{x} = \dfrac{8{,}7 + 8{,}5 + ... + 8{,}7}{12} = \dfrac{104{,}4}{12} = 8{,}7$

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}5^2 + 0{,}1^2 + 0{,}2^2 + (-0{,}1)^2}{12} + \frac{0 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}3)^2 + 0 + (-0{,}1)^2 + 0}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{2 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}09}{12} = \frac{0{,}46}{12} = 0{,}038\overline{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma \simeq 0{,}196$

$[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma] = [8{,}7 - 0{,}196; 8{,}7 + 0{,}196] = [8{,}504; 8{,}896]$

Os valores que **não** pertencem a esse intervalo são 8,5; 9,2; 8,9 e 8,4. Logo, temos 4 alunos.

**45.** Vamos calcular as médias dos cinco candidatos nos quatro "quesitos".

Candidato **A**: $\bar{x} = \dfrac{27{,}5}{4} = 6{,}875$

Candidato **B**: $\bar{x} = \dfrac{26{,}5}{4} = 6{,}625$

Candidato **C**: $\bar{x} = \dfrac{23{,}5}{4} = 5{,}875$

Candidato **D**: $\bar{x} = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$

Candidato **E**: $\bar{x} = \dfrac{27{,}5}{4} = 6{,}875$

- Pelo 1º critério, os candidatos **A**, **B** e **E** continuam na disputa.
- Pelo 2º critério, **B** e **E** continuam na disputa (**A** foi eliminado, pois obteve 6 na dinâmica; **B** e **E** obtiveram, cada um, 7,5).
- Média das provas de **B**: $\dfrac{7 + 5 + 7}{3} = 6{,}\overline{3}$

  $\sigma_B^2 = \dfrac{(7 - 6{,}\overline{3})^2 \cdot 2 + (5 - 6{,}\overline{3})^2}{3} \simeq \dfrac{0{,}889 + 1{,}777}{3} \simeq 0{,}89$
- Média das provas de **E**: $\dfrac{7{,}5 + 4{,}0 + 8{,}5}{3} = 6{,}\overline{6}$

  $\sigma_E^2 = \dfrac{(7{,}5 - 6{,}\overline{6})^2 + (4 - 6{,}\overline{6})^2 + (8{,}5 - 6{,}\overline{6})^2}{3} \simeq \dfrac{0{,}694 + 7{,}111 + 3{,}361}{3} \Rightarrow \sigma_E^2 \simeq 3{,}72$

  Pelo 3º critério, o candidato escolhido é **B**.

**46.** 1º semestre:

$\bar{x} = \dfrac{12 + 8 + 7}{3} = 9$

$\sigma^2 = \dfrac{(12 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (7 - 9)^2}{3} = \dfrac{9 + 1 + 4}{3} = \dfrac{14}{3}$

2º semestre:

Seja **p** o percentual pedido.

$\bar{x} = \dfrac{9 + 4 + p}{3} = \dfrac{13 + p}{3}$

$$\sigma^2 = \frac{\left(9 - \frac{13 + p}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{13 + p}{3}\right)^2 + \left(p - \frac{13 + p}{3}\right)^2}{3} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\left(\frac{14 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{2p - 13}{3}\right)^2}{3}$$

Como os desvios padrão devem ser iguais, as variâncias também devem ser iguais:

$$\frac{14}{3} = \frac{\left(\frac{14 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{2p - 13}{3}\right)^2}{3} \Rightarrow 14 = \frac{196 - 28p + p^2 + 1 + 2p + p^2 + 4p^2 - 52p + 169}{9} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 126 = 366 + 6p^2 - 78p \Rightarrow p^2 - 13p + 40 = 0 \Rightarrow p = 5$ ou $p = 8$

Como **p** deve ser menor que 7%, devemos ter p = 5%.

**47.** **a)** $\bar{x} = \dfrac{2 + 4 + 6}{3} = 4$

$DM = \dfrac{|2 - 4| + |4 - 4| + |6 - 4|}{3} = \dfrac{2 + 0 + 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

**b)** $\bar{x} = \dfrac{2 + 3 + 5 + 4 + 2 \cdot 8}{6}$

$\bar{x} = \dfrac{30}{6} = 5$

$DM = \dfrac{|-3| + |-2| + |0| + |-1| + 2 \cdot |3|}{6} = \dfrac{3 + 2 + 1 + 6}{6} = 2$

**c)** $\bar{x} = \dfrac{20 + 25 + 15 + 35 + 30}{5} = \dfrac{125}{5} = 25$

$DM = \dfrac{|-5| + |0| + |-10| + |10| + |5|}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$

**48.** Região **A**: $\bar{x} = \dfrac{7 + 4{,}5 + 5{,}5 + 5{,}0 + 3{,}0}{5} = 5$

$DM = \dfrac{|7 - 5| + |4{,}5 - 5| + |5{,}5 - 5| + |5 - 5| + |3 - 5|}{5} = \dfrac{2 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2}{5} = 1{,}0$

Região **B**: $\bar{x} = \dfrac{5 + 8{,}5 + 3{,}0 + 1{,}0 + 7{,}5}{5} = 5$

$DM = \dfrac{|5 - 5| + |8{,}5 - 5| + |3 - 5| + |1 - 5| + |7{,}5 - 5|}{5} = \dfrac{0 + 3{,}5 + 2 + 4 + 2{,}5}{5} = 2{,}4$

Os valores de **A** formam um conjunto mais homogêneo que os de **B**.

**49.** $\bar{x} = \dfrac{200 \cdot 8 + 450 \cdot 12 + 800 \cdot 5 + 1\,500 \cdot 3 + 2\,500 \cdot 2}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{1\,600 + 5\,400 + 4\,000 + 4\,500 + 5\,000}{30} = \dfrac{20\,500}{30} = 683{,}3$

Arredondando para o inteiro mais próximo, obtemos 683 reais.

$DM = \dfrac{8 \cdot |-483| + 12 \cdot |-233| + 5 \cdot |117| + 3 \cdot |817| + 2 \cdot |1\,817|}{30}$

$DM = \dfrac{3864 + 2796 + 585 + 2451 + 3634}{30} = \dfrac{13\,330}{30} \simeq 444{,}33$. Arredondando para o inteiro mais próximo, obtemos R$ 444,00.

**50.** **a)** $50 + 85 + 40 + 25 + 20 = 220$

**b)** $\bar{x} = \dfrac{50 \cdot 400 + 85 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 25 \cdot 1\,000 + 20 \cdot 1\,200}{(50 + 85 + 40 + 25 + 20)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{20\,000 + 51\,000 + 32\,000 + 25\,000 + 24\,000}{220} = \dfrac{152\,000}{220} \simeq 690{,}90$

**c)** De 500 a 700 reais.

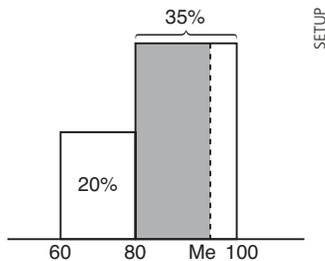
**d)** $p = \dfrac{40 + 25 + 20}{220} = \dfrac{85}{220} = 0{,}3864$

Aproximadamente 38,64%.

**51.** **a)** $(20\% + 35\% + 30\%) \cdot 200 = 0{,}85 \cdot 200 = 170$

**b)** $\bar{x} = 0{,}2 \cdot 70 + 0{,}35 \cdot 90 + 0{,}30 \cdot 110 + 0{,}15 \cdot 130 = 14 + 31{,}50 + 33 + 19{,}5 = 98 \Rightarrow \bar{x} = 98$ kg

**c)**

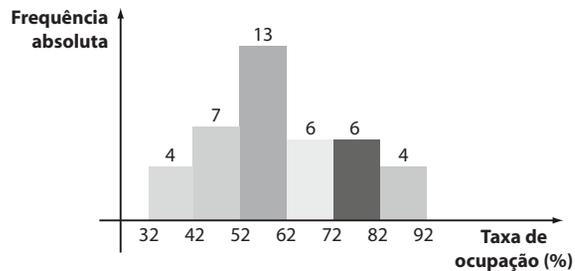
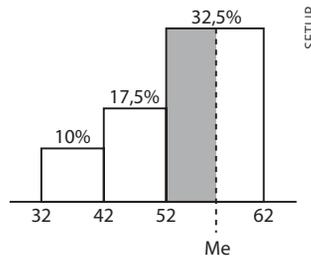
35%
20%
60 80 Me 100
SETUP

$\dfrac{Me - 80}{30\%} = \dfrac{100 - 80}{35\%} \Rightarrow Me \simeq 97{,}1$ kg

**d)** $\sigma^2 = 0{,}2 \cdot (70 - 98)^2 + 0{,}35 \cdot (90 - 98)^2 + 0{,}3 \cdot (110 - 98)^2 + 0{,}15 \cdot (130 - 98)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = 156{,}8 + 22{,}4 + 43{,}2 + 153{,}6 \Rightarrow \sigma^2 = 376 \Rightarrow \sigma = \sqrt{376} \simeq 19{,}4 \Rightarrow \sigma = 19{,}4$ kg

**52.** **a)** $5 \cdot 1250 + 16 \cdot 1083 + 27 \cdot 762 + 38 \cdot 541 + 49 \cdot 509 + 60 \cdot 321 =$
$= 6250 + 17328 + 20574 + 20558 + 24941 + 19260 = 108911{,}00$ (108 911,00 reais)

**b)** $15 \cdot 1250 + 26 \cdot 1083 + 37 \cdot 762 + 48 \cdot 541 + 59 \cdot 509 + 70 \cdot 321 =$
$= 18750 + 28158 + 28194 + 25968 + 30031 + 22470 = 153571{,}00$ (153 571,00 reais)

**53.** **a)**

**b)** • Taxa mediana:
A mediana encontra-se na 3ª faixa do histograma do item anterior, pois a frequência absoluta acumulada nas três primeiras faixas é $4 + 7 + 13 = 24 > 20$.

$$\frac{Me - 52}{22{,}5\%} = \frac{62 - 52}{32{,}5\%} \Rightarrow Me = 58{,}92\%$$

A classe modal é o intervalo: $[52, 62[ = 52 \vdash 62$

• Média:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 37 + 7 \cdot 47 + 13 \cdot 57 + 6 \cdot 67 + 6 \cdot 77 + 4 \cdot 87}{40} \Rightarrow \bar{x} = \frac{148 + 329 + 741 + 402 + 462 + 348}{40} \Rightarrow$$

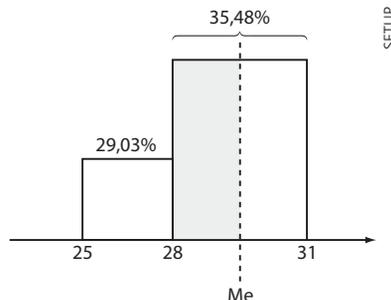
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2430}{40} = 60{,}75\%$$

**c)** $$\sigma^2 = \frac{4 \cdot (37 - 60{,}75)^2 + 7 \cdot (47 - 60{,}75)^2 + 13 \cdot (57 - 60{,}75)^2 + 6 \cdot (67 - 60{,}75)^2 + 6 \cdot (77 - 60{,}75)^2 + 4 \cdot (87 - 60{,}75)^2}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \simeq 208{,}44 \Rightarrow \sigma = 14{,}44\%$$

**54.** **a)** $$\bar{x} = \frac{26{,}5 \cdot 9 + 29{,}5 \cdot 11 + 32{,}5 \cdot 7 + 35{,}5 \cdot 4}{9 + 11 + 7 + 4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{238{,}5 + 324{,}5 + 227{,}5 + 142}{31} = \frac{932{,}5}{31} = 30{,}08 \Rightarrow \bar{x} = 30{,}08\ °C$$

• Mediana:
A mediana encontra-se no 2º intervalo, pois a porcentagem acumulada nos dois primeiros intervalos é:

$$\frac{9}{31} + \frac{11}{31} \simeq 0{,}2903 + 0{,}3548 = 0{,}6451 = 64{,}51\%$$

$$\frac{Me - 28}{(50\% - 29{,}03\%)} = \frac{31 - 28}{35{,}48\%} \Rightarrow \frac{Me - 28}{20{,}97\%} = \frac{3}{35{,}48\%} \Rightarrow Me \simeq 29{,}77\ °C$$

Classe modal: $28\ °C \vdash 31\ °C$

**b)** $\sigma^2 = \dfrac{9 \cdot (26,5 - 30,08)^2 + 11 \cdot (29,5 - 30,08)^2 + 7 \cdot (32,5 - 30,08)^2 + 4 \cdot (35,5 - 30,08)^2}{31} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 \simeq \dfrac{115,35 + 3,7 + 40,99 + 117,51}{31} = \dfrac{277,55}{31} \Rightarrow \sigma^2 \simeq 8,95\ (°C)^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8,95\ (°C)^2} \Rightarrow \sigma \simeq 2,99\ °C$

**55. a)** Total da amostra: 11 + 18 + 22 + 13 + 8 + 5 + 2 + 1 = 80

Entre meia hora e uma hora e meia: 18 + 22 = 40

O percentual pedido é: $\dfrac{40}{80} = 50\%$

**b)** $\bar{x} = \dfrac{15 \cdot 11 + 45 \cdot 18 + 75 \cdot 22 + 105 \cdot 13 + 135 \cdot 8 + 165 \cdot 5 + 195 \cdot 2 + 225 \cdot 1}{11 + 18 + 22 + 13 + 8 + 5 + 2 + 1}$

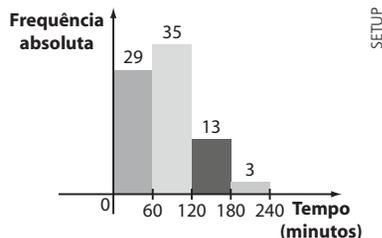
$\bar{x} = \dfrac{6\,510}{80} \Rightarrow \bar{x} = 81,375$ minutos.

A média é aproximadamente 81,4 minutos.

- Até a 2ª classe, concentram-se 36,25% dos dados $\left(\dfrac{11 + 18}{80} = 36,25\%\right)$ e até a 3ª classe concentram-se 63,75% das observações $\left(\dfrac{11 + 18 + 22}{80} = 63,75\%\right)$.

Logo, a mediana encontra-se no intervalo 60 ⊢ 90. Temos:

$\dfrac{Me - 60}{(50 - 36,25)\%} = \dfrac{90 - 60}{27,5\%} \Rightarrow Me = 75$ minutos

**c)**

$\bar{x} = \dfrac{30 \cdot 29 + 90 \cdot 35 + 150 \cdot 13 + 210 \cdot 3}{80} = 82,50 \Rightarrow \bar{x} = 82,50$ minutos

- Até o primeiro intervalo concentram-se 36,25% dos dados $\left(\dfrac{29}{80} = 36,25\%\right)$; os dois primeiros intervalos concentram 80% dos dados $\left(\dfrac{29 + 35}{80} = 80\%\right)$.

Assim, a mediana se encontra no segundo intervalo.

Temos:

$\dfrac{Me - 60}{(50 - 36,25)\%} = \dfrac{120 - 60}{43,75\%} \Rightarrow$

$\Rightarrow Me = 78,9$ minutos

$\sigma^2 = \dfrac{(82,5 - 30)^2 \cdot 29 + (82,5 - 90)^2 \cdot 35 + (82,5 - 150)^2 \cdot 13 + (210 - 82,5)^2 \cdot 3}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{189\,900}{80} = 2\,373,75 \Rightarrow \sigma \simeq 48,7$ minutos

## Desafio

**a)** Calculemos a nova média $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + \ldots + (x_n + 2)}{n} = \underbrace{\boxed{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}}_{\text{média original}} + \frac{\overbrace{2 + 2 + \ldots + 2}^{n \text{ parcelas}}}{n},$$

isto é, $\bar{x}' = \bar{x} + \dfrac{n \cdot 2}{n} \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + 2$ (a média aumenta em duas unidades)

Calculemos a nova variância $(\sigma')^2$:

$(\sigma')^2 = \dfrac{[x_1 + 2 - (\bar{x} + 2)]^2 + [x_2 + 2 - (\bar{x} + 2)]^2 + \ldots + [x_n + 2 - (\bar{x} + 2)]^2}{n}$

$(\sigma')^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2$; a variância não se altera.

Consequentemente, o desvio padrão também não se altera.

**b)** A nova média é:

$$\overline{x}' = \frac{2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n}{n} = 2\boxed{\frac{(x_1 + 2x_2 + \ldots + x_n)}{n}} =$$

média original

$= 2\overline{x}$; a média fica multiplicada por 2.

A nova variância é:

$$(\sigma')^2 = \frac{(2x_1 - 2\overline{x})^2 + (2x_2 - 2\overline{x})^2 + \ldots + (2x_n - 2\overline{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{2^2\,[(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2]}{n} =$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}_{\sigma^2}$$

Assim; $(\sigma')^2 = 4 \cdot \sigma^2$, isto é, a variância fica multiplicada por 4. Como o desvio padrão ($\sigma$) é a raiz quadrada de variância, temos $\sigma' = \sqrt{4 \cdot \sigma^2} = 2 \cdot \sigma$, ou seja, o desvio padrão fica multiplicado por 2.

**c)** A nova média é:

$$\overline{x}' = \frac{0{,}8x_1 + 0{,}8x_2 + \ldots + 0{,}8x_n}{n} =$$

$$= 0{,}8 \cdot \left[\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}\right] = 0{,}8 \cdot \overline{x}$$

Assim, a média é reduzida em 20% (pois $\overline{x}' = 0{,}8\,\overline{x}$; isso significa que a média sofreu uma redução de 20%).

A nova variância é:

$$\sigma'^2 =$$

$$= \frac{(0{,}8x_1 - 0{,}8\overline{x})^2 + (0{,}8x_2 - 0{,}8\overline{x})^2 + \ldots + (0{,}8x_n - 0{,}8\overline{x})^2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 =$$

$$= \frac{0{,}8^2 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + 0{,}8^2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + 0{,}8^2 \cdot (x_n - \overline{x})^2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = 0{,}64 \cdot \left[\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = 0{,}64 \cdot \sigma^2$$

Isso significa que a variância sofreu uma redução de 36%.

Como $\sigma' = \sqrt{\sigma'^2} = \sqrt{0{,}64\,\sigma^2} = 0{,}8\sigma$, podemos dizer que o desvio padrão é reduzido em 20%.

## CAPÍTULO 6 Matemática Financeira

### Exercícios

**1.** $0{,}15 \cdot 68 = 10{,}20$
$68 - 10{,}20 = 57{,}80$ (57,80 reais)

**2.** **a)** $40 \cdot 1{,}12 = 44{,}80$ (44,80 reais)
**b)** $150 \cdot 1{,}12 = 168{,}00$ (168,00 reais)

**3.** **a)** $\frac{40}{320} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ (12,5% de aumento)
**b)** $1{,}35 \cdot 320 = 432$ (432 reais)

**4.** **a)** O desconto, por diária, é de R$ 40,00; percentualmente temos um desconto de:
$\frac{40}{250} = 0{,}16 = 16\%$

**b)**
- Preço de 7 diárias: $7 \cdot 210 = 1\,470$ (1 470 reais)
- $1{,}5\% \cdot 1\,470 = 22{,}05$ (22,05 reais)
- Valor total a ser pago, em reais:
$1\,470 + 22{,}05 + 15{,}00 = 1\,507{,}05$

**5.** Observe o que deve ser "digitado" na calculadora:
**a)** 1 , 2 8 − 7 , 8 % = 1,180 16
**b)** 1 4 8 0 + 1 1 , 3 % = 1647,24
**c)** 2 8 5 0 − 1 7 , 5 % = 2351,25

**6.** Produto **A**: $\frac{0{,}10}{0{,}40} = \frac{1}{4} = 25\%$
Produto **B**: $\frac{0{,}30}{1{,}50} = \frac{1}{5} = 20\%$
Produto **C**: $\frac{0{,}15}{0{,}60} = \frac{1}{4} = 25\%$
Assim, $B < A = C$

**7.** **a)** $\begin{cases} 124\% \text{ — } 4\,340 \\ 100\% \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 3\,500$ (3 500 reais)

**b)**
- Antes do aumento, o imposto era de $0{,}16 \cdot 3\,500 = 560$ (560 reais)
- Depois do aumento, o imposto passará a ser de $0{,}16 \cdot 4\,340 = 694{,}40$ (694,40 reais)

Raul pagará, a mais, 134,40 reais
$(694{,}40 - 560{,}00 = 134{,}40)$

**8.** **a)** $\begin{cases} \text{R\$ } 150{,}00 \text{ — } 12\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,250$ (1 250 reais)
**b)** $1\,250 - 150 = 1\,100$ (1 100 reais)

**9.** **a)** $\begin{cases} 1\,075 \text{ m}^3 \text{ — } 86\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,250 \text{ m}^3$
**b)** A redução deverá ser de 75 m³; percentualmente, temos:
$\begin{cases} 1\,075 \text{ m}^3 \text{ — } 100\% \\ 75 \text{ m}^3 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x \simeq 6{,}98\%$

**10.** **a)** $p + 0{,}38p = 1{,}38p$
**b)** $p + 0{,}105p = 1{,}105p$
**c)** $p - 0{,}03p = 0{,}97p$
**d)** $p - 0{,}124p = 0{,}876p$
**e)** $p + 0{,}1p = 1{,}1p$;
$1{,}1p + 0{,}2 \cdot 1{,}1p = 1{,}32p$
**f)** $p - 0{,}2p = 0{,}8p$;
$0{,}8p - 0{,}15 \cdot 0{,}8p = 0{,}68p$
**g)** $p + 0{,}3p = 1{,}3p$;
$1{,}3p - 0{,}2 \cdot 1{,}3p = 1{,}04p$
**h)** $p + 0{,}1p = 1{,}1p$;
$1{,}1p + 0{,}1 \cdot 1{,}1p = 1{,}21p$;
$1{,}21p + 0{,}1 \cdot 1{,}21p = 1{,}331p$

**11.** **a)** $50 + 0,2 \cdot 50 = 60$;
$60 - 0,2 \cdot 60 = 48$
O preço do produto não volta a seu valor original, beneficiando o cliente que pagou R$ 2,00 a menos.

**b)** $\frac{R\$\ 2,00}{R\$\ 50,00} = 0,04 = 4\%$

**12.** Seja **x** o salário bruto de Cláudio e a prestação do apartamento consome 0,3x; com o aumento de 10% passará a consumir $1,1 \cdot 0,3x = 0,33x$

**a)** $\frac{0,33x}{x} = 0,33 = 33\%$

**b)** $\frac{0,33x}{1,05x} = 0,3143 = 31,43\%$

**c)** $\frac{0,33x}{1,3x} = 0,2538 = 25,38\%$

Observação: O problema também pode ser resolvido atribuindo-se um valor arbitrário para o salário de Cláudio.

**13.** Seja **p** o preço comum desse produto nos três supermercados.

- Ao optar por (I), o cliente paga $p + 0,5p = 1,5p$ por duas unidades; o preço de cada unidade sairia por $\frac{1,5p}{2} = 0,75p$.
- Ao optar por (II), o cliente paga 2p por três unidades; o preço de cada unidade sairia por $\frac{2p}{3} \simeq 0,666...p = 0,\overline{6}p$.
- Ao optar por (III), o cliente paga 4p por cinco unidades, o preço de cada unidade seria $\frac{4p}{5} = 0,8p$.

Opção mais vantajosa: II

Opção menos vantajosa: III

**14.** **a)** **X**: Ao levar 12, na promoção, pagará por 9; $9 \cdot 1,40 = 12,60$

**Y**: $0,85 \cdot 1,40 = 1,19$/unidade; ao todo pagará $12 \cdot 1,19 = 14,28$

**Z**: Ao levar 12, na promoção, pagará por 10; $10 \cdot 1,40 = 14,00$

A opção mais econômica, para o consumidor, é comprar no supermercado **X**.

**b)** **X**: 4 sabonetes serão adquiridos pelo preço de 3 na promoção; os demais 3 não entram na promoção. O custo é: $6 \cdot 1,40 = 8,40$

**Y**: $7 \cdot 1,19 = 8,33$

**Z**: 6 sabonetes serão adquiridos pelo preço de 5; o outro não entra na promoção. O custo é: $6 \cdot 1,40 = 8,40$. A opção mais vantajosa é no supermercado **Y**.

**15.** **a)** $12 \cdot 4 + 8 \cdot 3,40 + 15 \cdot 2 = 105,20$ (105,20 reais)

**b)** $12 \cdot (1,03 \cdot 4) + 8 \cdot (0,95 \cdot 3,40) + 15 \cdot (1,06 \cdot 2,00) =$
$= 49,44 + 25,84 + 31,80 = 107,08$

Como $107,08 - 105,20 = 1,88$, temos um acréscimo percentual de $\frac{1,88}{105,20} \simeq 0,0179 = 1,79\%$

**16.** **x**: valor inicial do plano
1,28x: valor do plano após o reajuste autorizado
1,10x: valor do plano após o reajuste dado pela seguradora
$1,28x - 1,10x = 0,18x$
$\frac{0,18x}{1,10x} \simeq 0,1636 = 16,36\%$

**17.** Vamos determinar o valor total (**v**) da conta, sem os 10% de acréscimo:

$\begin{cases} 70,40 \text{ — } 110\% \\ v \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow v = 64 \text{ (64 reais)}$

Para cada amigo, o valor seria $\frac{64 \text{ reais}}{4} = 16$ reais.

**18.** $450 \text{ mil} - 120 \text{ mil} = 330 \text{ mil}$;

$\begin{cases} 330 \text{ mil — } x \\ 120 \text{ mil — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 275\%$

**19.** **a)** $\frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$

**b)** $\frac{28}{168} = 0,1\overline{6} = 16,\overline{6}\%$

**c)** $\frac{0,27}{0,90} = 0,30 = 30\%$

**d)** $\frac{208}{200} = 1,04 = 104\%$

**20.**
- Valor da última conta: **v**
- Valor que o usuário recebeu: $v + 1,2 \cdot v = 2,2v$
- Valor da conta após a correção: $\frac{2,2v}{2} = 1,1v$
- Acréscimo percentual: $\frac{1,1v - v}{v} = \frac{0,1v}{v} = 0,1 = 10\%$

**21.** **a)** $J = 3 \cdot 0,04 \cdot 220 = 26,40$ (26,40 reais)
**b)** $J = 12 \cdot 0,05 \cdot 540 = 324,00$ (324,00 reais)
**c)** $J = 8 \cdot 0,12 \cdot 80 = 76,80$ (76,80 reais)
**d)** $J = 24 \cdot 0,02 \cdot 490 = 235,20$ (235,20 reais)

**22.** Os juros do empréstimo são: $4 \cdot 0,06 \cdot 250 = 60$ (60 reais).
O montante do empréstimo é: $250 + 60 = 310$ (310 reais).

**23.** 1º modo: $M = 240$; $c = 200$; $n = 4$; $i = ?$
$240 = 200 \cdot (1 + i \cdot 4) \Rightarrow 1,2 = 1 + 4i \Rightarrow 0,2 = 4i \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 0,05 \Rightarrow 5\%$ ao mês

2º modo: Os juros recebidos são de 40,00 reais; percentualmente, temos: $\frac{40}{200} = 0,2 = 20\%$ de juros no período de 4 meses. Como temos juros simples, concluímos que a taxa mensal de juros é $\frac{20\%}{4} = 5\%$.

**24.** **a)** Em regime de juros simples, a taxa de 48% ao ano equivale a 4% ao mês ($4 \cdot 12 = 48$).
$J = 5 \cdot 0,04 \cdot 400 = 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 400 + 80 = 480$ (480 reais)

**b)** Em regime de juros simples, a taxa de 72% ao semestre equivale a $\frac{72\%}{6} = 12\%$ ao mês.
$J = 8 \cdot 0,12 \cdot 180 = 172,80 \Rightarrow M = 180 + 172,80 =$
$= 352,80 \Rightarrow M = 352,80$ reais

**c)** $J = \underbrace{90}_{3 \text{ meses} = 90 \text{ dias}} \cdot 0,0025 \cdot 5000 = 1125$
$M = 5000 + 1125 = 6125 \Rightarrow M = 6125$ reais

**25.** Multa: $0,02 \cdot 48 = 0,96$
Juros: $\underbrace{4}_{\text{4 dias}} \cdot \frac{0,033}{100} \cdot 48 = 0,063$
Total de acréscimos: R$ 1,02
Na outra situação: $J = 8 \cdot 0,00033 \cdot 48 \simeq 0,127 \simeq 0,13$; total: $0,96 + 0,13 \simeq 1,09$

**26.**
- Valor da multa: $0,02 \cdot 255 = 5,10$
- Juros totais cobrados: $7,14 - 5,10 = 2,04$
- Juros diários: $\frac{0,04}{100} \cdot 255 = 0,102$
- Número de dias em atraso: $\frac{2,04}{0,102} = 20$

**27. a)** 1º modo: $2C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 2 = 1 + 0,05n \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 20$ meses
2º modo: Supondo um capital de 100, devemos obter um montante de 200, isto é, o total de juros é de $200 - 100 = 100$
Como o juro mensal é de 5% de 100, ou seja, de 5, o número de meses pedido é $100 \div 5 = 20$.
**b)** $3C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 3 = 1 + 0,05n \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 40$ meses
**c)** $10C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 10 = 1 + 0,05n \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 180$ meses
**d)** $M = C + 0,8C = 1,8C$
Daí:
$1,8C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1,8 = 1 + 0,05n \Rightarrow n = 16$ meses

**28. a)** O capital do financiamento é (900 − 500) reais = 400 reais; o montante é 500 reais; portanto, são cobrados 100 reais de juros.
Percentualmente, os juros mensais são de:
$\frac{100}{400} = 0,25 = 25\%$
**b)** 1º modo: A taxa mensal de juros simples seria
$\frac{25\%}{2} = = 12,5\%$
2º modo: $500 = 400 \cdot (1 + 2i) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1,25 = 1 + 2i \Rightarrow i = 0,125 = 12,5\% \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 12,5\%$ a.m.

**29. a)** $0,95 \cdot 2\,400 = 2\,280$
**b)** Como a entrada é de 1 200 reais e o valor à vista é de 2 280 reais, o capital do financiamento é igual à diferença 2 280 − 1 200, ou seja, 1 080 reais (isto é, se não houvesse cobrança de juros, depois de um mês Lia deveria pagar 1 080 reais). Como o valor da 2ª parcela é de 1 200 reais, conclui-se que a loja embute (1 200 − 1 080) reais = 120 reais de juros, que percentualmente correspondem à taxa mensal de: $\frac{120}{1\,080} = 0,1111... = 11,1\%$

**30.** Os juros da dívida são $1,35x - x = 0,35x$; em porcentagem, temos $\frac{0,35x}{x} = 35\%$. Como a dívida se estendeu por 10 meses, os juros simples, ao mês, são $35\% \div 10 = 3,5\%$.

**31.** **x**: capital
$J_1 = 18 \cdot 0,02 \cdot 0,7x = 0,252x$
$J_2 = 4 \cdot 0,18 \cdot 0,3x = 0,216x$
Como $J_1 + J_2 = 14\,040$, temos: $0,252x + 0,216x =$ $= 14\,040 \Rightarrow x = \frac{14\,040}{0,468} = 30\,000 \Rightarrow x = 30\,000$ reais

**32. a)** $\frac{3}{11}$ de 22 000 é igual a 6 000 reais
Daí:
$M = C \cdot (1 + i \cdot n) \Rightarrow$
$\Rightarrow 6\,000 = C \cdot (1 + 0,025 \cdot 24) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1,6C = 6\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 3\,750$ reais
**b)** (22 000 − 6 000) reais = 16 000 reais;
$0,75 \cdot 16\,000$ reais = 12 000 reais
**c)** Valor restante: (16 000 − 12 000) reais = 4 000 reais
$J = 3 \cdot 0,1 \cdot 4\,000$ reais = 1 200 reais
O valor a ser pago pela prima é 5 200 reais
(4 000 + 1 200 = 5 200).

**33.** 4 000 → Rafael: **x**; Gabriel: 4 000 − x
- Juros da dívida de Rafael: $12 \cdot 0,015 \cdot x = 0,18x$
Montante (Rafael): $x + 0,18x = 1,18x$ (1)
- Juros da dívida de Gabriel: $0,36 \cdot (4\,000 - x) =$ $= 1\,440 - 0,36x$
Montante (Gabriel): $(4\,000 - x) + (1\,440 - 0,36x) =$ $= 5\,440 - 1,36x$ (2)
Adicionando (1) e (2), obtemos 5 116:
$1,18x + 5\,440 - 1,36x = 5\,116 \Rightarrow -0,18x =$ $= -324 \Rightarrow x = 1\,800$. Assim:
Rafael: R$ 1 800,00
Gabriel: R$ 2 200,00

**34. a)** $M = 300 \cdot (1 + 0,02)^4 = 300 \cdot 1,02^4 = 324,73$ (324,73 reais)
$J = M - C = 324,73 - 300 = 24,73$ (24,73 reais)
**b)** $M = 2\,500 \cdot (1 + 0,05)^{12} = 2\,500 \cdot (1,05)^{12} = 4\,489,64$ (4 489,64 reais)
$J = M - C = 4\,489,64 - 2\,500 = 1\,989,64$ (1 989,64 reais)
**c)** $M = 100 \cdot (1 + 0,16)^3 = 100 \cdot (1,16)^3 = 156,09$ (156,09 reais)
$J = M - C = 156,09 - 100 = 56,09$ (56,09 reais)
**d)** $M = 900 \cdot (1 + 0,27)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 900 \cdot 1,27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 900 \cdot \sqrt{1,27} \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 1\,014,25$ reais
$J = 1\,014,25 - 900 \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 114,25$

**35.**
- Poupança:
$M = 2\,000 \cdot 1,005^3 = 2\,030$ (2 030 reais)
- Fundo de renda fixa:
$M = 2\,000 \cdot 1,008^3 = 2\,048$ (2 048 reais)
$J = 2\,048 - 2\,000 = 48$ (48 reais)
Imposto: $0,25 \cdot 48 = 12$ (12 reais)
Valor líquido disponível: $2\,048 - 12 = 2\,036$ (2 036 reais)
O fundo de renda fixa é mais vantajoso.

**36. a)** • $M_{10} = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}01)^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{10} = 1\,200 \cdot 1{,}105 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{10} = 1\,326$ reais

• Imposto de renda: $0{,}15 \cdot (1\,326 - 1\,200) =$
$= 0{,}15 \cdot 126 = 18{,}90$
Valor líquido do resgate: $1\,326 - 18{,}90 = 1\,307{,}10$ (1 307,10 reais)

**b)** • $M_{20} = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}01)^{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{20} = 1\,200 \cdot 1{,}01^{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{20} = 1\,200 \cdot 1{,}01^{10} \cdot 1{,}01^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{20} = 1\,200 \cdot (1{,}105)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{20} = 1\,465{,}23$ reais

• Imposto de renda: $0{,}15 \cdot (1\,465{,}23 - 1\,200) \simeq$
$\simeq 39{,}78$ (aproximadamente 39,78 reais.)

• Valor líquido do resgate: $1\,465{,}23 - 39{,}78 =$
$= 1\,425{,}45$ (1 425,45 reais)

**37. a)** 1 ano: $M = 2\,000 \cdot 1{,}005^{12} = 2\,000 \cdot 1{,}06 = 2\,120$ (2 120 reais)
2 anos: $M = 2\,000 \cdot 1{,}005^{24} = 2\,000 \cdot 1{,}06^2 =$
$= 2\,247{,}20$ (2 247,20 reais)
5 anos: $M = 2\,000 \cdot 1{,}005^{60} = 2\,000 \cdot 1{,}35 =$
$= 2\,700$ (2 700 reais)
10 anos: $M = 2\,000 \cdot 1{,}005^{120} = 2\,000 \cdot (1{,}005^{60})^2 =$
$= 2\,000 \cdot 1{,}35^2 = 3\,645$ (3 645 reais)

**b)** Para resgatar R$ 4 000,00:
$4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}005^n \Rightarrow 2 = 1{,}005^n \Rightarrow \log 2 =$
$= n \cdot \log 1{,}005 \Rightarrow n = \dfrac{0{,}301}{0{,}002} = 150{,}5$
O tempo mínimo pedido é 151 meses.
Para resgatar R$ 10 000,00:
$10\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}005^n \Rightarrow 5 = 1{,}005^n \Rightarrow$
$\log 5 = n \cdot \log 1{,}005 \Rightarrow \dfrac{\log\left(\frac{10}{2}\right)}{\log 1{,}005} = n \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \dfrac{\log 10 - \log 2}{0{,}002} = \dfrac{1 - 0{,}301}{0{,}002} = 349{,}5$
O tempo mínimo pedido é 350 meses.

**38.** $864 = C \cdot (1 + 0{,}2)^3 \Rightarrow C = \dfrac{864}{1{,}2^3} = \dfrac{864}{1{,}728} = 500 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 500$ reais

**39. a)** $M_5 = 5\,000 \cdot (1{,}1)^5 = 5\,000 \cdot 1{,}6 = 8\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_5 = 8\,000$ reais

**b)** $8\,000 - 5\,000 = 3\,000$
$\dfrac{3\,000}{5\,000} = 0{,}6 = 60\%$ no período de 5 anos

**c)** $20\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}1^n \Rightarrow 4 = 1{,}1^n \Rightarrow \log 4 = \log 1{,}1^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 4 = n \cdot \log 1{,}1 \Rightarrow n = \dfrac{\log 4}{\log 1{,}1} = \dfrac{2 \cdot \log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)} =$
$= \dfrac{2 \cdot 0{,}30}{\log 11 - \log 10} = \dfrac{0{,}60}{1{,}04 - 1} = \dfrac{0{,}60}{0{,}04} = 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 15$ anos

**40. a)** $66\,550 = C \cdot (1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = \dfrac{66\,550}{1{,}1^3} = 50000 \Rightarrow C = 50\,000$ reais

**b)** • No regime de juros compostos, os juros recebidos são de $(66\,550 - 50\,000)$ reais $= 16\,550$ reais.
• No regime de juros simples, os juros recebidos são de $(3 \cdot 0{,}1 \cdot 50\,000)$ reais $= 15\,000$ reais.
A diferença pedida é de 1 550 reais.

**41.** $M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 10\,368 = 5\,000 \cdot (1 + i)^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2{,}0736 = (1 + i)^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{20\,736}{10\,000} = (1 + i)^4 \Rightarrow \left(\dfrac{12}{10}\right)^4 = (i + 1)^4 \Rightarrow 1 + i = 1{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 0{,}2$ a.m. ou 20% a.m.

**42.** $i = 100\% = 1$
$v = v_0 \cdot (1 + 1)^n = v_0 \cdot 2^n$
Devemos determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que
$v_0 \cdot 2^n = 100 \cdot v_0 \Rightarrow 2^n = 100$
• Se $n = 6{,}2^n = 64 < 100$
• Se $n = 7{,}2^n = 128 > 100$. Assim, 7 é o menor inteiro procurado.

**43. a)** $5120 = 2000 \cdot (1 + 1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2{,}56 = (1 + i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt{2{,}56} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = 1{,}6 \Rightarrow i = 0{,}6$ ao ano ou 60% ao ano

**b)** $M = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 2\,000 \cdot \sqrt{1{,}6} = 2\,000 \cdot \sqrt{\dfrac{16}{10}} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 2\,000 \cdot \dfrac{4}{3{,}16} \simeq 2\,531{,}65 \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 2\,531{,}65$ reais

**44.** $30\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^n \Rightarrow 3 = 1{,}08^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1{,}08 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}08} = \dfrac{0{,}48}{\log 108 - \log 100} =$
$= \dfrac{0{,}48}{\log (2^2 \cdot 3^3) - 2} = \dfrac{0{,}48}{2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - 2} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \dfrac{0{,}48}{2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}48 - 2} = \dfrac{0{,}48}{0{,}04} = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 12$ anos

**45. a)** Final de março: $1{,}08 \cdot 25 = 27$
Final de abril: $1{,}025 \cdot 27 \simeq 27{,}68$
Final de maio: $0{,}97 \cdot 27{,}68 \simeq 26{,}85$

**b)** $\dfrac{26{,}85}{25} = 1{,}074$
Logo, a variação percentual é igual a 7,4% de valorização.

**46. a)** 1º ano: $4\,800 \cdot 1{,}25 = 6\,000$
2º ano: $6\,000 \cdot 0{,}7 = 4\,200$
3º ano: As perdas do ano anterior foram iguais a R$ 1 800,00 ($6\,000 - 4\,200 = 1\,800$). O fundo recuperou $0{,}35 \cdot 1\,800$ reais $= 630$ reais.
Assim, ao final do 3º ano o saldo era de 4 830 reais ($4\,200 + 630 = 4\,830$).

- O lucro auferido foi de 30 reais ($4830 - 4800 = 30$).
- Em termos percentuais, o lucro é $\frac{30}{4800} = 0{,}00625 = 0{,}625\%$

**b)** Se, ao final do 2º ano, o saldo era R$ 4200 e, ao final do 3º ano, o saldo era R$ 4830,00, a valorização foi de $\frac{4830 - 4200}{4200} = \frac{630}{4200} = 0{,}15 = 15\%$

**47. a)** $2C = C(1{,}2)^n \Rightarrow 1{,}2^n = 2 \Rightarrow \log 1{,}2^n = \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot \log 1{,}2 = \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} = \frac{\log 2}{\log 12 - \log 10} =$
$= \frac{\log 2}{2 \cdot \log 2 + \log 3 - 1} = \frac{0{,}3}{2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 - 1} =$
$= \frac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75 \Rightarrow n = 3{,}75$ anos.
Tempo mínimo: 4 anos.

**b)** $3 = 1{,}2^n \Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}48 = n \cdot 0{,}08 \Rightarrow n = 6$ anos

**c)** $5 = 1{,}2^n \Rightarrow \log 5 = n \cdot \log 1{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 10 - \log 2 = n \cdot 0{,}08 \Rightarrow 1 - 0{,}3 = n \cdot 0{,}08 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{0{,}7}{0{,}08} \Rightarrow n = 8{,}75$ anos. Tempo mínimo: 9 anos.

**d)** $M = C + 8C = 9C$, daí: $9C = C(1{,}2)^n \Rightarrow 1{,}2^n = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 9}{\log 1{,}2} \Rightarrow n = \frac{2 \cdot 0{,}48}{0{,}08} \Rightarrow n = 12$ anos

**48.** $C = 5$
$M = 35 + 5 = 40$
$40 = 5 \cdot (1 + i)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 = (1 + i)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[3]{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 1$
A taxa semanal de juros desse empréstimo é 100%.

**49. a)** $200 \cdot 1{,}25 = 250$;
$250 \cdot 1{,}08 = 270$
- Rendimento bruto: $270 - 200 = 70$
- Rendimento percentual bruto: $\frac{70}{200} = 0{,}35 = 35\%$

**b)** Imposto: $0{,}2 \cdot 70 = 14$ (14 reais)
Valor líquido: $270 - 14 = 256$ (256 reais)

**50.**
- Após dez anos, o montante da dívida da empresa, em reais, era:
$80000 \cdot (1 + 0{,}1)^{10} = 80000 \cdot 1{,}1^{10} =$
$= 80000 \cdot 1{,}1^5 \cdot 1{,}1^5 = 80000 \cdot 1{,}6^2 = 204800$
- Com o pagamento de 80000 reais, a dívida passou a ser:
$(204800 - 80000)$ reais $= 124\,800$ reais
- Após cinco anos, o valor da dívida será:
$124800 \cdot (1 + 0{,}04)^5 =$
$= 124800 \cdot 1{,}04^5 = 149760$ (149 760 reais)

**51.** Capital: **x**
Montante: 1,44x
$n = 2$
$1{,}44x = x \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow 1{,}44 = (1 + i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = 1{,}2 \Rightarrow i = 0{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 20\%$ ao ano

**52.** Capital: **x**
Montante: 1,47x
$i = 0{,}11$
$1{,}47x = x \cdot (1 + 0{,}11)^n \Rightarrow 1{,}47 = 1{,}11^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 1{,}47 = n \cdot \log 1{,}11 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 1{,}47}{\log 1{,}11} = \frac{\log\left(\frac{147}{100}\right)}{\log\left(\frac{111}{100}\right)} = \frac{\log 147 - \log 100}{\log 111 - \log 100} =$
$= \frac{2{,}17 - 2}{2{,}05 - 2} = \frac{0{,}17}{0{,}05} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 3{,}4$ anos $= 40{,}8$ meses
Logo, o menor número inteiro é 41.

**53. a)** Banco **A**: $M = 40000 \cdot 1{,}2^2 = 57600$
Banco **B**: $M = 60000 \cdot 1{,}08^2 = 69984$
A dívida total é de $(57600 + 69984)$ reais $=$
$= 127584$ reais

**b)** Banco **A**: $M_A = 40000 \cdot 1{,}2^n$
Banco **B**: $M_B = 60000 \cdot 1{,}08^n$
$M_A = M_B \Rightarrow 40000 \cdot 1{,}2^n = 60000 \cdot 1{,}08^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{4}{6} = \left(\frac{1{,}08}{1{,}2}\right)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{3} = 0{,}9^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log 0{,}9^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 2 - \log 3 = n \cdot (\log 9 - \log 10) \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 2 - \log 3}{2 \log 3 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{0{,}3 - 0{,}48}{2 \cdot 0{,}48 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{-0{,}18}{-0{,}04} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 4{,}5$ anos

**54.** Seja **x** o valor disponível para investimento.
Em **A**, após um ano, o montante é $x \cdot (1 + 0{,}03)^{12} =$
$= x \cdot 1{,}03^{12} = 1{,}426 \cdot x$
Em **B**, após um ano, o montante é $x \cdot 1{,}36$
Em **C**, após um ano, o montante é $x \cdot 1{,}18^2 = 1{,}3924x$
Rentabilidade de **A**: 42,6%
Rentabilidade de **B**: 36%
Rentabilidade de **C**: 39,24%
Alternativa *c*.

**55. a)** Juros simples:

$0,1 \cdot 600 = 60$ (60 reais por ano)

(660, 720, 780, 840, 900)

Juros compostos:

$1,1 \cdot 600 = 660$;

$1,1 \cdot 660 = 726$;

$1,1 \cdot 726 = 798,60$;

$1,1 \cdot 798,60 = 878,46$;

$1,1 \cdot 878,46 = 966,306$

(660; 726; 798,60; 878,46; 966,306)

**b)** Juros simples: P.A.; $r = 60$

Juros compostos: P.G.; $q = 1,1$

**c)** $966,31 - 900 = 66,31$ (66,31 reais)

**56. a)** $n = 0 \Rightarrow 400$

**b)** $a_1 = 400 + 20 = 420$

$a_2 = 400 + 40 = 440$

$a_3 = 400 + 60 = 460$

(420, 440, 460, ...) é uma P.A. Logo, o regime é o de juros simples.

Como $420 - 400 = 20$ e $\frac{20}{400} = 0,05$, concluímos que a taxa é de 5% ao mês.

**c)** $a_{12} = 400 + 20 \cdot 12 = 640$ (640 reais)

**57. a)** $x = 0 \Rightarrow f(0) = 6\,000$; 6 000 reais

**b)** $f(1) = 6\,000 \cdot 1,2 = 7\,200$

$f(2) = 6\,000 \cdot 1,2^2 = 8\,640$

$f(3) = 6\,000 \cdot 1,2^3 = 10\,368$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

(7 200, 8 640, 10 368,...) é uma P.G. de razão $q = 1,2$.

Como $1,2 = 1 + 0,2$, concluímos que a taxa de juros anual é de 20%.

**c)** $f(4) = 6\,000 \cdot 1,2^4 = 6\,000 \cdot 2,0736 = 12\,441,60$; logo, ele já terá dobrado de valor.

**58. a)** Juros simples; observe que o acréscimo anual é constante: 4 500 reais.

**b)** O capital é de R$ 15 000,00.

Em um ano, os juros são de R$ 4 500,00; percentualmente, eles representam $\frac{4\,500}{15\,000} = 30\%$ de juros ao ano.

**c)** Juros totais pagos: $8 \cdot 4\,500 = 36\,000$ (36 000 reais).

O montante é (15 000 + 36 000) reais = 51 000 reais.

**59. a)** Verdadeira; a sequência dos valores da dívida é a P.G.: (600; 672; 752,64; 842,96;...) de razão 1,12.

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5 = 600 \cdot 1,12^4 \simeq 944,11$;

944,11 reais > 900 reais

**b)** Falsa; a razão da P.G. é 1,12.

**c)** Verdadeira; a lei que representa o montante (em reais) em função do tempo **t** (em meses) é $M = 600 \cdot 1,12^t = 600 \cdot (1 + 0,12)^t$; logo, $i = 0,12$.

**d)** Falsa; $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 600 \cdot 1,12^6$

**e)** Verdadeira; $a_{12} = a_1 \cdot q^{11} = 600 \cdot 1,12^{11} \simeq 3,48 \cdot 600$

Como 600 é o valor inicial da dívida, os juros pagos pelo cliente são de $3,48 \cdot 600 - 600 = \underbrace{2,48}_{248\%} \cdot 600$

## Desafio

**a)** 1º modo:

Seja **C** o capital do investimento e **i** a taxa anual de juros

$$\begin{cases} C \cdot (1 + i)^4 = 73\,205 & (1) \\ C \cdot (1 + i)^6 = 88\,578,05 & (2) \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, (2) por (1) temos:

$(1 + i)^2 = 1,21 \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2,21} \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0,1$ ao ano ou 10% ao ano

2º modo:

Considerando R$ 73 205,00 o "novo" capital, podemos escrever:

$73\,205\,(1 + i)^2 = 88\,578,05 \Rightarrow i = 0,1$

**b)** Em (1) obtemos:

$C \cdot 1,1^4 = 73\,205 \Rightarrow C = \frac{73\,205}{1,1^4} = 50\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 50\,000$ reais

**c)** O montante do investimento de Roseli é $50\,000 \cdot 1,1^n$.

Se a obra de arte se desvaloriza a uma taxa de 12% ao ano, então, a cada ano, seu valor é 88% do valor que ela possuía ao ano anterior e, daqui a **n** anos (a contar da data da aplicação no investimento), seu valor é: $280\,000 \cdot 0,88^n$

Devemos ter: $50\,000 \cdot 1,1^n = 280\,000 \cdot 0,88^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1,1^n}{0,88^n} = \frac{280\,000}{50\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,25^n = 5,6 \Rightarrow \log 1,25^n = \log 5,6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{5}{4}\right) = \log\left(\frac{56}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (\log 5 - \log 4) = \log (8 \cdot 7) - \log 10$

Como $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$, temos:

$n \cdot (\log 10 - \log 2 - 2 \cdot \log 2) = 3 \cdot \log 2 + \log 7 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (\log 10 - 3 \cdot \log 2) = 3 \cdot \log 2 + \log 7 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{3 \cdot 0,301 + 0,845 - 1}{1 - 3 \cdot 0,301} = \frac{0,748}{0,097} \simeq 7,71$

O número mínimo de anos é 8.

CAPÍTULO **7**

# Números complexos

## Exercícios

**1.** **a)** $(3, 2) + (0, 1) = (3 + 0, 2 + 1) = (3, 3)$

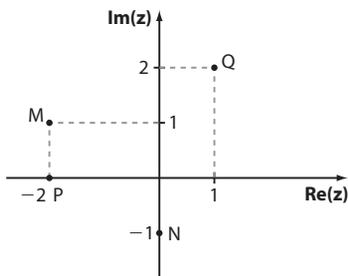
**b)** $(2, 3) \cdot (-1, 4) = (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4, 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)) =$
$= (-14, 5)$

**c)** $(2x - y, 6x + 2y) + (x - 2y, x) =$
$(2x - y + x - 2y, \ 6x + 2y + x) = (3x - 3y, 7x + 2y)$

**d)** $(-1, -1) \cdot (-4, 2) =$
$(-1 \cdot (-4) - (-1) \cdot 2, \ -1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4)) = (6, 2)$

**e)** $(2, -3) - (-1, -2) = (2 - (-1), -3 - (-2)) =$
$= (3, -1)$

**f)** $(1, 0) \cdot (x, -y) = (1 \cdot x - 0 \cdot (-y), 1 \cdot (-y) + 0 \cdot x) =$
$= (x, -y)$

**2.** $z_1 = (-2, 1), z_2 = (0, -1)$
$z_1 + z_2 = (-2, 1) + (0, -1) = (-2, 0)$
$z_1 \cdot z_2 = (-2, 1) \cdot (0, -1) =$
$= (-2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), (-2)(-1) + 1 \cdot 0) = (1, 2)$

**3.** $z_1 = (x, 3)$ e $z_2 = (2 - y, y)$
$z_2 - z_1 = (5, -4) \Rightarrow (2 - y, y) - (x, 3) = (5, -4) \Rightarrow$
$\Rightarrow (2 - y - x, y - 3) = (5, -4) \Rightarrow \begin{cases} 2 - y - x = 5 \\ y - 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -2$ e $y = -1$

**4.** **a)** $i^{54} = i^2 = -1$

**b)** $i^{95} = i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

**c)** $i^{161} = i^1 = i$

**d)** $i^{200} = i^0 = 1$

**e)** $i^{1221} = i^1 = i$

**f)** $i^{2022} = i^2 = -1$

**g)** $i^{13335} = i^3 = i^2 \cdot i = -i$

**h)** $i^{12784} = i^0 = 1$

**5.** **a)** $i^{25} \cdot i^{18} = i^{43} = i^3 = i^2 \cdot i = -i$

**b)** $(-2i)^{11} = (-2)^{11} \cdot i^{11} = -2048 \cdot i^3 = -2048(-i) =$
$= 2048i$

**c)** $\dfrac{i^{79}}{i^{32}} = i^{47} = i^3 = -i$

**d)** $[(i^2)^{2^0}]^{3^2} = [(i^2)^1]^9 = i^{18} = i^2 = -1$

**e)** $\dfrac{i^{-98}}{i^{-34}} = i^{-64} = (i^{64})^{-1} = (i^0)^{-1} = 1$

**f)** $\dfrac{i^{132} + i^{61}}{i^{42}} = \dfrac{i^0 + i^1}{i^2} = \dfrac{1 + i}{-1} = -1 - i$

**6.** **a)** $A = (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \ldots +$
$+ (i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48}) + (i^{49} + i^{50})$

Como
$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$
e
$$\begin{cases} i = i^5 = i^9 = \ldots = i^{49} = i \\ i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{50} = -1 \\ i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{47} = -i \\ i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots = i^{48} = 1 \end{cases}$$

Temos:
$$A = \underbrace{(i + i^2 + i^3 + i^4)}_{=0} + \underbrace{(i^5 + i^6 + i^7 + i^8)}_{=0} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{(i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48})}_{=0} + i^{49} + i^{50} = i - 1$$

**b)** $A = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{19} \cdot i^{20} = i^{1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20}$

Como $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20 =$
$= \dfrac{(1 + 20)}{2} \cdot 20 = 210,$
temos: $A = i^{210} = i^2 = -1$

**7.** **a)** $(3, -2) = 3 - 2i$

**b)** $(-4, 3) = -4 + 3i$

**c)** $(0, 4) = 4i$

**d)** $5i = (0, 5)$

**e)** $-5 = (-5, 0)$

**f)** $-3 + i = (-3, 1)$

**8.** **a)** $z = 4 + 5i \Rightarrow Re(z) = 4$ e $Im(z) = 5$

**b)** $z = 3i + 3 \Rightarrow Re(z) = 3$ e $Im(z) = 3$

**c)** $z = \dfrac{-2 + 5i}{3} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}i \Rightarrow$
$\Rightarrow Re(z) = -\dfrac{2}{3}$ e $Im(z) = \dfrac{5}{3}$

**d)** $z = -i\sqrt{3} \Rightarrow Re(z) = 0$ e $Im(z) = -\sqrt{3}$

**9.** **a)** $z = (m - 3) + 4i$ é imaginário puro $\Rightarrow$
$\Rightarrow Re(z) = m - 3 = 0$ e $Im(z) = 4 \neq 0 \Rightarrow m = 3$

**b)** $z = -3 + (m + 3)i$ é real $\Rightarrow Im(z) = m + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -3$

**10.** $v = (-2 - m) + 3ni$ é imaginário puro $\Rightarrow$
$$\begin{cases} -2 - m = 0 \Rightarrow m = -2 \quad (1) \\ \text{e} \\ 3n \neq 0 \Rightarrow n \neq 0 \quad (2) \end{cases}$$
$w = 4 - (m^2 - 4)i$ é real $\Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow$
$m = 2$ ou $m = -2$ (3)
Como $m = -2$ satisfaz (1) e (3), então $m = -2$.
Logo: $m = -2$ e $n \neq 0$.
Nesse caso, temos: $\begin{cases} v = 3ni, \text{ com } n \neq 0 \\ \text{e} \\ w = 4 \end{cases}$

**11.** $z = (3 - x) + (x + 1)i$

**a)** $Re(z) = 2 \Rightarrow 3 - x = 2 \Rightarrow x = 1$

**b)** $Im(z) = -4 \Rightarrow x + 1 = -4 \Rightarrow x = -5$

**c)** $Re(z) > Im(z) \Rightarrow 3 - x > x + 1 \Rightarrow x < 1$

**d)** $Im(z) < 3 \Rightarrow x + 1 < 3 \Rightarrow x < 2$

**12. a)** $m + (n - 1)i = -4 + 3i \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ e \\ n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$

**b)** $(n - 2, m + 5) = (3, -2) \Rightarrow \begin{cases} n - 2 = 3 \Rightarrow n = 5 \\ e \\ m + 5 = -2 \Rightarrow m = -7 \end{cases}$

**c)** $(m - 3) + (n - 2)i = 5i \Rightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ e \\ n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7 \end{cases}$

**d)** $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m - n + 1 = 0 \\ e \\ 2m + n - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ e } n = 2$

**13. a)** $(-7 + 5i) - (3 - 2i) = -7 + 5i - 3 + 2i =$
$= -10 + 7i$

**b)** $2 + (3 - i) + (-1 + 2i) + i =$
$= 2 + 3 - i - 1 + 2i + i = 4 + 2i$

**c)** $(-4 + 3i) + 2i - (-3 - i) = -4 + 3i + 2i + 3 + i =$
$= -1 + 6i$

**d)** $-1 - (-2 + i) + (5 - i) - (3 - 7i) =$
$-1 + 2 - i + 5 - i - 3 + 7i = 3 + 5i$

**14.** $\begin{cases} u + v = 2 - 5i \quad (1) \\ u - 2v = -4 + 13i \quad (2) \end{cases}$

Subtraindo-se, membro a membro, (2) de (1), temos:
$3v = 6 - 18i \Rightarrow v = 2 - 6i \quad (3)$
Substituindo-se (3) em (1): $u + 2 - 6i = 2 - 5i \Rightarrow u = i$.

**15. a)** $x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = -100 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 100 \cdot (-1) = 100i^2 \Rightarrow x = 10i$ ou $x = -10i$
Logo: $S = \{10i, -10i\}$

**b)** $\left.\begin{array}{l} x^2 - 6x + 10 = 0 \\ \Delta = -4 = 4i^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3 + i$ ou $x = 3 - i$
Logo: $S = \{3 + i, 3 - i\}$

**c)** $\left.\begin{array}{l} -x^2 + 4x - 29 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 29 = 0 \\ \Delta = -100 = 100i^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{100i^2}}{2} = \dfrac{4 \pm 10i}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2 + 5i$ ou $x = 2 - 5i$
Logo: $S = \{2 + 5i, 2 - 5i\}$

**d)** $(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 = 9i^2 \Rightarrow x = 3i \text{ ou } x = -3i \\ ou \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$
Logo: $S = \{-3i, 3i, -1, 1\}$

**e)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2)(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2 = 2i^2 \Rightarrow x = i\sqrt{2} \text{ ou } x = -i\sqrt{2} \\ ou \\ x^2 = -3 = 3i^2 \Rightarrow x = i\sqrt{3} \text{ ou } x = -i\sqrt{3} \end{cases}$
Logo: $S = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$

**f)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + 3x^2 - 4 = 0 \xRightarrow{x^2 = y}$
$\Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ ou \\ x^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow x = 2i \text{ ou } x = -2i \end{cases}$
Logo: $S = \{-1, 1, -2i, 2i\}$.

**16.** $x^3 - 14x^2 + 58x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 14x + 58) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (I) \\ ou \\ x^2 - 14x + 58 = 0 \quad (II) \xRightarrow[\Delta = -36]{} \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$

**a)** Universo $\mathbb{R}$: $S = \{0\}$

**b)** Universo $\mathbb{C}$:
(I): $0 \in \mathbb{C}$
(II): $x^2 - 14x + 58 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{14 \pm \sqrt{36i^2}}{2} =$
$= \dfrac{14 \pm 6i}{2} \Rightarrow x = 7 + 3i$ ou $x = 7 - 3i$
Logo: $S = \{0, 7 + 3i, 7 - 3i\}$.

**17. a)** Fazendo-se $\sqrt{-5 + 12i} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:
$-5 + 12i = (x + yi)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 + 12i = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \quad (1) \\ 2xy = 12 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x} \quad (2) \end{cases}$
Substituindo-se (2) em (1): $x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2)^2 + 5x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ ou $\cancel{x^2 = -9}$ $(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$ ou $x = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \xRightarrow{(2)} y = 3 \\ x = -2 \xRightarrow{(2)} y = -3 \end{cases}$
Logo, $\sqrt{-5 + 12i} = 2 + 3i$ ou $-2 - 3i$.

**b)** Fazendo-se $\sqrt{4i} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:
$4i = (x + yi)^2 \Rightarrow 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \quad (1) \\ e \\ 2xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x} \quad (2) \end{cases}$
Substituindo-se (2) em (1): $x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^4 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \xRightarrow[x \in \mathbb{R}]{} x^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \xRightarrow{(2)} y = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \xRightarrow{(2)} y = -\sqrt{2} \end{cases}$
Logo, $\sqrt{4i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

**c)** Fazendo-se $\sqrt{4 + 3i} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:
$4 + 3i = (x + yi)^2 \Rightarrow 4 + 3i = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \quad (1) \\ 2xy = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2x} \quad (2) \end{cases}$

Substituindo-se (2) em (1):

$x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4 \Rightarrow 4(x^2)^2 - 16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{18}{4}$ ou $x^2 = -\frac{2}{4}$ (não serve) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \underset{2}{\Rightarrow} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \underset{2}{\Rightarrow} y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Logo, $\sqrt{4 + 3i} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$.

**d)** Fazendo-se $\sqrt{1 - i\sqrt{3}} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$1 - i\sqrt{3} = (x + yi)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2y} & (2) \end{cases}$$

Substituindo-se (2) em (1):

$\frac{3}{4y^2} - y^2 = 1 \Rightarrow 4(y^2)^2 + 4y^2 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = -\frac{6}{4}$ (não serve) ou $y^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{2}{\Rightarrow} x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \underset{2}{\Rightarrow} x = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Logo, $\sqrt{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**18. a)** $(2 + 5i)(1 - i) = 2 - 2i + 5i - 5i^2 = 2 + 3i - 5(-1) =$
$= 7 + 3i$

**b)** $(4 + 3i)(-2 + 2i) = -8 + 8i - 6i + 6i^2 = -14 + 2i$

**c)** $(4 + i)(2 - i) + 3 - i = 8 - 4i + 2i - i^2 + 3 - i =$
$= 12 - 3i$

**d)** $(-5i)(4 - 3i)(1 + 2i) = (-5i)(4 + 8i - 3i - 6i^2) =$
$= (-5i)(10 + 5i) = -50i - 25i^2 = 25 - 50i$

**e)** $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$

**f)** $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i$

**g)** $(-3 - 3i)^2 = [-(3 + 3i)]^2 = (3 + 3i)^2 = 9 + 18i + 9i^2 =$
$= 18i$

**h)** $(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 =$
$= 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

**19.** $z_1 = \left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} + 3i$; $z_2 = (2, -5) = 2 - 5i$

**a)** $z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} + 3i\right)(2 - 5i) = 1 - \frac{5}{2}i + 6i - 15i^2 =$
$= 16 + \frac{7}{2}i$

**b)** $z_2^2 = (2 - 5i)^2 = 4 - 20i + 25i^2 = -21 - 20i$

**20. a)** $(1 + i)^5 \cdot (1 - i)^5 = [(1 + i) \cdot (1 - i)]^5 = (1 - i^2)^5 =$
$= 2^5 = 32$

**b)** $(1 - i)^3 = (1 - i) \cdot (1 - i)^2 = (1 - i) \cdot (1 - 2i + i^2) =$
$= (1 - i) \cdot (-2i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i$

**c)** $(2 + 2i)^4 = [(2 + 2i)^2]^2 = (4 + 8i + 4i^2)^2 =$
$= (8i)^2 = 64i^2 = -64$

**21.** $z = (x + 3i) \cdot (1 - 2i) = x - 2xi + 3i - 6i^2 =$
$= (x + 6) + (3 - 2x)i$, com $x \in \mathbb{R}$

**a)** $z \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

**b)** **z** é imaginário puro $\Rightarrow x + 6 = 0$ e $3 - 2x \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -6$, pois $3 - 2 \cdot (-6) \neq 0$

**22.** $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 2i$ e $z_3 = 1 - i$

**a)** $z_1 + \overline{z_2} = -1 - 3i + \overline{2i} = -1 - 3i - 2i = -1 - 5i$

**b)** $z_2 \cdot \overline{z_3} = 2i(\overline{1 - i}) = 2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$

**c)** $\overline{\overline{z_1} + z_3} = \overline{\overline{-1 - 3i} + 1 - i} = \overline{-1 + 3i + 1 - i} =$
$= \overline{2i} = -2i$

**d)** Usando as propriedades do conjugado:
$\overline{z_2 \cdot \overline{z_3}} = \overline{z_2} \cdot \overline{\overline{z_3}} = (-2i) \cdot (1 - i) =$
$= -2i + 2i^2 = -2 - 2i$

**23.** $P = (2, -3) \Rightarrow z_1 = 2 - 3i$; $Q = (-1, 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow z_2 = -1 + 2i$

**a)** $\overline{z_1} = 2 + 3i \Rightarrow$ afixo: (2, 3)

**b)** $z_1 \cdot \overline{z_2} = (2 - 3i)(-1 - 2i) = -2 - 4i + 3i + 6i^2 =$
$= -8 - i \Rightarrow$ afixo: (−8, −1)

**c)** $(\overline{z_1} \cdot z_2)^2 = \overline{z_1}^2 \cdot z_2^2 = (2 + 3i)^2 \cdot (-1 + 2i)^2 =$
$= (4 + 12i + 9i^2)(1 - 4i + 4i^2) =$
$= (-5 + 12i)(-3 - 4i) =$
$= 15 + 20i - 36i - 48i^2 = 63 - 16i \Rightarrow$
$\Rightarrow$ afixo: (63, −16)

**24.** Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
$z - \overline{z} = 6i \Rightarrow (a + bi) - (a - bi) = 6i \Rightarrow 2bi = 6i \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 3, \forall a \in \mathbb{R}$
Logo: $z = a + 3i$, em que $a \in \mathbb{R}$.

**25.** Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
$2 \cdot \overline{z}i + 3 = 2z - \overline{z} + 2i \Rightarrow$
$\Rightarrow 2i(a - bi) + 3 = 2(a + bi) - (a - bi) + 2i \Rightarrow$
$\Rightarrow (2b + 3) + 2ai = a + (3b + 2)i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 3 = a \\ 2a = 3b + 2 \end{cases} \Rightarrow a = -5 \text{ e } b = -4$$

Logo: $z = -5 - 4i$.

**26. a)** $(\overline{z})^2 = z^2$
Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos:
$(a - bi)^2 = (a + bi)^2 \Rightarrow a^2 - b^2 - 2abi = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ a^2 - b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \\ (2)\ -2ab = 2ab \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow a = \text{ ou } b = 0 \end{cases}$$

De (1) e (2), conclui-se que $a = 0$ ou $b = 0$, ou seja: **z** é um número real ou um imaginário puro.

**b)** $z^2 = 2 \cdot \bar{z} \cdot i$

Seja $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$z^2 = 2 \cdot \bar{z} \cdot i \Rightarrow (a + bi)^2 = 2i(a - bi) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 2b + 2ai \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2b & (1) \\ ab = a & (2) \end{cases}$

De (2): $ab = a \Rightarrow a(b - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} -b^2 = 2b \Rightarrow b(b + 2) = 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow b = 0 \text{ ou } b = -2 \\ b = 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} a^2 - 1 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3} \end{cases}$

Assim, temos:

$\begin{cases} a = b = 0 \Rightarrow z = 0 \\ a = 0 \text{ e } b = -2 \Rightarrow z = -2i \\ a = \sqrt{3} \text{ e } b = 1 \Rightarrow z = \sqrt{3} + i \\ a = -\sqrt{3} \text{ e } b = 1 \Rightarrow z = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

**c)** $(\bar{z})^2 = -2i$

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$(\bar{z})^2 = -2i \Rightarrow (a - bi)^2 = -2i \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 - 2abi = -2i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ ab = 1 & (2) \end{cases}$

De (1): $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a - b) \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b$ ou $a = -b$

Assim, temos:

$\begin{cases} a = b \underset{(2)}{\Rightarrow} a^2 = 1 \Rightarrow a = b = 1 \text{ ou } a = b = -1 \\ a = -b \underset{(2)}{\Rightarrow} -a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow \nexists a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Logo: $\begin{cases} a = b = 1 \Rightarrow z = 1 + i \\ a = b = -1 \Rightarrow z = -1 - i \end{cases}$

**27. a)** $\dfrac{6}{5i} = \dfrac{6 \cdot i}{5 \cdot i^2} = \dfrac{6i}{-5} = -\dfrac{6}{5}i$

**b)** $\dfrac{2i}{1 - i} = \dfrac{2i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{2i + 2i^2}{1 - i^2} = \dfrac{-2 + 2i}{2} =$

$= -1 + i$

**c)** $\dfrac{3 - 7i}{3 + 4i} = \dfrac{(3 - 7i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{9 - 12i - 21i + 28i^2}{9 - 16i^2} =$

$= \dfrac{-19 - 33i}{25} = -\dfrac{19}{25} - \dfrac{33}{25}i$

**d)** $\dfrac{1 - 2i}{2 + i} = \dfrac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \dfrac{2 - i - 4i + 2i^2}{4 - i^2} =$

$= \dfrac{-5i}{5} = -i$

**e)** $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1 + i} = \dfrac{-i}{i(-i)} + \dfrac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = -i + \dfrac{1 - i}{1 - i^2} =$

$= -i + \dfrac{1 - i}{2} = \dfrac{-2i + 1 - i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$

**f)** $\dfrac{(1 + i)^2}{1 - i} = \dfrac{1 + 2i + i^2}{1 - i} = \dfrac{2i}{1 - i} = \dfrac{2i(1 + i)}{1^2 - i^2} =$

$= \dfrac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$

**g)** $\dfrac{3}{2 + 3i} - \dfrac{2i}{3 - 2i} = \dfrac{3(2 - 3i)}{4 - 9i^2} - \dfrac{2i(3 + 2i)}{9 - 4i^2} =$

$= \dfrac{6 - 9i - 6i - 4i^2}{13} = \dfrac{10}{13} - \dfrac{15}{13}i$

**h)** $\overline{\dfrac{1 + i}{i}} - \dfrac{i}{1 + i} = \dfrac{(1 - i)(-i)}{i(-i)} - \dfrac{i(1 - i)}{1 - i^2} =$

$= -i + i^2 - \dfrac{i - i^2}{2} = \dfrac{-2i - 2 - i - 1}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

**28.** $z = 3 - 4i$

**a)** $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3 - 4i} = \dfrac{3 + 4i}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \dfrac{3 + 4i}{9 - 16i^2} =$

$= \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

**b)** $z_1 = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{(3 - 4i)^2} = \dfrac{1}{9 - 24i + 16i^2} =$

$= \dfrac{1}{-7 - 24i} = \dfrac{-7 + 24i}{49 - 576i^2} = -\dfrac{7}{625} + \dfrac{24}{625}i$

$\overline{z_1} = -\dfrac{7}{625} - \dfrac{24}{625}i$

**c)** $\dfrac{1}{zi} = \dfrac{1}{(3 - 4i) \cdot i} = \dfrac{1}{4 + 3i} = \dfrac{4 - 3i}{16 - 9i^2} = \dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}i$

**29.** $\dfrac{3 + 2i}{z} = 1 - i \Rightarrow z = \dfrac{3 + 2i}{1 - i} = \dfrac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} =$

$= \dfrac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1 - i^2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

**30.** $z = \dfrac{2 + i}{3 - ai} = \dfrac{(2 + i)(3 + ai)}{9 - a^2i^2} = \dfrac{6 + 2ai + 3i + ai^2}{9 + a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{6 - a}{9 + a^2} + \dfrac{2a + 3}{9 + a^2} \cdot i$

**z** é imaginário puro $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6 - a}{9 + a^2} = 0 \;(1) \Rightarrow a = 6 \\ \text{e} \\ \dfrac{2a + 3}{9 + a^2} \neq 0 \;(2) \end{cases}$

Logo: $a = 6$, pois esse valor satisfaz a condição (2).

**31.** $z = \dfrac{2 + mi}{1 - i} = \dfrac{(2 + mi)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{2 + 2i + mi + mi^2}{1 - i^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{2 - m}{2} + \dfrac{2 + m}{2} \cdot i \quad (1)$

- $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{2 + m}{2} = 0 \Rightarrow m = -2$
- Substituindo-se $m = -2$ em (1), obtém-se $z = 2$.

**32.** $\dfrac{(1 + i)^{53}}{(1 - i)^{51}} = \dfrac{(1 + i)^{51} \cdot (1 + i)^2}{(1 - i)^{51}} =$

$= \left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{51} \cdot (1 + 2i + i^2) = \left[\dfrac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)}\right]^{51} \cdot (2i) =$

$= \left[\dfrac{2i}{1 - i^2}\right]^{51} \cdot (2i) = \left(\dfrac{2i}{2}\right)^{51} \cdot (2i) = i^{51} \cdot (2i) = i^3 \cdot (2i) =$

$= 2i^4 = 2 \in \mathbb{R}$

**33. a)** $z = 2 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

**b)** $z = 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

**c)** $z = -4 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

**d)** $z = -4 \Rightarrow |z| = |-4| = 4$

**e)** $z = -2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4$

**f)** $z = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

**34.** $|2 + 3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \simeq 3{,}61$; $|3 + i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$; $|1| = 1$; $|-2| = 2$; $|4i| = \sqrt{16} = 4$; $\left|-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Logo, o complexo que tem o maior módulo é 4i.

**35. a)** $z = 8 + 12i - 12i - 18i^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 8 + 18 = 26$
$|z| = \sqrt{26^2 + 0^2} = 26$

**b)** $z = \frac{3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow z = \frac{3i - 3i^2}{1^2 - i^2} \Rightarrow z = \frac{3 + 3i}{2}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4}} \Rightarrow$
$\Rightarrow |z| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

**c)** $z = 2 \cdot i^{119} = 2i^3 = -2i \Rightarrow |z| = |-2| = 2$

**d)** $z = 2i(-1 + 2i) = -2i + 4i^2 = -4 - 2i$
$|z| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$

**36.** $z_1 = x + 3i$ e $z_2 = 2 + (x - 1)i$, com $x \in \mathbb{R}$
$|z_1| = |z_2| \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{4 + (x-1)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 9 = 4 + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = -2$

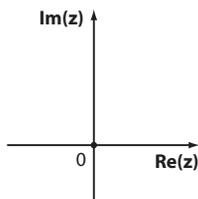
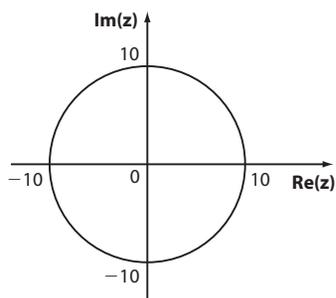
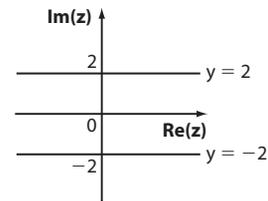
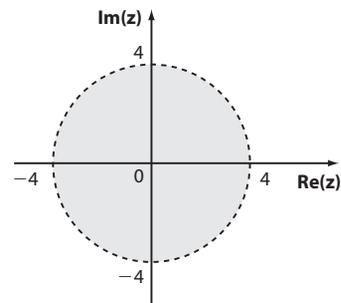
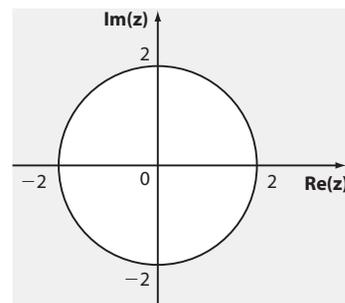
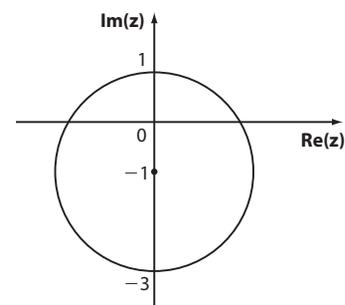
**37.** $A = (3, 1) \Rightarrow z_1 = 3 + i$; $B = (2, -2) \Rightarrow z_2 = 2 - 2i$

**a)** $z_1 + z_2 = (3 + i) + (2 - 2i) = 5 - i$
$|z_1 + z_2| = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

**b)** $z_1 - z_2 = (3 + i) - (2 - 2i) = 1 + 3i$
$|z_1 - z_2| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

**c)** $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (3 - i)(2 + 2i) = 8 + 4i$
$|\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}| = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$

**38.** Para cada item, consideremos $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

**a)** $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 0\}$
$|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$
Logo: $A = \{(0, 0)\}$.

**b)** $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 10\}$
$|z| = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10^2$

**c)** $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - \overline{z}| = 4\}$
$|z - \overline{z}| = 4 \Rightarrow |x + yi - x + yi| = 4 \Rightarrow |2yi| = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow |yi| = 2 \Rightarrow |y| = 2 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

**d)** $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 4\}$
$|z| < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2$

**e)** $E = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geqslant 2\}$
$|z| > 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2^2$

**f)** $F = \{z \in \mathbb{C};\ |z + i| = 2\}$
$|z + i| = 2 \Rightarrow |x + yi + i| = 2 \Rightarrow |x + (y + 1)i| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 2 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2^2$

**39. a)** $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \xRightarrow[0^\circ < \theta < 90^\circ]{} \theta = 30^\circ$$

**b)** $z = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = 8$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \xRightarrow{270° < \theta < 360°}$$

$\Rightarrow \theta = 360° - 30° = 330°$

**c)** $z = -2 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \xRightarrow{90° < \theta < 180°}$$

$\Rightarrow \theta = 180° - 45° = 135°$

**d)** $z = -2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \xRightarrow{90° < \theta < 180°}$$

$\Rightarrow \theta = 180° - 60° = 120°$

**e)** $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \xRightarrow{180° < \theta < 270°}$$

$\Rightarrow \theta = 180° + 45° = 225°$

**f)** $z = 2i$

**z** é imaginário puro e $\text{Im}(z) > 0 \Rightarrow \theta = 90°$

**g)** $z = -3 - 3i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = 6$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{3\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \xRightarrow{\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}}$$

$\Rightarrow \theta = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

**h)** $z = -6$

**z** é um número real e $\text{Re}(z) < 0 \Rightarrow \theta = \pi$

**i)** $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \xRightarrow{\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi}$$

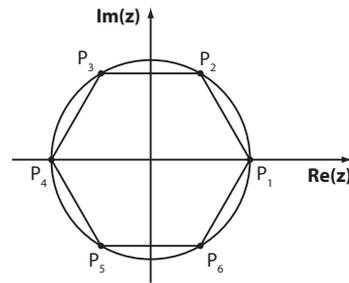
$\Rightarrow \theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$

**j)** $z = -\dfrac{i}{4}$

**z** é imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

**40.** $P_1 \in$ semieixo real positivo $\Rightarrow \theta_1 = 0°$

Como o hexágono é regular, cada um dos arcos $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}$, $\overset{\frown}{P_4P_5}$, $\overset{\frown}{P_5P_6}$ e $\overset{\frown}{P_6P_1}$ mede 60°.

Logo: $\theta_2 = 60°$, $\theta_3 = 120°$, $\theta_4 = 180°$, $\theta_5 = 240°$ e $\theta_6 = 300°$.

**41. a)** $z = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i \Rightarrow \rho = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 3}{4} + \dfrac{25}{4}} = 5$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{-5\sqrt{3}}{2}}{5} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\frac{5}{2}}{5} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 150°$$

Logo: $z = 5(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

**b)** $z = 2i \Rightarrow \rho = 2$

**z** é imaginário puro e $\text{Im}(z) > 0 \Rightarrow \theta = 90°$

Logo: $z = 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

**c)** $z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 300°$$

Logo: $z = 2(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

**d)** $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \rho = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 60°$$

Logo: $z = \cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$

**e)** $z = -4 \Rightarrow \rho = 4$

$z \in \mathbb{R}$ e $\text{Re}(z) < 0 \Rightarrow \theta = \pi$

Logo: $z = 4(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

**f)** $z = 3 - 3i \Rightarrow \rho = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{4}$$

Logo: $z = 3\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{4}\right)$

**g)** $z = (-5, 5) = -5 + 5i \Rightarrow \rho = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$$

Logo: $z = 5\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$

**h)** $z = -i \Rightarrow \rho = 1$

**z** é imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

Logo: $z = \cos \dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}$

**i)** $z = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Logo: $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$

**j)** $z = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \Rightarrow \rho = 2$

**z** é imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

Logo: $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

**42.** $z = \frac{i}{1 + i} + \frac{1}{i}$

**a)** • $z = \frac{(1 - i)i}{(1 + i)(1 - i)} + \frac{(-i)}{i(-i)} = \frac{i - i^2}{1 - i^2} - \frac{i}{-i^2} =$

$= \frac{i + 1 - 2i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

• $z^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{i}{2} + \frac{i^2}{4} = -\frac{i}{2}$

**b)** $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 315°$$

Logo: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°)$

• $z^2 = -\frac{1}{2} \cdot i \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}$

• $z^2$ é imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0 \Rightarrow \theta = 270°$

Logo: $z^2 = \frac{1}{2}(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°)$

**43. a)** $z = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -2 + 2i\sqrt{3}$

**b)** $z = 6\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -3 - 3i\sqrt{3}$

**c)** $z = 3(\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°) = 3(0 + i) \Rightarrow z = 3i$

**d)** $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 0 + i(-1) \Rightarrow z = -i$

**e)** $z = \cos 210° + i\,\text{sen}\,210° = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

**f)** $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -\sqrt{3} + i$

**g)** $z = \sqrt{2}(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -1 + i$

**h)** $z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = 3\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

**44.** $x, y \in \mathbb{C}$

**a)** $\begin{cases} x + yi = -1 - 2i \quad (\cdot\, i) \\ 2xi + y = 1 + i \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} xi - y = -i + 2 \\ 2xi + y = 1 + i \end{cases}$ (+) ①

$3xi = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} \Rightarrow x = -i$ ②

Substituindo-se ② em ①:

$2(-i)\,i + y = 1 + i \Rightarrow y = -1 + i$

Assim, temos:

• $x = -i \Rightarrow \rho = 1$ e $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$

• $y = -1 + i \Rightarrow \rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Logo: $y = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

**b)** $\begin{cases} 2x + yi = 0 \quad (\cdot\, i) \\ xi + y = 3 - 3i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow + \begin{cases} 2xi - y = 0 \\ xi + y = 3 - 3i\sqrt{3} \end{cases}$ ①

$3xi = 3 - 3i\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{i} = -\sqrt{3} - i$ ②

De ①: $y = 2xi \underset{②}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow y = 2i(-\sqrt{3} - i) \Rightarrow y = 2 - 2i\sqrt{3}$

Assim, temos:

• $x = -\sqrt{3} - i \Rightarrow \rho = \sqrt{3 + 1} = 2$

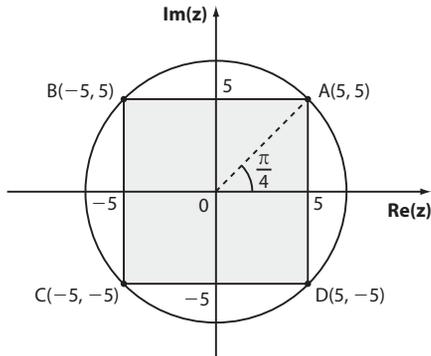
$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 210°$$

Logo: $x = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

- $y = 2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \sqrt{4 + 12} = 4$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 300°$$

Logo: $y = 4(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

**45.** Afixos: A(5, 5), B(−5, 5), C(−5, −5), D(5, −5).

Assim: $\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$\theta_A = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_B = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$, $\theta_C = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$ e

$\theta_D = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo: $z = 5\sqrt{2}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, com $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$.

## Desafio

**z** dado na forma polar $\Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0$

Seja $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, temos:

$z^2 + |z| = 0 \Rightarrow (a + bi)^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} + 2abi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad (*) \\ 2abi = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases}$$

- Se $a = 0$, então, em (*), temos: $-b^2 + \sqrt{b^2} = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow b^2 = |b| \Rightarrow b = 1$ ou $b = -1$

  Logo: $z = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ ou

  $z = -i = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$

- Se $b = 0$, então, em (*), temos: $a^2 + \sqrt{a^2} \Rightarrow a^2 = -|a|$

  (Absurdo, pois $a \in \mathbb{R}$.)

  Assim: $S = \left\{\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}, \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right\} = \{i, -i\}$

# CAPÍTULO 8 Polinômios

## Exercícios

**1.** *a*, *c*, *f* e *g*.

**2.** **a)** 4 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 14 **e)** 3 **f)** 0 **g)** 1

**h)** $x^{1 + 2 + ... + 15} = x^{120}$; o grau é 120.

**3.** **a)** 10 **b)** $\dfrac{1}{3}$ **c)** −1 **d)** i **e)** 1

**4.** O coeficiente de $x^4$ deve ser não nulo, isto é, $m^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \neq -\sqrt{2}$ e $m \neq \sqrt{2}$

**5.** O coeficiente de $x^3$ deve ser nulo: $2k^2 - 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

**6.**
- O grau será 8 se o coeficiente $m^2 - 16$ for não nulo:
  $m^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4$ e $m \neq 4$
- O grau será 5 se o coeficiente de $x^5$ for não nulo e o de $x^8$ for nulo:

  $$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4 \\ m + 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4 \end{cases} \Rightarrow m = 4$$

- O grau será 4 se os coeficientes de $x^8$ e de $x^5$ forem simultaneamente nulos:

  $$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4 \\ m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \end{cases} \Rightarrow m = -4$$

**7.** **a)** Sim; $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$ e $m \neq 2$

**b)** Sim; $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \\ m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m = 2$

**c)** Não, pois o coeficiente de $x^3$ é igual a zero.

**8.** $a = 0$ e $b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

**9.**
$$\begin{cases} a - 1 = 0 & \Rightarrow a = 1 \\ 2a - b + 3 = 0 & \Rightarrow 2 - b + 3 = 0 \Rightarrow b = 5 \\ b - c = 0 & \Rightarrow c = b = 5 \\ c - 2d = 0 & \Rightarrow d = \dfrac{1}{2} \cdot c = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

**10.** **a)** $p(0) = 3$

**b)** $p(1) = 1 - 5 + 3 = -1$

**c)** $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = -3$

**d)** $p(1 + i) = (1 + i)^2 - 5(1 + i) + 3 =$
$= \cancel{1} + 2i - \cancel{1} - 5 - 5i + 3 = -2 - 3i$

**e)** $p(i) = i^2 - 5i + 3 = 2 - 5i$

**f)** $p\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{15}{2} + 3 = -\dfrac{9}{4}$

**11.** $p(i) = i^3 - 5i^2 + 11i - 15 = -i + 5 + 11i - 15 \neq 0$;
**i** não é raiz.
$p(1) = 1 - 5 + 11 - 15 = -8 \neq 0$; 1 não é raiz.
$p(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 15 = 27 - 45 + 33 - 15 = 0$;
3 é raiz.
$p(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 - 5 \cdot (1 + 2i)^2 + 11 \cdot (1 + 2i) - 15 =$
$= \cancel{1} + 6i - \cancel{12} - 8i + \cancel{15} - 20i + \cancel{11} + 22i - \cancel{15} =$
$= 0$; $1 + 2i$ é raiz.
$p(0) = -15$; 0 não é raiz.

**12.** $(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + m + 4 = 0 \Rightarrow 1 + 4 + m + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -9$

**13.** $p(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 0$

$p(2) = 3 \Rightarrow a \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1 = 3$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 8a + 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2$$

**14.** $p(x) = ax + b;$

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b = 5 \\ a \cdot (-1) + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 3;\ p(x) = x + 3$$

**15.** **a)** $p(i) = 0 \Rightarrow i^2 + 3i + k = 0 \Rightarrow -1 + 3i + k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 1 - 3i$

**b)** $p(x) = x^2 + 3x + (1 - 3i)$

$p(2 + i) = (2 + i)^2 + 3 \cdot (2 + i) + 1 - 3i =$
$= 4 + 4i - \cancel{1} + 6 + \cancel{3i} + \cancel{1} - \cancel{3i} = 10 + 4i$

**16.** **a)** Sim; $p(0) = 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + \ldots + 50 \cdot 0 = 0$

**b)** $p(1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50 =$

$$= \underbrace{\frac{(1 + 50) \cdot 50}{2}}_{\text{soma dos termos de P.A.}} = 1\,275$$

**17.** $p(x) = ax^2 + bx + c$

- $p(2i) = a \cdot (2i)^2 + b \cdot 2i + c = (-4a + c) + 2bi = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + c = 0 \Rightarrow c = 4a \quad (1) \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (2) \end{cases}$$
- $a + b + c = 5$ (3)

(1) e (2) em (3):

$a + 0 + 4a = 5 \Rightarrow a = 1,\ c = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 4 \Rightarrow p(x) = x^2 + 4$

**18.** $\begin{cases} a + 3 = 2 \Rightarrow a = -1 \\ b - 1 = -3 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} m = 0 \\ 2n + 3 = 5 \Rightarrow n = 1 \\ -p = i \Rightarrow p = -i \end{cases}$

**20.** $\dfrac{m \cdot (x - 1) + n \cdot x}{x \cdot (x - 1)} = \dfrac{-3x + 4}{x(x - 1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (m + n)x - m = -3x + 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -3 \\ -m = 4 \Rightarrow m = -4 \text{ e } n = 1 \end{cases}$$

**21.** $\dfrac{a \cdot (x + 2) + bx \cdot (x - 2)}{x^2 - 4} = \dfrac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow bx^2 + (a - 2b)x + 2a = -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a - 2b = 3 \\ 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -1$$

**22.** $\dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{x + 1} = \dfrac{2x - 7}{x^2 - x - 2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot (x + 1) + b \cdot (x - 2)}{\underbrace{(x - 2) \cdot (x + 1)}_{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 7}{x^2 - x - 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a + b) \cdot x + (a - 2b) = 2x - 7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \phantom{2}b = 2 \\ a - 2b = -7 \end{cases} \ominus$$

$3b = 9 \Rightarrow b = 3$ e $a = -1$

$p(x) = -x + 3$

$p(i) = -i + 3$

$p(-i) = i + 3$

$\therefore p(i) + p(-i) = 6$

**23.** **a)** $(2x^2 - 3x + 4) + (x^3 - x + 1) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$

**b)** $(x^3 - x + 1) - (-x^2 + x - 4) = x^3 + x^2 - 2x + 5$

**c)** $(2x^2 - 3x + 4) - (x^3 - x + 1) - (-x^2 + x - 4) =$
$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

**d)** $(2x^2 - 3x + 4) \cdot (-x^2 + x - 4) =$
$= -2x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 16x - 16$

**e)** $x \cdot (2x^2 - 3x + 4) + 2 \cdot (x^3 - x + 1) =$
$= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^3 - 2x + 2 = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

**24.** $p_1(x) + p_2(x) = (a + b)x^2 + (b + 4)x + (c - 3);$

$$p_1(x) + p_2(x) \text{ é nulo se: } \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 4 = 0 \\ c - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = 4$ e $c = 3$

**25.** **a)** $(3x + 2i) - (ix) = (3 - i)x + 2i$

**b)** $i \cdot ix + 3x + 2i = -x + 3x + 2i = 2x + 2i$

**c)** $ix \cdot (3x + 2i) = 3ix^2 + 2xi^2 = 3ix^2 - 2x$

**26.** $a^2x^2 + 10ax + 25 + b^2 - 4bx + 4x^2 = 13x^2 + 42x + 34 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a^2 + 4)x^2 + (10a - 4b)x + (25 + b^2) =$
$= 13x^2 + 42x + 34$

$$\begin{cases} a^2 + 4 = 13 \Rightarrow a = \pm 3 \\ 10a - 4b = 42 \quad (*) \\ 25 + b^2 = 34 \Rightarrow b = \pm 3 \end{cases}$$

Os únicos valores que satisfazem (*) são $a = 3$ e $b = -3$.

**27.** **a)** $f(x) \cdot g(x)$ tem grau 8 (lembremos que $x^4 \cdot x^4 = x^8$).

**b)** $f(x) + g(x)$ tem grau menor ou igual a 4 ou $f(x) + g(x)$ pode ser o polinômio nulo para o qual não se define o grau. (Exemplo: $f(x) = x^4$ e $g(x) = -x^4$)
Veja um caso em que o grau é 3:
$f(x) = x^4 + 2x^3$ e $g(x) = -x^4 + 2x + 1$

**c)** $f(x) - g(x)$ tem grau menor ou igual a 4 ou ainda $f(x) - g(x)$ pode ser o polinômio nulo para o qual não se define grau. (Exemplo: $f(x) = 2x^4$ e $g(x) = 2x^4$)
Veja um caso em que o grau é 1:
$f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 5$
$g(x) = x^4 + x^2 - 7x + 4$
$f(x) - g(x) = 4x + 1$

**d)** $x^2 \cdot f(x)$ tem grau 6, pois $x^2 \cdot x^4 = x^6$.
$x \cdot g(x)$ tem grau 5, pois $x \cdot x^4 = x^5$.
$x^2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)$ tem grau 6 (o termo em $x^6$ de $x^2 \cdot f(x) + x \cdot g(x)$ é o mesmo termo que em $x^2 \cdot f(x)$).

**28.** **a)** Verdadeira; só o polinômio $h(x)$ possui termo em $x^5$; quando adicionamos $f(x) + g(x) + h(x)$, o termo em $x^5$ é o mesmo termo em $x^5$ de $h(x)$.

**b)** Falsa; como só g(x) tem termo em $x^3$, obrigatoriamente $f(x) - g(x)$ tem grau 3.

**c)** Verdadeira; tome $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = -x^5$

**d)** Verdadeira; tome $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = -x^5 + 2x^3 + 1$

**29. a)**

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 5x + 7 & 3x - 1 \\ \cline{2-2} -3x^2 + x & \underbrace{x + 2}_{q(x)} \\ \hline 6x + 7 & \\ -6x + 2 & \\ \hline 9 = r(x) & \end{array}$$

**b)**

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 4x^2 - 5x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} +x^3 \qquad - x & \underbrace{-x + 4}_{q(x)} \\ \hline 4x^2 - 6x + 1 & \\ -4x^2 \qquad + 4 & \\ \hline -6x + 5 = r(x) & \end{array}$$

**c)**

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -5x^4 \qquad + 20x^2 & \underbrace{5x^2 + 3x + 18}_{q(x)} \\ \hline 3x^3 + 18x^2 + 4x - 1 & \\ -3x^3 \qquad + 12x & \\ \hline 18x^2 + 16x - 1 & \\ -18x^2 \qquad + 72 & \\ \hline 16x + 71 = r(x) & \end{array}$$

**d)**

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 \qquad - x^3 + 4x^2 - 2x + 1 & x^3 - x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -3x^5 + 3x^4 \qquad - 3x^2 & \underbrace{3x^2 + 3x + 2}_{q = x} \\ \hline 3x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 & \\ -3x^4 + 3x^3 \qquad - 3x & \\ \hline 2x^3 + x^2 - 5x + 1 & \\ -2x^3 + 2x^2 \qquad - 2 & \\ \hline 3x^2 - 5x - 1 = r(x) & \end{array}$$

**e)** Como o grau do dividendo é menor que o grau do divisor, o quociente é o polinômio nulo e o resto é o próprio dividendo.

**f)**

$$\begin{array}{r|l} -5x^3 + 4x^2 + 7x - 11 & x \\ \cline{2-2} +5x^3 & \underbrace{-5x^2 + 4x + 7}_{q = (x)} \\ \hline 4x^2 + 7x - 11 & \\ -4x^2 & \\ \hline 7x - 11 & \\ -7x & \\ \hline -11 = r(x) & \end{array}$$

**g)**

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2ix - 3 & x - i \\ \cline{2-2} -x^2 + ix & x + 3i \\ \hline 3ix - 3 & \\ -3ix - 3 & \\ \hline -6 & \end{array}$$

**30. a)**

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x + 2 \\ \cline{2-2} -x^2 - 2x & x - 3 \\ \hline -3x - 6 & \\ +3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**b)**

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^2 - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 - x^2 & x^2 \\ \hline -1 & \end{array}$$

**c)**

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 \qquad + x + 1 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 2x^2 - 2x & 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - x + 1 & \\ -2x^2 + x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**d)**

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - x^2 & x^2 + x - 3 \\ \hline 2x^2 - 5x + 1 & \\ -2x^2 - x & \\ \hline -6x + 1 & \\ 6x + 3 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

**31.**

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2mx - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x + (2m + 1) \\ \hline (2m + 1)x - 5 & \\ -(2m + 1)x + (2m + 1) & \\ \hline -5 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 2 & \end{array}$$

**32.** $x^3 + x^2 + x + 1 = g(x) \cdot (1 + x) + x + 1$

Para que a igualdade acima possa ocorrer, é preciso que o grau de g(x) seja 2, isto é, $g(x) = ax^2 + bx + c$.

$x^3 + x^2 + x + 1 = (ax^2 + bx + c) \cdot (1 + x) + x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 =$

$= [ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c + 1)x + (c + 1)]$

Daí:

$$\begin{cases} a = 1 & (1) \\ a + b = 1 & (2) \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 0 \\ b + c + 1 = 1 & (3) \\ c + 1 = 1 & (4) \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$ satisfazem (3). Assim, $g(x) = x^2$.

**33.**

$$\begin{array}{c|l} \text{grau } 7 & \text{grau } 3 \\ \cline{2-2} \downarrow & q\ ? \\ r = ? & \end{array}$$

- O grau de **q** é igual à diferença $7 - 3 = 4$.
- O grau de **r** é menor que 3 ou $r = 0$, isto é, **r** é o polinômio nulo (nesse caso, não se define o grau).

**34.**

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 + mx^2 \qquad + n & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} +2x^3 + 2x^2 + 2x & -2x + (m + 2) \\ \hline (m + 2)x^2 + 2x + n & \\ -(m + 2)x^2 + (-m - 2)x + (-m - 2) & \\ \hline \underbrace{-mx + (n - m - 2)}_{\text{deve ser o polinômio nulo}} & \end{array}$$

assim, $\begin{cases} -m = 0 \\ n - m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ e $n = 2$

**35.** Seja $\ell(x)$ a largura do retângulo:

$(x + 2) \cdot \ell(x) = 3x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 5x - 2 & x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 - 6x & \underbrace{3x - 1}_{\ell(x)} \\ \hline -x - 2 & \\ +x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**36. a)** Seja **a** a medida da altura do paralelepípedo; temos:

$a \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot (x^2 - 4) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{2x^3 + x^2 - 8x - 4}{x^2 - 4}$

Façamos a divisão:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +\ x^2 & -\ 8x & -\ 4 & x^2 - 4 \\ -2x^3 & & 8x & & 2x + 1 \\ \hline & x^2 & & -\ 4 & \text{medida} \\ & -\ x^2 & & +\ 4 & \text{da altura} \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

**b)** $d = \sqrt{(x + 2)^2 + (x - 2)^2 + (2x + 1)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = \sqrt{6x^2 + 4x + 9}$
$\therefore$ não há polinômio que represente a diagonal.

**c)** $A = 2(x + 2)(x - 2) + 2(x + 2)(2x + 1) +$
$+ 2(x - 2)(2x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 2(x^2 - 4 + 2x^2 + \cancel{4x} + x + \cancel{2} + 2x^2 - \cancel{4x} +$
$+ x - \cancel{2}) \Rightarrow A = 2(5x^2 + 2x - 4)$
O polinômio que representa a área total do paralelepípedo é $10x^2 + 4x - 8$.

**37.** $f(x)$ | $x^2 + x + 1$ ; quociente $x^2 - x$ ; resto $-x + 13$

$f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x) + (-x + 13) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = (x^4 - x) + (-x + 13) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = x^4 - 2x + 13$

**38. a)** $r = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 4 = 14$
**b)** $r = f(-2) = -(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - 5(-2) + 1 = 35$
**c)** $r = f(4) = (4 - 4)^{10} + 3 \cdot 4 = 12$
**d)** $r = f(0) = 1$
**e)** $r = f(1) = 1 + 1 + 7 + 3 = 12$
**f)** $r = f(2i) = 4 \cdot (2i)^2 - (2i) - 1 = -17 - 2i$

**39. a)** $r = p(2) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + m = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4 + m = 0 \Rightarrow m = 4$
**b)** $r = p(-3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \cdot (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + m \cdot (-3) + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3m - 150 = 0 \Rightarrow m = -50$
**c)** $r = p(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + 2 + m - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 + m = 0 \Rightarrow m = 1$

**40.** O resto é $p(1) = (1^8 + 1) \cdot (3 - 1^{29} - 2 \cdot 1^{17}) =$
$= 2 \cdot (3 - 1 - 2) = 0$

**41.** $p(1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + n = 0$
$p(-2) = 6 \Rightarrow 2 \cdot (-2)^2 + m \cdot (-2) + n = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -2 \\ -2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ e } n = -2$

**42.** $p(x)$ | $x + 2$ → $r = p(-2) = 3$ $\qquad$ $p(x)$ | $x - 5$ → $r = p(5) = -2$

$p(x)$ | $\underbrace{x^2 - 3x - 10}_{(x + 2) \cdot (x - 5)}$ (*) ; quociente $q(x)$ ; $r(x) = ax + b = ?$

$p(x) = (x^2 - 3x - 10) \cdot q(x) + ax + b$ (*)

$p(-2) = \cancel{(-2 + 2) \cdot (-2 - 5)}^{0} \cdot q(-2) + a \cdot (-2) + b = 3$

$p(5) = \cancel{(5 + 2) \cdot (5 - 5)}^{0} \cdot q(5) + a \cdot 5 + b = -2$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 3 \\ 5a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\dfrac{5}{7}$ e $b = \dfrac{11}{7} \Rightarrow p(x) = -\dfrac{5}{7}x + \dfrac{11}{7}$

**43.** $p(x)$ | $x - 1$ → quociente $q_1(x)$, resto $r_1(x) = 4$ (*) $\qquad$ $q_1(x)$ | $x - 2$ → quociente $q_2(x)$, resto $r_2(x) = 3$

(*) Pelo teorema do resto, o resto na divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é igual a $p(1) = 4$.

$p(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) + 4$ (1)

$q_1(x) = (x - 2) \cdot q_2(x) + 3$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$p(x) = (x - 1) \cdot [(x - 2) \cdot q_2(x) + 3] + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot q_2(x) + 3x - 3 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot q_2(x) + 3x + 1$

Temos $p(x)$ | $(x - 1) \cdot (x - 2)$ → quociente $q_2(x)$, resto $r(x) = 3x + 1$

**44. a)**

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ \hline & -2 & -2 & -11 & \vert\ -32 \end{array}$$

$q(x) = -2x^2 - 2x - 11$
$r(x) = -32$

**b)** $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 9 & 12 & 4 \\ \hline & 9 & -6 & \vert\ 16 \end{array}$$

$r(x) = 16$
$q(x) = 9x - 6$

**c)**

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 3 & \vert\ -5 \end{array}$$

$q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$
$r(x) = -5$

**d)**

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \vert\ -1 \end{array}$$

$q(x) = x^2$
$r(x) = -1$

**45.**

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & -2 & m & 4 \\ \hline & 1 & -4 & m + 8 & \vert\ -2m - 12 \end{array}$$

$x^2 - 4x + (m + 8) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow m + 8 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -3$
$r(x) = -2m - 12 = -2 \cdot (-3) - 12 = 6 - 12 = -6$

**46.**

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 4 & 0 & -5 & 2 & m \\ \hline & 4 & 8 & 11 & 24 & \vert\ m + 48 \end{array}$$

**a)** $m + 48 = 0 \Rightarrow m = -48$
**b)** $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 2x - 48$

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 4 & 0 & -5 & 2 & -48 \\ \hline & 4 & -12 & 31 & -91 & 225 \end{array}$$

$q(x) = 4x^3 - 12x^2 + 31x - 91 \qquad r(x)$

**47.** $(x^4 + 1)^2 = x^8 + 2x^4 + 1$

| −1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | 1 | −1 | 3 | −3 | 3 | −3 | 4 |

$q(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

$r(x) = 4$

**48.**

| −1 | 2 | 0 | m | n |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −2 | m + 2 | n − m − 2 = 0 |

| $-\frac{1}{2}$ | 2 | 0 | m | n |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −1 | $m + \frac{1}{2}$ | $n - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}$ |

$n - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} n = m + 2 \\ n = 2 + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ e } n = \frac{5}{2}$

$m + n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

**49.**

| 3 | 2 | −3 | 1 | 6k |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 10 | 6k + 30 = 0 |

$\Rightarrow k = -5$

## Desafio

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -6x^3 & +16x^2 & -26x & +15 & x^2 - 2x + 5 \\ -x^4 & +2x^3 & -5x^2 & & & x^2 - 4x + 3 \\ \hline & -4x^3 & +11x^2 & -26x & +15 & \\ & +4x^3 & -8x^2 & +20x & & \\ \hline & & 3x^2 & -6x & +15 & \\ & & -3x^2 & +6x & -15 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Assim, $\underbrace{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 15}_{p(x)} =$

$= (x^2 - 2x + 5) \cdot (x^2 - 4x + 3)$

$p(x) \geqslant 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 - 2x + 5)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{g(x)} \geqslant 0$

Como **f** não tem raízes reais, o seu sinal é positivo, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$ (⊕ 1 ⊖ 3 ⊕)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

CAPÍTULO 9

# Equações algébricas

## Exercícios

**1.** **a)** $x^2 - 6x + 25 = 0$

$\Delta = 36 - 100 = -64$

$x = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$

$x^2 - 6x + 25 = (x - 3 - 4i) \cdot (x - 3 + 4i)$

**b)** $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 9$

$x = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} x = \frac{8}{4} = 2 \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \end{cases}$

$2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2) \cdot (x - 0{,}5)$

**c)** $2x^3 - 4x = 0$

$2x(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$2x^3 - 4x = 2 \cdot x \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$

**2.** $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 5) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$

**3.** $x^3 - x^2 - 7x + 15 = \underbrace{(x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i)} \cdot (x + 3)$

$= [(x - 2)^2 - i^2] \cdot (x + 3)$

$= (x^2 - 4x + 4 + 1) \cdot (x + 3)$

$= (x^2 - 4x + 5) \cdot (x + 3)$

**4.** **a)** $p(x) = 0$, sendo

$p(x) = a_n \cdot (x - 1 + 2i) \cdot (x - 1 - 2i)$, com $a_n \neq 0$

Considerando $a_n = 1$, temos:

$p(x) = (x - 1)^2 - (2i)^2$

$p(x) = x^2 - 2x + 1 + 4$

e a equação é: $x^2 - 2x + 5 = 0$

**b)** $p(x) = a_n \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$, com $a_n \neq 0$

$p(x) = a_n \cdot (x^2 - 2x - 15)$

$a_n = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

**c)** $p(x) = a_n \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot x$

$a_n = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ ou $2x^2 + x = 0$

**5.** **a)** $(x - 3 + i) \cdot (x - 3 - i) \cdot (x + 2) =$

$= [(x - 3)^2 - i^2] \cdot (x + 2) =$

$= (x^2 - 6x + 9 + 1) \cdot (x + 2) =$

$= x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

$p(x) = a_n \cdot (x^3 - 4x^2 - 2x + 20)$, com $a_n \neq 0$

Se $a_n = 1$, a equação é: $x^3 - 4x^2 - 2x + 20 = 0$

**b)** $(x - 0) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) =$

$= (x^2 - 2x) \cdot (x + 5) =$

$= x^3 + 3x^2 - 10x$

$p(x) = k \cdot (x^3 + 3x^2 - 10x)$, com $k \neq 0$

$k = 1 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

**6.** O polinômio dado é divisível por $x - 2$:

| 2 | 1 | 3 | −46 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | −36 | 0 |

$p(x) = (x^2 + 5x - 36) \cdot (x - 2)$; as demais raízes de $p(x)$ seguem de:

$x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 13}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = -9 \end{cases}$

$S = \{2, 4, -9\}$

**7.** O polinômio dado é divisível por $x - \frac{3}{2}$:

| $\frac{3}{2}$ | 2 | 5 | −2 | −15 |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 8 | 10 | 0 |

As demais raízes são obtidas de: $2x^2 + 8x + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm 4i}{4} = -2 \pm i$

$S = \left\{\dfrac{3}{2}, -2 + i, -2 - i\right\}$

**8.**

$$\begin{array}{r|rrr|r} -3 & 1 & 2 & m & -6 \\ \hline & 1 & -1 & m+3 & -3m-15 \end{array}$$

**a)** Como $-3$ é raiz, o polinômio $x^3 + 2x^2 + mx - 6$ é divisível por $x + 3$ e daí $-3m - 15 = 0 \Rightarrow m = -5$.

**b)** $q(x) = x^2 - x + (m + 3) = x^2 - x - 2$

$q(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

**9.**

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{4x^4} & -\cancel{4x^3} & -23x^2 & -x & -6 & x^2 - x - 6 \\ \cancel{-4x^4} & \cancel{+4x^3} & +24x^2 & & & 4x^2 + 1 \\ \hline & & \cancel{x^2} & -\cancel{x} & -\cancel{6} & \\ & & \cancel{-x^2} & \cancel{+x} & \cancel{+6} & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

$p(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (4x^2 + 1)$

$p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta > 0; \text{ raízes reais} \\ 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}i; \text{ duas raízes complexas não reais} \end{cases}$

**10.** $a = 1$

$p(x) = 1 \cdot (x - 7) \cdot (x + 5) \cdot (x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = (x^2 - 2x - 35) \cdot (x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = x^3 + x^2 - 41x - 105$

$a = 1$, $b = 1$, $c = -41$ e $d = -105$

$a + b + c + d = 1 + 1 - 41 - 105 = -144$

**11.** **a)** $x \cdot (x^2 + 2x - 24) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -6 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$S = \{0, 4, -6\}$

**b)** $x^4 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$S = \{0, 3, -1\}$

**c)** $x^2 \cdot (2x - 1) + 2 \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 2) \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{2} \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$

**d)** $x^2 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x + 1) = 0$

$(x^2 + 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right.$

$S = \{-i, i, -1\}$

**12.** $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = x \cdot (x^3 - x^2 - 3x + 3) =$

$= x \cdot [x^2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1)] = x \cdot (x^2 - 3) \cdot (x - 1)$

Raízes: $\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$

**13.** $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10 =$

$= 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow q(x) \cdot (x^2 - 1) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{x^4} & -6x^3 & +9x^2 & -6x & -10 & x^2 - 1 \\ \cancel{-x^4} & & +x^2 & + & & \underbrace{x^2 - 6x + 10}_{q(x)} \\ \hline & -\cancel{6x^3} & +10x^2 & -\cancel{6x} & -10 & \\ & \cancel{+6x^3} & & \cancel{+6x} & & \\ \hline & & \cancel{10x^2} & & -\cancel{10} & \\ & & \cancel{-10x^2} & & \cancel{+10} & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

De $q(x) = 0$, obtemos:

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$\Delta = -4$

$x = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

**14.** **a)** O gráfico intersecta o eixo **x** em três pontos distintos; são três raízes reais (nenhuma raiz complexa não real).

**b)** $c = 6$; (interseção do gráfico com o eixo **y**).

$p(x) = ax^3 + bx + 6$

$\begin{cases} p(-3) = 0 \\ p(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -27a - 3b + 6 = 0 \\ 8a + 2b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$ e $b = -7$

**c)** $x^3 - 7x + 6$ é divisível por $(x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} -3 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

As outras raízes são obtidas de:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (já conhecido) ou $x = 1$

**15.** **a)** $f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + p \cdot 1 + q = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p + q = -1$ (1)

$f(-1) = -2 \Rightarrow (-1)^3 + p \cdot (-1) + q = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -p + q = -1$ (2)

De (1) e (2) obtemos $q = -1$ e $p = 0$;

$f(x) = x^3 - 1$

**b)** $f(2) = 2^3 - 1 = 7$

**c)** $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 1 = -1$; a ordenada de **A** é $-1$.

**d)** 1 é raiz de $f(x)$, pois o gráfico de **f** intersecta o eixo **x** em $(1, 0)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

As outras raízes de **f** seguem de $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

**16.** **a)** O gráfico de **f** intersecta o eixo **x** em três pontos distintos. Assim, **f** possui 3 raízes reais.

**b)** As raízes de **f** são: $-r$, 0 e **r**. Pelo Teorema da decomposição, podemos escrever:

$f(x) = 1 \cdot (x + r) \cdot (x - 0) \cdot (x - r)$

$f(x) = x \cdot (x^2 - r^2)$ (*)

Como $f\left(-\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$, temos:

$6\sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot \left[\left(-\sqrt{3}\right)^2 - r^2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot (3 - r^2) \Rightarrow -6 = 3 - r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \pm 3$

Assim, as raízes de **f** são: $-3$, 0 e 3.

**c)** Em (*), temos:

$f(x) = x \cdot (x^2 - 9) = x^3 - 9x$

Comparando com o polinômio $x^3 + px^2 + qx + r$, concluímos que: $p = 0$, $q = -9$ e $r = 0$.

**17.** O polinômio dado é divisível por:

$(x - 1 - 3i) \cdot (x - 1 + 3i) = (x - 1)^2 - (3i)^2 =$

$= x^2 - 2x + 10$. Façamos a divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 70x + 50 & x^2 - 2x + 10 \\ -x^4 + 2x^3 - 10x^2 & x^2 - 6x + 5 \;\; (q(x)) \\ \hline -6x^3 + 17x^2 - 70x + 50 & \\ +6x^3 - 12x^2 + 60x & \\ \hline 5x^2 - 10x + 50 & \\ -5x^2 + 10x - 50 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

De $q(x) = 0$, obtemos: $x = 1$ ou $x = 5$.

Logo, $S = \{1 + 3i, 1 - 3i, 1, 5\}$

**18. a)** $y^2 + 4y - 5 = 0$

$\Delta = 16 + 20 = 36$

$y = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} y = 1 \\ y = -5 \end{cases}$

$y^2 + 4y - 5 = (y - 1) \cdot (y + 5)$

**b)** $[p(x)]^2 = p(x) \cdot p(x)$ tem grau 4 $(x^2 \cdot x^2 = x^4)$

Assim, o grau de $q(x)$ é 4.

**c)** Pelo item *a*, podemos escrever:

$q(x) = [p(x) - 1] \cdot [p(x) + 5] \Rightarrow$

$\Rightarrow q(x) = [x^2 - 2x - 2 - 1] \cdot [x^2 - 2x - 2 + 5] \Rightarrow$

$\Rightarrow q(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 3)$

$q(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ ou $x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Downarrow$ $\qquad \Delta = 4 - 12 = -8$

$x = -1$ ou $x = \dfrac{2 \pm i2\sqrt{2}}{2}$

$x = 3$ $\qquad x = 1 \pm i\sqrt{2}$

As raízes de $q(x) = 0$ são: $-1$, 3, $1 + i\sqrt{2}$, $1 - i\sqrt{2}$.

**19. a)** $x^3 \cdot (x + 2)^4 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x = 0; \text{ raiz tripla} \\ \text{ou} \\ (x + 2)^4 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2; \\ \text{raiz quarta (ou quádrupla)} \\ \text{ou} \\ (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{raiz dupla} \\ \text{ou} \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6; \text{ raiz simples} \end{cases}$

**b)** O grau é $3 + 4 + 2 + 1 = 10$.

**c)** $S = \{0, -2, 1, -6\}$

**20. a)** Basta somar as multiplicidades das raízes:

$2 + 1 + 1 = 4$

**b)** $p(x) = a_n \cdot (x - 4)^2 \cdot (x - 2) \cdot x$, com $a_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = a_n \cdot (x^2 - 8x + 16) \cdot (x^2 - 2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) = a_n \cdot (x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 32x)$

$a_n = 1 \Rightarrow x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 32x = 0$

**21. a)** $p(x) = k \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5) =$

$= k \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 5) =$

$= k \cdot (x^2 + 6x + 9) \cdot (x - 5) = k \cdot (x^3 + x^2 - 21x - 45)$, com $k \neq 0$

Fazendo-se $k = 1$, segue a equação:

$x^3 + x^2 - 21x - 45 = 0$

**b)** $p(x) = k \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3i) \cdot (x + 3i) =$

$= k \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot [(x^2 - (3i)^2] =$

$= k \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 + 9)$, com $k \neq 0$

Escolhendo-se $k = 1$, segue a equação:

$(x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 + 9) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36 = 0$

**22.** $\underbrace{x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 51x - 36}_{p(x)} = (x - 3)^2 \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)}$

$q(x)$ é obtido da divisão de $p(x)$ por $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 51x - 36 & x^2 - 6x + 9 \\ -x^4 + 6x^3 - 9x^2 & x^2 + 3x - 4 \\ \hline 3x^3 - 22x^2 + 51x - 36 & \\ -3x^3 + 18x^2 - 27x & \\ \hline -4x^2 + 24x - 36 & \\ +4x^2 - 24x + 36 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

As demais raízes seguem de $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

$S = \{3, 1, -4\}$

**23. a)** 2 é raiz: $4 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 + m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 - 76 + 56 + m = 0 \Rightarrow m = -12$

**b)** O polinômio dado é divisível por

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$:

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - 19x^2 + 28x - 12 & x^2 - 4x + 4 \\ -4x^3 + 16x^2 - 16x & 4x - 3 \\ \hline -3x^2 + 12x - 12 & \\ +3x^2 - 12x + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

De $4x - 3 = 0$, obtemos $x = \dfrac{3}{4}$.

**24.** $x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 4x^2 = x^2 \cdot \underbrace{(x^3 - 2x^2 - 7x - 4)}_{\text{raízes: } -1,\ -1,\ r_3}$

$\downarrow$

raiz é zero, com multiplicidade 2

O polinômio $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ fatora-se em:

$(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - r_3) =$

$= (x + 1)^2 \cdot \underbrace{(x - r_3)}_{q(x)}$

Dividimos $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ por $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2x^2 & -7x & -4 & x^2+2x+1 \\ -x^3 & -2x^2 & -x & & x-4 \\ \hline & -4x^2 & -8x & -4 & \\ & +4x^2 & +8x & +4 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

A raiz de q(x) é obtida de:

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4;\ S = \{0, -1, 4\}$

**25.**

$$\begin{array}{c|ccccc} 4 & 1 & -10 & 24 & 32 & -128 \\ \hline & 1 & -6 & 0 & 32 & 0 \end{array} \leftarrow \text{4 é raiz simples}$$

Verifiquemos se 4 é raiz de $x^3 - 6x^2 + 32$:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -6 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array} \leftarrow \text{4 é raiz dupla}$$

Verifiquemos se 4 é raiz de $x^2 - 2x - 8$:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \leftarrow \text{4 é raiz tripla}$$

Verifiquemos se 4 é raiz de $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$; portanto, 4 não é raiz de $x + 2$.

Logo, 4 é raiz tripla da equação dada.

**26.** Aplicando o teorema da decomposição e sabendo que as raízes são **m**, **m** e $-2m$, temos:

$x^3 - 75x + 250 = 1 \cdot (x - m) \cdot (x - m) \cdot (x + 2m) =$

$= (x - m)^2 \cdot (x + 2m)$, isto é,

$x^3 - 75x + 250 = x^3 - 3m^2x + 2m^3$ e, comparando seus coeficientes, temos:

$$\begin{cases} -75 = -3m^2 \Rightarrow m = \pm 5 \\ \text{e} \\ 250 = 2m^3 \Rightarrow m = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 5;$$

Uma raiz (dupla) é 5 e a outra raiz é $-10$.

**27.** Inicialmente, dividimos p(x) por $x^2 + 4x + 4$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & +12x^3 & +x^2 & -12x & +4 & x^2+4x+4 \\ -4x^4 & -16x^3 & -16x^2 & & & 4x^2-4x+1 \\ \hline & -4x^3 & -15x^2 & -12x & +4 & \\ & +4x^3 & +16x^2 & +16x & & \\ \hline & & x^2 & +4x & +4 & \\ & & -x^2 & -4x & -4 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

E p(x) pode ser escrito como:

$p(x) = (x^2 + 4x + 4) \cdot (4x^2 - 4x + 1)$

A equação $p(x) = 0$ equivale a:

$(x^2 + 4x + 4) \cdot (4x^2 - 4x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ (raiz dupla)} \\ \text{ou} \\ 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (raiz dupla)} \end{cases}$$

**28.** Temos: $c = 9$ (interseção do gráfico com o eixo **y**).

**a)**

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 + & ax^2 + & bx + & 9 & x^2-6x+9 \\ -x^3 + & 6x^2 - & 9x & & x+(a+6) \\ \hline & (a+6)x^2 + & (b-9)x + & 9 & \\ & -(a+6)x^2 + & (6a+36)x - & 9a-54 & \\ \hline & & (6a+b+27)x + & (-9a-45) = 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 6a + b + 27 = 0 \\ -9a - 45 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -5 \text{ e } b = 3$$

**b)** $p(x) = (x^2 - 6x + 9) \cdot [x + (-5 + 6)] =$

$= (x - 3)^2 \cdot (x + 1) \Rightarrow 3$ é raiz dupla e $-1$ é raiz simples.

**29. a)** $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$

**b)** $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$

**c)** $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 \cdot r_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

**d)** Como $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1 \cdot r_2 + r_2^2$, temos:

$3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - 12 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = -3$

**e)** $16r_1r_2 + 4r_1 + 4r_2 + 1 = 16 \cdot r_1r_2 + 4 \cdot (r_1 + r_2) + 1 =$

$= 16 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 1 = 109$

**f)** $(-7r_1 - 7r_2)^2 = [-7 \cdot (r_1 + r_2)]^2 = 49 \cdot (r_1 + r_2)^2 =$

$= 49 \cdot 3^2 = 441$

**30. a)** $\begin{cases} r_1 - r_2 = -\frac{1}{3} \\ r_1 + r_2 = \frac{2}{3}\left(= -\frac{b}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow 2r_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{6} \text{ e } r_2 = \frac{1}{2}$

**b)** O produto das raízes é $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = \frac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{m}{-3} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

**31. a)** Soma $= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2$

Produto $= \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = 5$

**b)** A equação é: $4x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-76}}{8} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{19}}{8} = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{4}$

**32.** O produto das raízes é $\frac{c}{a} = 54$; $r_1 \cdot r_2 = 54$; como $r_1 = \frac{3r_2}{2}$, temos:

$\frac{3r_2}{2} \cdot r_2 = 54 \Rightarrow r_2^2 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 = -6$ ou $r_2 = 6$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$r_1 = \frac{3}{2} \cdot (-6) = -9$ ou $r_1 = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

soma das raízes é: $-6 + (-9) = -15$ | soma das raízes é: $6 + 9 = 15$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\frac{-p}{1} = -15 \Rightarrow p = 15$ | $\frac{-p}{1} = 15 \Rightarrow p = -15$

**33. a)** $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-2)}{-1} = -2$

**b)** $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} = \frac{6}{-1} = -6$

**c)** $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-5)}{-1} = -5$

**d)** $\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3} = \frac{r_3 + r_2 + r_1}{r_1r_2r_3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

**e)** $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$

**34.** Vamos representar as raízes por $\mathbf{r_1}$, $r_1 + 1$, $r_1 + 2$.

Como a soma das raízes é $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-9)}{1} = 9$, temos:

$r_1 + r_1 + 1 + r_1 + 2 = 9 \Rightarrow 3r_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 2$

As raízes são: 2, 3 e 4.

**35.** $r_1 = r_2 \cdot r_3$ (*)

Como $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \dfrac{-d}{a} = -\dfrac{(-8)}{2} = 4$, usando (*), temos:

$r_1 \cdot r_1 = 4 \Rightarrow r_1^2 = 4 \overset{r_1 > 0}{\Longrightarrow} r_1 = 2$

Dividimos $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8$ por $x - 2$:

| 2 | 2 | −13 | 22 | −8 |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −9 | 4 | 0 |

As outras raízes seguem de:

$2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 4$

$S = \left\{2, \dfrac{1}{2}, 4\right\}$

**36.** Soma das raízes: $(3 - 4i) + (3 + 4i) = 6 = -\dfrac{p}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = -6$

Produto das raízes: $(3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 =$

$= 25 = \dfrac{q}{1} \Rightarrow q = 25$

**37. a)** Vamos representar as raízes por: $\mathbf{r_1}$, $-r_1$, $\mathbf{r_3}$.

Soma $= \dfrac{-b}{a} \Rightarrow \cancel{r_1} + (\cancel{-r_1}) + r_3 = \dfrac{-(-3)}{1} \Rightarrow r_3 = 3$

Dividimos $x^3 - 3x^2 + mx + 12$ por $x - 3$:

| 3 | 1 | −3 | m | 12 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | m | 3m + 12 = 0 |

$\Rightarrow m = -4$

**b)** As outras raízes são obtidas de:

$x^2 + m = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

**c)** A equação procurada deve ter como raízes os números:

$-2 + 3$, $2 + 3$ e $3 + 3$, ou seja, 1, 5 e 6.

A equação procurada é $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Temos:

$1 + 5 + 6 = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow -b = 12 \cdot a$

$1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 41 \cdot a$

$1 \cdot 5 \cdot 6 = \dfrac{-d}{a} \Rightarrow d = -30 \cdot a$

Escolhendo-se, por exemplo, $a = 1$, temos $b = -12$, $c = 41$ e $d = -30$:

$x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

**38. a)** As raízes dessa equação são: $\mathbf{r}$, $r^2$ e $r^3$.

Como o produto de todas as raízes é $\dfrac{-d}{a}$, escrevemos:

$r \cdot r^2 \cdot r^3 = -\dfrac{(-729)}{1} \Rightarrow r^6 = 729 \Rightarrow r = \pm\sqrt[6]{729}$

$r = \pm\sqrt[6]{3^6} \Rightarrow r = \pm 3$

- Se $r = 3$, as raízes são: 3, 9 e 27. Mas essas três raízes não satisfazem a relação de Girard, pois $3 + 9 + 27 = 39 \neq \dfrac{-b}{a} = -21$
- Se $r = -3$, as raízes são: $-3$, 9 e $-27$. Note que $(-3) + 9 + (-27) = -21$.

Assim, como $-3$ é raiz, temos:

$(-3)^3 + 21 \cdot (-3)^2 + m \cdot (-3) - 729 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3m = 567 \Rightarrow m = -189$

**b)** Pelo item anterior, as raízes são $-3$, 9 e $-27$.

**39. a)** As raízes são 2, $-3$ e 1; a soma é $2 + (-3) + 1 = 0$ e o produto é $2 \cdot (-3) \cdot 1 = -6$.

**b)** Soma $= \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{(-3)}{1} = 3$; Produto $= \dfrac{e}{a} = \dfrac{-1}{1} = -1$

**c)** Soma $= \dfrac{-b}{a} = 0$; Produto $= \dfrac{g}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$

**d)** Soma $= \dfrac{-b}{a} = 0$; Produto $= \dfrac{e}{a} = \dfrac{-3}{1} = -3$

**40.** $r_1 = r_2 - r_3$ (*)

$r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-b}{a} = 10 \overset{*}{\Rightarrow} r_2 \cancel{- r_3} + r_2 \cancel{+ r_3} = 10 \Rightarrow r_2 = 5$

Dividimos $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ por $x - 5$:

| 5 | 1 | −10 | 31 | −30 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 6 | 0 |

As demais raízes seguem de:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

$S = \{5, 2, 3\}$

**41. a)** Vamos representar as raízes por: $r_2 - 2$, $\mathbf{r_2}$, $r_2 + 2$

Soma $= \dfrac{-b}{a} = 30 \Rightarrow (r_2 - 2) + r_2 + (r_2 + 2) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3r_2 = 30 \Rightarrow r_2 = 10$

As outras raízes são 8 e 12.

**b)** $8 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 + 96 + 120 = \dfrac{m}{1} \Rightarrow m = 296$

$8 \cdot 10 \cdot 12 = \dfrac{-d}{a} \Rightarrow 960 = -\dfrac{n}{1} \Rightarrow n = -960$

**42.** Raízes: 1, 1, 1, $\mathbf{r_4}$, $\mathbf{r_5}$

Soma $= \dfrac{-b}{a} \Rightarrow 1 + 1 + 1 + r_4 + r_5 = -\dfrac{(-3)}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_4 + r_5 = 0 \Rightarrow r_4 = -r_5$

Produto $= \dfrac{-f}{a} \Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot r_4 \cdot r_5 = -\dfrac{(-1)}{1} \Rightarrow r_4 \cdot r_5 = 1$

Como $r_4 = -r_5$, temos: $(-r_5) \cdot r_5 = 1 \Rightarrow r_5^2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r_5 = i \Rightarrow r_4 = -i)$ ou $(r_5 = -i \Rightarrow r_4 = i)$

$S = \{1, i, -i\}$

**43. a)** Produto $= -\dfrac{25}{2} \Rightarrow -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{25}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-q}{-2} = \dfrac{-25}{2} \Rightarrow q = -25$

$-\dfrac{1}{2}$ é raiz; portanto, temos:

| $-\frac{1}{2}$ | −2 | p | −44 | −25 |
|---|---|---|---|---|
| | −2 | p + 1 | $\frac{-p - 89}{2}$ | $\frac{p + 89}{4} - 25$ |
| | q(x) | | | 0 |

Assim:

$\dfrac{p + 89}{4} - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 11$

**b)** Se $p = 11$, as demais raízes seguem de $q(x) = 0$, isto é:

$-2x^2 + 12x - 50 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 3 - 4i, 3 + 4i\right\}$

**44.** Sendo: **p**, **p**, **q**, **q** as raízes da equação, temos:

$p + p + q + q = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow 2p + 2q = -4$ (1)

$p \cdot p \cdot q \cdot q = \dfrac{e}{a} \Rightarrow (p \cdot q)^2 = 9 \Rightarrow p \cdot q = \pm 3$ (2)

De (1), temos $p = -2 - q$; em (2) temos:

$(-2 - q) \cdot q = 3$ ou $(-2 - q) \cdot q = -3$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$q^2 + 2q + 3 = 0$ $q^2 + 2q - 3 = 0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$q \notin \mathbb{R}$ $q = 1$ ou $q = -3$

Se $q = 1$, obtemos $p = -2 - 1 = -3$

Se $q = -3$, obtemos $p = -2 - (-3) = 1$

Note que $p = -3$ e $q = 1$ satisfazem as demais relações de Girard:

- $p \cdot p + p \cdot q + p \cdot q + p \cdot q + p \cdot q + q \cdot q = \dfrac{c}{a} \Rightarrow$
  $\Rightarrow p^2 + 4pq + q^2 = -2$
- $p \cdot p \cdot q + p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot q + p \cdot q \cdot q = \dfrac{-d}{a} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2p^2q + 2pq^2 = 12$

$S = \{-3, 1\}$

**45. a)** Raízes: 2, −3, 4 + i, 4 − i; o menor grau possível é 4.

**b)** Raízes: −2, 2 + i, 2 − i.

$p(x) = k \cdot (x + 2) \cdot (x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i) =$

$= k \cdot (x + 2) \cdot [(x - 2)^2 - i^2] =$

$= k \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 5) =$

$= k \cdot (x^3 - 2x^2 - 3x + 10)$; $k \in \mathbb{R}^*$

Escolhendo-se $k = 1$, segue a equação:

$x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$

**c)** **i**, **i**, −i e −i são as raízes que, obrigatoriamente, a equação possui.

$p(x) = k \cdot (x - i)^2 \cdot (x + i)^2 = k[(x - i) \cdot (x + i)]^2 = k \cdot (x^2 - i^2)^2 =$

$= k \cdot (x^2 + 1)^2 = k \cdot (x^4 + 2x^2 + 1)$, com $k \in \mathbb{R}^*$

Tomando-se, por exemplo, $k = 1$, obtemos a equação:

$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

**46.** $3 + 5i$ é raiz $\Rightarrow 3 - 5i$ também é raiz;

como $r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow 3 + \cancel{5i} + 3 - \cancel{5i} + r_3 =$

$= -\dfrac{(-9)}{1} \Rightarrow 6 + r_3 = 9 \Rightarrow r_3 = 3$

$S = \{3 - 5i, 3 + 5i, 3\}$

**47.** $3 - i$ é raiz $\Rightarrow 3 + i$ é raiz

Soma $= (3 + i) + (3 - i) = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow 6 = \dfrac{(a + 10)}{2} \Rightarrow a = 2$

Produto $= \dfrac{b}{2} = (3 + i) \cdot (3 - i) \Rightarrow \dfrac{b}{2} = 3^2 - i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{b}{2} = 10 \Rightarrow b = 20$

**48. a)** Verdadeira.

**b)** Falsa; as raízes complexas não reais ocorrem aos pares, em uma equação com coeficientes reais.

**c)** Falsa; não vale o teorema, pois a equação não apresenta todos os coeficientes reais. Note que −i não é raiz:

$i \cdot (-i)^2 + 2 \cdot (-i) - i = (-i) - 2i - i = -4i \neq 0$

**d)** Verdadeira; como a equação tem coeficientes reais, ela poderá ter: 2 reais e 2 complexas não reais, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, **i** e −i.

**e)** Falsa; se houvesse apenas uma raiz real, as outras três seriam complexas não reais, o que é absurdo, pois raízes complexas não reais só ocorrem aos pares, em equações com coeficientes reais.

**49. a)** Como a equação tem coeficientes reais, se $4 + 2i$ é raiz, $4 - 2i$ também é raiz. Temos:

$(4 - \cancel{2i}) + (4 + \cancel{2i}) = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow \dfrac{-b}{a} = 8$ (1)

$(4 - 2i) \cdot (4 + 2i) = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 4^2 - (2i)^2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 20 = \dfrac{c}{a}$ (2)

Como a parábola intersecta o eixo **y** em (0, 10), temos $x = 0 \Rightarrow y = 10$, isto é, $c = 10$.

Em (2), temos: $20 = \dfrac{10}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Em (1), temos: $\dfrac{-b}{\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow b = -4$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 10$

$x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$

$y_V = \dfrac{1}{2} \cdot 16 - 16 + 10 = 2$

Logo: V(4, 2)

**50.** A equação tem coeficientes reais; $1 - 2i$ é raiz $\Rightarrow 1 + 2i$ também é raiz.

Soma $= \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{(-18)}{9} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 - 2i) + (1 + 2i) + r_3 + r_4 = 2 \Rightarrow 2 + r_3 + r_4 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_3 = -r_4$ (1)

Produto $= \dfrac{e}{a} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow (1 - 2i) \cdot (1 + 2i) \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow [1^2 - (2i)^2] \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow 5 \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_3 \cdot r_4 = \dfrac{1}{9}$ (2)

Substituindo (1) em (2) $\Rightarrow -r_4 \cdot r_4 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_4^2 = -\dfrac{1}{9} \Rightarrow r_4 = \pm\dfrac{1}{3}i$

$S = \left\{1 - 2i, 1 + 2i, -\dfrac{1}{3}i, \dfrac{1}{3}i\right\}$

**51.** A equação tem coeficientes reais; $-3i$ é raiz $\Rightarrow 3i$ é raiz.

**a)** $(3i)^4 - 2 \cdot (3i)^3 + (3i)^2 + a \cdot 3i - 72 =$

$= 81i^4 - 54i^3 + 9i^2 + 3ai - 72 =$

$= 81 + 54i - 9 + 3ai - 72 = (54 + 3a)i$

Como $p(3i) = 0$, devem ter: $54 + 3a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -18$

**b)** $(-3i) + 3i + r_3 + r_4 = \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow r_3 + r_4 = 2$ (1)

$(-3i) \cdot (3i) \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a} = -72 \Rightarrow -9i^2 \cdot r_3 \cdot r_4 = -72 \Rightarrow r_3 \cdot r_4 = -8$ (2)

De (1): $r_3 = 2 - r_4$

$(2 - r_4) \cdot r_4 = -8 \Rightarrow -r_4^2 + 2r_4 = -8 \Rightarrow r_4^2 - 2r_4 - 8 = 0 \Rightarrow r_4 = \frac{2 \pm 6}{2}$ ⟨ $r_4 = 4$ ou $r_4 = -2$

$S = \{-3i, 3i, 4, -2\}$

**52.** As quatro raízes são: **i**, −i, 2 e 2:

Soma $= \frac{-b}{a} \Rightarrow \cancel{i} + (\cancel{-i}) + 2 + 2 = -\frac{p}{1} \Rightarrow p = -4$

$i \cdot (-i) + i \cdot 2 + i \cdot 2 + (-i) \cdot 2 + (-i) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -i^2 + \cancel{2i} + \cancel{2i} - \cancel{2i} - \cancel{2i} + 4 = \frac{q}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(-1) + 4 = q \Rightarrow q = 5$

$i \cdot (-i) \cdot 2 + i \cdot (-i) \cdot 2 + i \cdot 2 \cdot 2 + (-i) \cdot 2 \cdot 2 = \frac{-d}{a} \Rightarrow -2i^2 - 2i^2 + \cancel{4i} - \cancel{4i} = \frac{-r}{1} \Rightarrow 2 + 2 = -r \Rightarrow r = -4$

$i \cdot (-i) \cdot 2 \cdot 2 = \frac{e}{a} \Rightarrow -4i^2 = \frac{s}{1} \Rightarrow s = 4$

**53.** Raízes: $1 + i$, $1 - i$, $\mathbf{r_3}$

- $(1 + i) \cdot (1 - i) + (1 + i)r_3 + (1 - i)r_3 = \frac{c}{a}$

  $1^2 - i^2 + r_3 + \cancel{ir_3} + r_3 - \cancel{ir_3} = \frac{2}{1} = 2$

  $2 + 2r_3 = 2 \Rightarrow r_3 = 0$
- $(1 + i) \cdot (1 - i) \cdot 0 = -\frac{d}{a} \Rightarrow -n = 0 \Rightarrow n = 0$
- $(1 + \cancel{i}) + (1 - \cancel{i}) + 0 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2 = -m \Rightarrow m = -2$

**54.** As raízes de **f** são −i, **i** e 1.

Usando as relações de Girard, temos:

- $(-i) + i + 1 = \frac{-m}{1} \Rightarrow m = -1$
- $(-i) \cdot i + (-i) \cdot 1 + i \cdot 1 = \frac{n}{1} \Rightarrow n = -i^2 - i + i = 1$
- $(-i) \cdot i \cdot 1 = \frac{-p}{1} \Rightarrow -i^2 = -p \Rightarrow p = -1$

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 \Rightarrow f(2) = 5$

**55.** $D(2) = \{\pm 2, \pm 1\}$

$D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Candidatos a raízes: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Seja $p(x) = 2x^3 + x^2 - 25x + 12$.

$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 25 \cdot \frac{1}{2} + 12 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{25}{2} + 12 = 0$

$p(-4) = 2 \cdot (-4)^3 + (-4)^2 - 25 \cdot (-4) + 12 = -128 + 16 + 100 + 12 = 0$

$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 25 \cdot 3 + 12 = 54 + 9 - 75 + 12 = 0$

São raízes: $\frac{1}{2}$, −4 e 3.

**56. a)** $D(1) = \{\pm 1\}$

$D(2) = \{\pm 2, \pm 1\}$

Candidatos a raízes: $\pm 2, \pm 1$; $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

$p(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$

$p(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) - 2 = -8 - 4 + 2 - 2 = -12 \neq 0$

$p(1) = 1 - 1 - 1 - 2 = -3 \neq 0$

$p(-1) = -1 - 1 + 1 - 2 = -3 \neq 0$

A única raiz inteira é 2;

| 2 | 1 | −1 | −1 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

As outras seguem de $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

**b)** Candidatos a raízes: ±24, ±12, ±8, ±6, ±4, ±3, ±2, ±1
Fazendo-se as verificações, obtêm-se como raízes: −4, 2 e 3.
$f(-4) = -64 - 16 + 56 + 24 = 0$
$f(2) = 8 - 4 - 28 + 24 = 0$
$f(3) = 27 - 9 - 42 + 24 = 0$

**57.** Seja **x** o número procurado:
$x^3 - x^2 = 3x^2 + 25 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - 25 = 0$
Fazendo a pesquisa de raízes, notamos que $x = 5$ é raiz: $5^3 - 4 \cdot 5^2 - 25 = 0$. Para obter as outras raízes, fazemos a divisão:

| 5 | 1 | −4 | 0 | −25 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 5 | 0 |

As outras raízes seguem de $x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$; $x = 5$ é a única raiz real.

**58.** Possíveis raízes racionais: {±8, ±4, ±2, ±1}.
1 é raiz: $1 + 1 + 2 + 4 - 8 = 0$
−2 é raiz: $16 - \cancel{8} + \cancel{8} - 8 - 8 = 0$
O polinômio dado é divisível por $(x - 1) \cdot (x + 2)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & + \cancel{x^3} & + 2x^2 & + 4x & - 8 & x^2 + x - 2 \\
\cancel{-x^4} & \cancel{-} x^3 & + 2x^2 & & & x^2 + 4 \\
\hline
 & & 4x^2 & + 4x & - 8 & \\
 & & -4x^2 & - 4x & + 8 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

De $x^2 + 4 = 0$, obtemos as raízes $-2i$ e $2i$.
$S = \{1, -2, -2i, 2i\}$

**59. a)** Se houver alguma raiz racional, será um elemento do conjunto {±12, ±6, ±4, ±3, ±2, ±1}. Fazendo as verificações, notamos que nenhum dos números é raiz da equação. Como, por hipótese, há quatro raízes reais, concluímos que todas são irracionais.

**b)**
$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & - 2x^3 & - 7x^2 & + 6x & + 12 & x^2 - 3 \\
\cancel{-x^4} & & + 3x^2 & & & x^2 - 2x - 4 \\
\hline
 & - \cancel{2x^3} & - 4x^2 & + \cancel{6x} & + 12 & \\
 & \cancel{2x^3} & & \cancel{-} 6x & & \\
\hline
 & & - 4x^2 & & \cancel{+12} & \\
 & & \cancel{4x^2} & & - 12 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, $p(x) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 - 2x - 4)$ e $p(x) = 0$ fornece:
$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$

**60. a)** Possíveis raízes inteiras: {±1, ±5}.
1 é raiz, pois $1 - 5 + 9 - 5 = 0$; por verificação, temos que −1, 5 e −5 não são raízes da equação.

**b)** Dividimos $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ por $x - 1$:

| 1 | 1 | −5 | 9 | −5 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −4 | 5 | 0 |

$x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$;
$S = \{1, 2 - i, 2 + i\}$

**61.** Como D(13) = {±1, ±13} e D(4) = {±1, ±2, ±4}, vamos verificar se há alguma raiz racional. Se houver, será um elemento de:
$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 13, \pm\frac{13}{2}, \pm\frac{13}{4}\right\}$$
Notemos que a equação tem uma raiz real entre 0 e 1 (veja o gráfico no enunciado do exercício), que poderá ser racional ou irracional.

Se $x = \frac{1}{4}$, temos: $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 58 \cdot \frac{1}{4} - 13 = 0$

$\therefore \frac{1}{4}$ é raiz

| $\frac{1}{4}$ | 4 | −25 | 58 | −13 |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | −24 | 52 | 0 |

As outras duas raízes seguem de $x^2 - 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 4i}{2} \Rightarrow x = 3 \pm 2i$

$S = \left\{\frac{1}{4}, 3 - 2i, 3 + 2i\right\}$

**62.** $V_{cubo} = x^3$ e $V_{paral.} = \frac{3x}{2} \cdot x \cdot (x - 3) = \frac{3x^3}{2} - \frac{9x^2}{2}$

A condição do problema é:

$V_{cubo} - V_{paral.} = 32 \Rightarrow x^3 - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{2} = 32 \Rightarrow -x^3 + 9x^2 - 64 = 0$

Pesquisando possíveis raízes racionais, vemos que $x = 8$ é raiz:

| 8 | −1 | 9 | 0 | −64 |
|---|---|---|---|---|
| | −1 | 1 | 8 | 0 |

As outras raízes são obtidas de:

$x^2 - x - 8 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \simeq 3{,}37$

**63.**

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\not{x^5} & -2x^4 & -8x^3 & -x^2 & \not{+}2x & +8 & x^3 - 1 \\
\not{-}x^5 & & & +\not{x^2} & & & \overline{x^2 - 2x - 8} \\
\hline
 & -\not{2x^4} & -8x^3 & & +\not{2x} & +8 & \\
 & \not{+}2x^4 & & & \not{-}2x & & \\
\hline
 & & -\not{8x^3} & & & +\not{8} & \\
 & & \not{+}8x^3 & & & \not{-}8 & \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 2x + 8 = \underbrace{(x^3 - 1)}_{f} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 8)}_{g}$

Vamos encontrar as raízes de $f(x) = x^3 - 1$.

Como $f(1) = 1^3 - 1 = 0$, $x = 1$ é raiz.

| 1 | 1 | 0 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

As raízes de $g(x) = x^2 - 2x - 8$ são −2 e 4.

Assim, as raízes da equação $p(x) = 0$ são:

$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, 1, −2 e 4.

## Desafio

**a)** As raízes do polinômio são $a + bi$, $a - bi$, $\mathbf{r}_3$, $2r_3$

- $(a + bi) + (a - bi) = -6 \Rightarrow a = -3$
- $(-3 + bi) \cdot (-3 - bi) = 25 \Rightarrow 9 - (bi)^2 = 25 \Rightarrow 9 + b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$
- Usando as relações de Girard, temos:

  $(a + bi) + (a - bi) + r_3 + 2r_3 = \frac{-b}{a} = 0$

  $(-\not{3} + 4i) + (-\not{3} - 4i) + 3r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 2 \Rightarrow r_4 = 2 \cdot r_3 = 4$

  As raízes são: $-3 + 4i$, $-3 - 4i$, 2 e 4.

**b)** Pelas relações de Girard, temos:

$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a}$

$(-3 + 4i) \cdot (-3 - 4i) \cdot 2 \cdot 4 = q$

$(9 + 16) \cdot 8 = q \Rightarrow q = 200$

Daí: $p(x) = x^4 - 3x^2 + px + 200$

Como 2 é raiz, $p(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2p + 200 = 0 \Rightarrow 2p + 204 = 0 \Rightarrow p = -102$